doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2021.01.003

求解一类模糊线性系统的全局 FOM 和 GMRES 方法

顾　颖[1],葛志利[2],陈　新[3]

(1.宿迁学院文理学院,江苏 宿迁 223800)
(2.南京科技职业学院基础科学部,江苏 南京 210048)
(3.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要]　考虑一类 $n\times n$ 阶模糊线性系统,其系数矩阵是精确数矩阵,右端项为模糊数向量. 本文基于矩阵方程模型,提出求解该系统的全局完全正交化方法和全局广义极小残量法,并给出了收敛性分析. 最后,数值结果验证了新方法的稳定性与有效性.

[关键词]　模糊线性系统,矩阵方程,全局完全正交化方法,全局广义极小残量法

[中图分类号]O241.6　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2021)01-0013-07

Global FOM and GMRES Methods for Solving a Class of Fuzzy Linear Systems

Gu Ying[1],Ge Zhili[2],Chen Xin[3]

(1.School of Literature and Science,Suqian College,Suqian 223800,China)
(2.Basic Sciences Department,Nanjing Polytechnic Institute,Nanjing 210048,China)
(3.School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:In this paper,we consider a class of $n\times n$ fuzzy linear systems,whose coefficient matrix is an exact number matrix and the right-hand side is a fuzzy number vector. Based on the matrix equation model,we propose the global full orthogonalization method and the global generalized minimum residual method to solve the fuzzy linear systems. We also prove the convergence. Finally,numerical results illustrate the stability and effectiveness of the proposed methods.

Key words:fuzzy linear systems,matrix equation,global full orthogonalization method,global generalized minimum residual method

自 1965 年 Zadeh 在文[1]中首次提出模糊集概念,模糊数学作为一门新兴学科迅速发展起来,现已成为一个独立的数学分支,在工程分析、模式识别、自动控制、经济、金融等领域发挥着重要的作用[2-3]. 上述领域中许多问题最终都可转化为线性方程组,如平衡态和稳态问题的有限元法,就产生了一族联立代数线性方程组. 即使是非线性问题,我们也希望在某种意义下能够转化为线性问题. 同时,由于实际问题中往往含有许多不确定因素,无法用精确数据来刻画,常需借助模糊数来描述这种不确定性. 因此,实际应用中出现较多的通常是参数全部或部分为模糊数的线性系统,我们称其为模糊线性系统.

本文考虑一类用处较广的 $n\times n$ 阶模糊线性系统,其系数矩阵是精确数矩阵,右端项为模糊数向量. 文[4]中首次提出求解该类型系统的一个通用模型,即利用嵌入方法将原模糊系统转化为 $2n\times 2n$ 阶精确线性系统. 在此基础上,文[5-9]的作者相继提出了求解这类系统的诸多迭代法,如 Jacobi,Gauss-Seidel,SOR,SSOR,Richardson,AOR,EMA,MSOR 方法等. 由于精确线性系统含有参数,即是一个符号系统,因此,上述以它为模型建立的算法在处理实际问题时往往需计算两个独立的数值系统,如文献[9]中的算例,这就大大增加了计算成本. 为解决这一问题,文[10]依据 LR-梯形模糊数[11]的特点,将精确线性系统进一

收稿日期:2019-11-17.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11271196、12001281)、江苏省高校自然科学研究面上项目(17KJD110003)、江苏省高职院校教师专业带头人高端研修项目和江苏省青蓝工程资助项目.
通讯作者:陈新,博士,副教授,研究方向:数值线性代数. E-mail:chenxin2907@ 126.com

步转化为不含参数的矩阵方程,并依据新模型重新建立了 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法. 基于矩阵方程模型的算法在计算时仅需处理一个数值系统,计算量约为基于精确线性系统模型的同类型算法的一半.

文[12]提出的完全正交化方法(FOM)和广义极小残量法(GMRES)是目前求解线性系统最有效的方法之一. 文[13]进行了推广,建立了求解矩阵方程的全局完全正交化方法(Gl-FOM)和全局广义极小残量法(Gl-GMRES). 本文将它们应用于模糊线性系统的矩阵方程模型,提出求解该系统的两种新的数值方法,并给出收敛性分析. 最后,数值结果验证了新方法的稳定性与有效性.

1　预备知识

在这一节里,我们将给出一些关于模糊线性系统以及矩阵方程模型的概念和结论.

定义 1[4-6]　称有序函数对$(\underline{u}(r),\overline{u}(r))$,$0\leqslant r\leqslant 1$ 为模糊数,若它满足以下 3 个条件:

(1)$\underline{u}(r)$是$[0,1]$上的有界左连续非减函数;

(2)$\overline{u}(r)$是$[0,1]$上的有界左连续非增函数;

(3)$\underline{u}(r)\leqslant\overline{u}(r)$,$0\leqslant r\leqslant 1$.

对任给的模糊数 $x=(\underline{x}(r),\overline{x}(r))$,$y=(\underline{y}(r),\overline{y}(r))$$(0\leqslant r\leqslant 1)$和实数 k 有如下运算关系:

(1)$x=y$ 当且仅当 $\underline{x}(r)=\underline{y}(r)$,$\overline{x}(r)=\overline{y}(r)$;

(2)$x+y=(\underline{x}(r)+\underline{y}(r),\overline{x}(r)+\overline{y}(r))$;

(3)$kx=\begin{cases}(k\underline{x}(r),k\overline{x}(r)), & k\geqslant 0,\\ (k\overline{x}(r),k\underline{x}(r)), & k<0.\end{cases}$

定义 2[4]　考虑 $n\times n$ 阶线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=y_n\end{cases},$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y},\tag{1}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})(1\leqslant i,j\leqslant n)$是精确数矩阵,右端是由模糊数 $y_i(1\leqslant i\leqslant n)$构成的向量,称系统(1)为 $n\times n$ 阶模糊线性系统.

定义 3[4-6]　模糊数向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$(其中 $x_i=(\underline{x}_i(r),\overline{x}_i(r))$,$1\leqslant i\leqslant n$,$0\leqslant r\leqslant 1$)称作模糊线性系统(1)的解,如果成立

$$\underline{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j}=\sum_{j=1}^{n}\underline{a_{ij}x_j}=\underline{y}_i,\quad \overline{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j}=\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}x_j}=\overline{y}_i,\quad (1\leqslant i\leqslant n).$$

若令

$$\hat{\boldsymbol{x}}=(\underline{x}_1(r),\cdots,\underline{x}_n(r),-\overline{x}_1(r),\cdots,-\overline{x}_n(r))^{\mathrm{T}},$$
$$\hat{\boldsymbol{y}}=(\underline{y}_1(r),\cdots,\underline{y}_n(r),-\overline{y}_1(r),\cdots,-\overline{y}_n(r))^{\mathrm{T}},$$

则模糊线性系统(1)等价于 $2n\times 2n$ 阶精确线性系统

$$\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}},\tag{2}$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix},\tag{3}$$

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 包含了 $\boldsymbol{A}$ 中的正元,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 包含了 $\boldsymbol{A}$ 中负元的绝对值,显然,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$. 具体可参考文献[4].

引理 1[4]　矩阵 $\boldsymbol{S}$ 非奇异当且仅当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ 都是非奇异的.

注 1　引理 1 表明即使(1)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异,$\boldsymbol{S}$ 仍有可能奇异.

注 2　引理 1 虽保证了当 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 均非奇异时(2)有唯一解,但此解未必是模糊数向量.

定义 4[4-6]　设 $\boldsymbol{x}=\{(\underline{x}_i(r),\overline{x}_i(r)),1\leqslant i\leqslant n\}$是由(2)得到的模糊线性系统(1)的唯一解,如果$(\underline{x}_i(r),\overline{x}_i(r))(1\leqslant i\leqslant n)$全都是模糊数,则称 $\boldsymbol{x}$ 为强模糊解;否则,称作弱模糊解.

文献[10]依据 LR-梯形模糊数的结构特征:

$$x=(\underline{x}(r),\overline{x}(r))=(x^1+x^2r,x^3-x^4r),\tag{4}$$

对照向量 $\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}}$,分别令矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1^1 & x_1^2\\ \vdots & \vdots\\ x_n^1 & x_n^2\\ -x_1^3 & x_1^4\\ \vdots & \vdots\\ -x_n^3 & x_n^4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}y_1^1 & y_1^2\\ \vdots & \vdots\\ y_n^1 & y_n^2\\ -y_1^3 & y_1^4\\ \vdots & \vdots\\ -y_n^3 & y_n^4\end{pmatrix},$$

将系统(2)进一步转化为不带参数的矩阵方程

$$\boldsymbol{SX}=\boldsymbol{Y}.\tag{5}$$

至此,求解模糊线性系统(1)就转化为求解矩阵方程(5). 同时,考虑到 $\boldsymbol{S}$ 的分块结构,从优化算法的角度考虑,我们将 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 也表示成类似形式. 令

$$\boldsymbol{X}^1=\begin{pmatrix}x_1^1 & x_1^2\\ \vdots & \vdots\\ x_n^1 & x_n^2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}^2=\begin{pmatrix}-x_1^3 & x_1^4\\ \vdots & \vdots\\ -x_n^3 & x_n^4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}^1=\begin{pmatrix}y_1^1 & y_1^2\\ \vdots & \vdots\\ y_n^1 & y_n^2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}^2=\begin{pmatrix}-y_1^3 & y_1^4\\ \vdots & \vdots\\ -y_n^3 & y_n^4\end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^1\\ \boldsymbol{X}^2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}^1\\ \boldsymbol{Y}^2\end{pmatrix}.$$

从而,矩阵方程(5)等价于

$$\boldsymbol{S}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}^1\\ \boldsymbol{X}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}^1\\ \boldsymbol{Y}^2\end{pmatrix}.\tag{6}$$

2　全局 Arnoldi 过程

对任给矩阵 $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{R}^{2n\times 2}$,定义矩阵 Krylov 子空间 $\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{S},\boldsymbol{V})=\mathrm{span}\{\boldsymbol{V},\boldsymbol{SV},\cdots,\boldsymbol{S}^{k-1}\boldsymbol{V}\}$,本节根据文献[13]中算法 2.2 建立全局 Arnoldi 算法,构建 $\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{S},\boldsymbol{V})$ 的一组 F-正交基. 同时,考虑到模糊线性系统的矩阵方程模型(6)的特殊结构,将算法中的初始矩阵 $\boldsymbol{V}$ 和基 $\boldsymbol{V}_1,\cdots,\boldsymbol{V}_k$ 均处理成分块形式,即

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}^1\\ \boldsymbol{V}^2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{V}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_i^1\\ \boldsymbol{V}_i^2\end{pmatrix},(i=1,\cdots,k).$$

算法 1　全局 Arnoldi 算法

1.对任给的初始矩阵 $\boldsymbol{V}^1,\boldsymbol{V}^2$,取 $\boldsymbol{V}_1^1=\dfrac{\boldsymbol{V}^1}{\sqrt{\|\boldsymbol{V}^1\|_F^2+\|\boldsymbol{V}^2\|_F^2}},\boldsymbol{V}_1^2=\dfrac{\boldsymbol{V}^2}{\sqrt{\|\boldsymbol{V}^1\|_F^2+\|\boldsymbol{V}^2\|_F^2}}$.

2.for $j=1,\cdots,k$

3.　$\boldsymbol{W}^1=\boldsymbol{BV}_j^1+\boldsymbol{CV}_j^2$,　$\boldsymbol{W}^2=\boldsymbol{CV}_j^1+\boldsymbol{BV}_j^2$,

4.　for $i=1,\cdots,j$

5.　　$h_{ij}=\mathrm{tr}((\boldsymbol{W}^1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_i^1)+\mathrm{tr}((\boldsymbol{W}^2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_i^2)$,

6.　　$\boldsymbol{W}^1=\boldsymbol{W}^1-h_{ij}\boldsymbol{V}_i^1$,　$\boldsymbol{W}^2=\boldsymbol{W}^2-h_{ij}\boldsymbol{V}_i^2$,

7.　end

8.　　$h_{j+1,j}=\sqrt{\|\boldsymbol{W}^1\|_F^2+\|\boldsymbol{W}^2\|_F^2}$, 9.　　$V_{j+1}^1=W^1/h_{j+1,j}, V_{j+1}^2=W^2/h_{j+1,j}$,

10. end

由文献[13]命题 1 易知,全局 Arnoldi 算法生成的一组基 $\boldsymbol{V}_1,\cdots,\boldsymbol{V}_k$ 是 F-正交的. 接下来,我们定义 $\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1=(\boldsymbol{V}_1^1,\cdots,\boldsymbol{V}_k^1)$, $\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2=(\boldsymbol{V}_1^2,\cdots,\boldsymbol{V}_k^2)$, $\widetilde{\boldsymbol{V}}_k=(\boldsymbol{V}_1,\cdots,\boldsymbol{V}_k)$ 分别表示 $n\times 2k$, $n\times 2k$ 和 $2n\times 2k$ 阶矩阵,从而 $\widetilde{\boldsymbol{V}}_k=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1\\ \widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2\end{pmatrix}$. $\widetilde{\boldsymbol{H}}_k$ 表示$(k+1)\times k$ 阶上海森伯格矩阵,其非零元 h_{ij} 由算法 1 定义. $\boldsymbol{H}_k$ 表示从 $\widetilde{\boldsymbol{H}}_k$ 中划去最后一行得到的 k 阶方阵. 根据文献[13]中定义的乘积 $*$,有下述结论:

定理 1　设矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1,\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2,\widetilde{\boldsymbol{H}}_k,\boldsymbol{H}_k$ 分别如上所定义,则有下列两组关系式成立

$$\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1+\boldsymbol{C}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2=\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{H}_k+\boldsymbol{Z}_{k+1}^1,\quad \boldsymbol{C}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1+\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2=\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2*\boldsymbol{H}_k+\boldsymbol{Z}_{k+1}^2, \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{Z}_{k+1}^1=h_{k+1,k}(\boldsymbol{O}_{n\times 2},\cdots,\boldsymbol{O}_{n\times 2},\boldsymbol{V}_{k+1}^1)$, $\boldsymbol{Z}_{k+1}^2=h_{k+1,k}(\boldsymbol{O}_{n\times 2},\cdots,\boldsymbol{O}_{n\times 2},\boldsymbol{V}_{k+1}^2)$.

$$\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1+\boldsymbol{C}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2=\widetilde{\boldsymbol{V}}_{k+1}^1*\widetilde{\boldsymbol{H}}_k,\ \boldsymbol{C}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1+\boldsymbol{B}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2=\widetilde{\boldsymbol{V}}_{k+1}^2*\widetilde{\boldsymbol{H}}_k. \tag{8}$$

证明　记 $\boldsymbol{Z}_{k+1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{k+1}^1\\ \boldsymbol{Z}_{k+1}^2\end{pmatrix}$,由文献[13]定理 1,得到

$$\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k=\widetilde{\boldsymbol{V}}_k*\boldsymbol{H}_k+\boldsymbol{Z}_{k+1}, \tag{9}$$

因为

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_k*\boldsymbol{H}_k=(\widetilde{\boldsymbol{V}}_k*\boldsymbol{H}_{\cdot,1},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{V}}_k*\boldsymbol{H}_{\cdot,k}),$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_k*\boldsymbol{H}_{\cdot,j}=\sum_{i=1}^k \boldsymbol{H}_{i,j}\boldsymbol{V}_i=\sum_{i=1}^k \boldsymbol{H}_{i,j}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_i^1\\ \boldsymbol{V}_i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^k \boldsymbol{H}_{i,j}\boldsymbol{V}_i^1\\ \sum_{i=1}^k \boldsymbol{H}_{i,j}\boldsymbol{V}_i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{H}_{\cdot,j}\\ \widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2*\boldsymbol{H}_{\cdot,j}\end{pmatrix},(j=1,\cdots,k) \tag{10}$$

所以

$$\widetilde{\boldsymbol{V}}_k*\boldsymbol{H}_k=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{H}_{\cdot,1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{H}_{\cdot,k}\\ \widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2*\boldsymbol{H}_{\cdot,1} & \cdots & \widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2*\boldsymbol{H}_{\cdot,k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{H}_k\\ \widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2*\boldsymbol{H}_k\end{pmatrix}, \tag{11}$$

结合式(9)和式(11),得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1\\ \widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{H}_k\\ \widetilde{\boldsymbol{V}}_k^2*\boldsymbol{H}_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{Z}_{k+1}^1\\ \boldsymbol{Z}_{k+1}^2\end{pmatrix},$$

故式(7)得证. 式(8)类似可证得.

3　Gl-FOM 和 Gl-GMRES 方法

考虑模糊线性系统的矩阵方程模型(5),根据文献[13]中求解一般矩阵方程的 Gl-FOM 和 Gl-GMRES 方法的思想,设 $\boldsymbol{X}_0$ 表示初始矩阵,对应残量为 $\boldsymbol{R}_0=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_0$,迭代法在第 k 步的近似解 $\boldsymbol{X}_k$ 具有如下形式:

$$\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{X}_0+\widetilde{\boldsymbol{V}}_k*\boldsymbol{y}_k, \tag{12}$$

式中,$\boldsymbol{y}_k\in\boldsymbol{R}^k$ 为待定向量.

在 Gl-FOM 方法中,要求第 k 步残量 $\boldsymbol{R}_k$ 满足 Galerkin 条件,即 $\boldsymbol{R}_k\perp_F \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R}_0)$. 此正交条件表明 $\boldsymbol{y}_k$ 是线性系统 $\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{y}=\beta\boldsymbol{e}_1^{(k)}$ 的解,其中 $\beta=\|\boldsymbol{R}_0\|_F$, $\boldsymbol{e}_1^{(k)}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^k$.

在 Gl-GMRES 方法中,要求 $\boldsymbol{R}_k$ 满足 $\boldsymbol{R}_k\perp_F \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}\boldsymbol{R}_0)$,该正交条件可转化为最小二乘问题

$$\|\boldsymbol{R}_k\|_F=\min_{\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\in \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R}_0)}\|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}\|_F, \tag{13}$$

由于算法 1 生成的基是 F-正交的,为便于实际计算,(13)可用一规模较小的最小二乘问题

$$\min_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^k}\|\beta\boldsymbol{e}_1^{(k+1)}-\widetilde{\boldsymbol{H}}_k\boldsymbol{y}\|_2 \tag{14}$$

替代,其中 $\beta=\|\boldsymbol{R}_0\|_F$, $\boldsymbol{e}_1^{(k+1)}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{k+1}$.

考虑到矩阵方程模型(5)或(6)的特殊结构,为节省存储空间,减少计算量,采用与算法 1 类似的做

法，将初始矩阵 $\boldsymbol{X}_0$ 和第 k 步近似 $\boldsymbol{X}_k$ 也表示成分块形式，即

$$\boldsymbol{X}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_0^1\\ \boldsymbol{X}_0^2\end{pmatrix},\boldsymbol{X}_k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_k^1\\ \boldsymbol{X}_k^2\end{pmatrix},$$

从而，第 k 步残量

$$\boldsymbol{R}_k=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Y}^1-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_k^1-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_k^2\\ \boldsymbol{Y}^2-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_k^1-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_k^2\end{pmatrix}$$

也具有分块结构，不妨记为 $\boldsymbol{R}_k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_k^1\\ \boldsymbol{R}_k^2\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{R}_k^1=\boldsymbol{Y}^1-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_k^1-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_k^2$，$\boldsymbol{R}_k^2=\boldsymbol{Y}^2-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_k^1-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_k^2$. 下面基于模型(6)，给出求解模糊线性系统(1)的 Gl-FOM 和 Gl-GMRES 方法.

算法 2　Gl-FOM 和 Gl-GMRES 方法

1.任意给定初始矩阵 $\boldsymbol{X}_0^1,\boldsymbol{X}_0^2$，计算

$$\boldsymbol{R}_0^1=\boldsymbol{Y}^1-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0^1-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_0^2,\boldsymbol{R}_0^2=\boldsymbol{Y}^2-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_0^1-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_0^2,\beta=\sqrt{\|\boldsymbol{R}_0^1\|_F^2+\|\boldsymbol{R}_0^2\|_F^2}.$$

2.取 $\boldsymbol{V}^1=\boldsymbol{R}_0^1,\boldsymbol{V}^2=\boldsymbol{R}_0^2$，利用算法 1，生成 $\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R}_0)$ 的一组 F-正交基

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_1^1\\ \boldsymbol{V}_1^2\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_k^1\\ \boldsymbol{V}_k^2\end{pmatrix}.$$

3.根据条件 $\begin{cases}\boldsymbol{Gl\text{-}FOM} & \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{y}=\beta\boldsymbol{e}_1^{(k)},\\ \boldsymbol{Gl\text{-}GMRES} & \min\limits_{\boldsymbol{y}\in R^k}\|\beta\boldsymbol{e}_1^{(k+1)}-\tilde{\boldsymbol{H}}_k\boldsymbol{y}\|_2\end{cases}$，计算 $\boldsymbol{y}_k$.

4.第 k 步近似解 $\boldsymbol{X}_k^1=\boldsymbol{X}_0^1+\tilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{X}_k^2=\boldsymbol{X}_0^2+\tilde{\boldsymbol{V}}_k^2*\boldsymbol{y}_k$.

由于在计算过程中需存储矩阵 Krylov 子空间 $\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{S},\boldsymbol{R}_0)$ 的一组基 $\boldsymbol{V}_1,\cdots,\boldsymbol{V}_k$，随着 k 的增大，存储量也在变大，计算时便会出现近似解还没达到预设精度，但 k 已不能再增大的情形. 为解决这一问题，Jbilou 等人[13]采用重启策略，具体做法是预先给定一个不太大的正整数 k，根据算法 2 求得近似解 $\boldsymbol{X}_k$，若该近似解达不到精度要求，则以其作为下一次计算的初始值，即带重启策略的 Gl-FOM 和 Gl-GMRES 方法，记作 Gl-FOM(k)和 Gl-GMRES(k). 该类方法总的迭代次数为内迭代次数 k 与重启次数的乘积.

接下来，对 Gl-FOM 和 Gl-GMRES 方法在第 k 步迭代时的残量 $\boldsymbol{R}_k$ 的上限作出估计.

定理 2　Gl-FOM 方法在第 k 步迭代时所得的残量 $\boldsymbol{R}_k$ 满足以下关系

$$\|\boldsymbol{R}_k^1\|_F\leqslant h_{k+1,k}|\boldsymbol{y}_k^{(k)}|,\tag{15}$$

$$\|\boldsymbol{R}_k^2\|_F\leqslant h_{k+1,k}|\boldsymbol{y}_k^{(k)}|,\tag{16}$$

式中，$\boldsymbol{y}_k^{(k)}$ 表示向量 $\boldsymbol{y}_k$ 的最后一个元素.

证明　以 $\boldsymbol{R}_k^1$ 为例，

$$\boldsymbol{R}_k^1=\boldsymbol{Y}^1-\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_k^1-\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_k^2=\boldsymbol{Y}^1-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_0^1+\tilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{y}_k)-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X}_0^2+\tilde{\boldsymbol{V}}_k^2*\boldsymbol{y}_k)=\boldsymbol{R}_0^1-(\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{V}}_k^1+\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{V}}_k^2)*\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{R}_0^1-(\tilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{H}_k+\boldsymbol{Z}_{k+1}^1)*\boldsymbol{y}_k=\beta(\tilde{\boldsymbol{V}}_k^1*\boldsymbol{e}_1^{(k)})-\tilde{\boldsymbol{V}}_k^1*(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{y}_k)-\boldsymbol{Z}_{k+1}^1*\boldsymbol{y}_k=\tilde{\boldsymbol{V}}_k^1*(\beta\boldsymbol{e}_1^{(k)}-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{y}_k)-h_{k+1,k}\boldsymbol{y}_k^{(k)}\boldsymbol{V}_{k+1}^1,$$

在 Gl-FOM 方法中，因 $\boldsymbol{y}_k$ 是线性系统 $\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{y}=\beta\boldsymbol{e}_1^{(k)}$ 的解，所以 $\boldsymbol{R}_k^1=-h_{k+1,k}\boldsymbol{y}_k^{(k)}\boldsymbol{V}_{k+1}^1$，又因为 $\|\boldsymbol{V}_{k+1}^1\|_F\leqslant\|\boldsymbol{V}_{k+1}\|_F=1$，故 $\|\boldsymbol{R}_k^1\|_F\leqslant h_{k+1,k}|\boldsymbol{y}_k^{(k)}|$，式(15)得证. 同理可证得式(16).

实际求解最小二乘问题(14)时，需对上海森伯格矩阵 $\tilde{\boldsymbol{H}}_k$ 作 QR 分解，即借助 Givens 旋转找到正交矩阵 $\tilde{\boldsymbol{Q}}_k$，使得 $\tilde{\boldsymbol{Q}}_k\tilde{\boldsymbol{H}}_k=\tilde{\boldsymbol{R}}_k$，其中 $\tilde{\boldsymbol{R}}_k$ 为上三角矩阵，详见参考文献[12]. 此时，若 $\beta\tilde{\boldsymbol{Q}}_k\boldsymbol{e}_1^{(k+1)}=(\gamma_1,\cdots,\gamma_{k+1})^{\mathrm{T}}$，则有如下结论：

定理 3　Gl-GMRES 方法在第 k 步迭代时所得的残量 $\boldsymbol{R}_k$ 满足以下关系

$$\|\boldsymbol{R}_k^1\|_F\leqslant|\gamma_{k+1}|,\ \|\boldsymbol{R}_k^2\|_F\leqslant|\gamma_{k+1}|.$$

证明　参照文献[13].

4　数值实验

本节，我们测试了算法的数值结果. 所有程序均用 MATLAB R2016a 语言编写，且在 win10 系统下运行.

考虑两种不同类型的大规模模糊线性系统,分别就阶数 n 取不同值时进行计算,用带重启策略的 Gl-FOM(k)和 Gl-GMRES(k)方法求解,预设 $k=10$,并与文献[10]中同样基于矩阵方程模型的 Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法作比较. 初始矩阵选择零矩阵,终止准则为 $\frac{\sqrt{\|\boldsymbol{R}_k^1\|_F^2+\|\boldsymbol{R}_k^2\|_F^2}}{\sqrt{\|\boldsymbol{R}_0^1\|_F^2+\|\boldsymbol{R}_0^2\|_F^2}}\leqslant 10^{-7}$,‘Total’表示迭代法总的迭代次数,‘CPU’表示运行时间,‘×’表示达到最大迭代次数时算法仍不收敛.

例 1 考虑 $n\times n$ 阶模糊线性系统 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}$,其中

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{cases}a_{ij}=1, & i=j,\\ a_{ij}=1, & i=n,j=1,\\ a_{ij}=0, & i=n,j=2,\cdots,n-1,\\ a_{ij}=-\dfrac{1}{n}, & \text{其它 } i\neq j,\end{cases}\quad 1\leqslant i,j\leqslant n,\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}(1+r,3-r)\\(1+r,3-r)\\ \vdots \\(1+r,3-r)\end{pmatrix}.$$

本例中 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优矩阵,由文献[10]定理 4 知,Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法都收敛. 不难判断 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 均是非奇异矩阵,由引理 1 得,$\boldsymbol{S}$ 也是非奇异的. 分别就 n 取 100,200,300 的情形进行计算,数值结果见表 1.

表 1 Gl-FOM(10),Gl-GMRES(10),Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法的数值结果

Table 1 Numerical results of Gl-FOM(10),Gl-GMRES(10),Jacobi and Gauss-Seidel methods

n	Gl-FOM(10)		Gl-GMRES(10)		Jacobi		Gauss-Seidel	
	Total	CPU	Total	CPU	Total	CPU	Total	CPU
100	440	0.08	420	0.08	1 306	0.23	1 270	0.23
200	890	0.25	780	0.22	2 610	0.84	2 499	0.83
300	1 200	0.89	990	0.81	3 910	2.52	3 816	2.51

从表 1 能够看出,当模糊线性系统阶数相同时,Gl-FOM(k)和 Gl-GMRES(k)方法所需总的迭代次数和时间远少于 Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法,且随着系统规模增大,差距越明显.

例 2 考虑 $n\times n$ 阶模糊线性系统 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}$,其中

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{cases}a_{ij}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2n}, & i<j,\\ a_{ij}=-a_{ji}, & i>j,\\ a_{ij}=-\sum\limits_{k\neq i}a_{ik}+1+\dfrac{i}{n}, & i=j,\end{cases}\quad 1\leqslant i,j\leqslant n,\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}(1+r,3-r)\\(2+r,4-r)\\ \vdots \\(n+r,(n+2)-r)\end{pmatrix}.$$

根据 $\boldsymbol{A}$ 的表示,容易判断 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$ 均非奇异,由引理 1 知,$\boldsymbol{S}$ 也是非奇异的. 文献[9]中,就 n 取 100,200,300 的情形进行了计算,本文考虑更大规模的情况,即 n 分别取 300,400,500,数值结果见表 2.

表 2 Gl-FOM(10),Gl-GMRES(10),Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法的数值结果

Table 2 Numerical results of Gl-FOM(10),Gl-GMRES(10),Jacobi and Gauss-Seidel methods

n	Gl-FOM(10)		Gl-GMRES(10)		Jacobi		Gauss-Seidel	
	Total	CPU	Total	CPU	Total	CPU	Total	CPU
300	30	0.12	30	0.11	×	×	×	×
400	40	0.17	40	0.17	×	×	×	×
500	60	0.42	50	0.33	×	×	×	×

从表 2 数据能够看出,本文的 Gl-FOM(k)和 Gl-GMRES(k)方法花费较少的迭代次数和时间即可达到预设精度,但 Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法对本例无效.

5 结论

对于 $n\times n$ 阶系数矩阵是精确数矩阵,右端项为模糊数向量的模糊线性系统,本文基于矩阵方程模型建立了求解该系统的 Gl-FOM 和 Gl-GMRES 方法,并对这两种方法作了收敛性分析. 数值结果验证了新方法明显优于 Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法[10].

[参考文献]

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and control,1965,8(3):289-296.

[2] 李洪兴,汪培庄. 模糊数学[M]. 北京:国防工业出版社,1994.

[3] BUCKLEY J J. Solving fuzzy equations in economics and finance[J]. Fuzzy sets and systems,1992,48(2):289-296.

[4] FRIEDMAN M,MING M,KANDEL A. Fuzzy linear systems[J]. Fuzzy sets and systems,1998,96(3):201-209.

[5] ALLAHVIRANLOO T. Numerical methods for fuzzy system of linear equations[J]. Applied mathematics and computation, 2004,155(2):493-502.

[6] ALLAHVIRANLOO T. Successive over relaxation iterative method for fuzzy system of linear equations[J]. Applied mathematics and computation,2005,162(1):189-196.

[7] WANG K,ZHENG B. Symmetric successive overrelaxation methods for fuzzy linear systems[J]. Applied mathematics and computation,2006,175(1):891-901.

[8] DEHGHAN M,HASHEMI B. Iterative solution of fuzzy linear systems[J]. Applied mathematics and computation,2006, 175(3):645-674.

[9] 王世恒,焦克莹. 模糊线性系统的新迭代方法[J]. 云南大学学报(自然科学版),2016,38(1):66-69.

[10] 巩增泰,杨甲荣. 基于 LR-梯形模糊数的模糊线性系统解问题及其数值计算[J]. 云南大学学报(自然科学版),2018, 40(5):836-847.

[11] DUBOIS D,PRADE H.The mean value of a fuzzy number[J]. Fuzzy sets and systems,1987,24(3):279-300.

[12] SAAD Y,SCHULTZ M H.GMRES:a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems[J]. Society industry and applied mathematics journal on scientific computing,1986,7(3):856-869.

[13] JBILOU K,MESSAOUDI A,SADOK H.Global FOM and GMRES algorithms for matrix equation[J]. Applied numerical mathematics,1999,31(2):49-63.

[责任编辑:陆炳新]