doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2021.02.001

关于 H^1 非协调虚拟元的若干估计

黄建国,余　跃

(上海交通大学数学科学学院,上海 200240)

[摘要]　本文在多角形网格具拟一致、正则虚拟三角剖分的假设下建立了 H^1 非协调虚拟元的若干估计,包括逆不等式、范数等价性和插值误差估计. 首先用证明协调虚拟元逆不等式的方法在虚拟三角形上使用泡函数技巧获得逆不等式. 然后证明自由度型的逆不等式和 Poincare-Friedrichs 不等式,据此获得 L^2 型范数等价性中关键的上界估计. 最后利用范数等价性,给出插值算子误差分析的统一方法,即先建立插值算子的稳定性,再使用 Bramble-Hilbert 论证获得最优误差估计.

[关键词]　非协调虚拟元方法,逆不等式,范数等价性,插值误差估计

[中图分类号]O24　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2021)02-0001-05

Some Estimates for H^1 Nonconforming Virtual Element Methods

Huang Jianguo,Yu Yue

(School of Mathematical Sciences,Shanghai Jiao Tong University,Shanghai 200240,China)

Abstract:This paper develops some estimates for the H^1 nonconforming virtual element methods(VEMs)including inverse inequality,norm equivalence,and interpolation error estimate related to polygonal meshes,each of which admits a virtual quasi-uniform and regular triangulation. We first derive the inverse inequality by using the arguments for proving the inverse inequality of conforming VEMs and the bubble function technique. Next,we obtain the inverse inequality and the Poincare-Friedrichs inequality involving the degrees of freedom of a VEM function,which lead to the critical estimate of the upper bound of the L^2 case in the norm equivalence. In view of the stability result of the interpolation operator established in advance,we finally obtain a unified error analysis of interpolation operators using the Bramble-Hilbert argument.

Key words:nonconforming virtual element method,inverse inequality,norm equivalence,interpolation error estimate

虚拟元方法(VEM)由 Beirao 等在文[1]中提出,它是标准有限元在多角形或多面体网格上的推广. 其它开创性工作参见文[2-3]. 作为一个新的数值算法,近年来 VEM 得到快速发展,已广泛用于各种微分方程的数值求解[2-7]. 相比有限元,VEM 能更方便地处理复杂区域上或具高正则性容许空间的变分问题的数值求解. 椭圆型方程非协调虚拟元的构造自然且标准,它可由微分算子的分部积分公式直接获得. 而且当多角形或多面体退化为单纯形时,VEM 常给出标准有限元.

VEM 理论分析的文章并不多,大多在网格满足星形条件下讨论,如文[5]中的假设 A3. 陈龙和黄建国在文[8]中给出了一个更一般的假设,并在该假设下建立了 H^1 协调虚拟元的若干误差估计,包括逆不等式、范数等价性和插值误差估计. 其假设如下:

A1. 在每个网格单元 $K\in\mathcal{T}_h$ 上,存在一致正则和拟一致的“虚拟三角剖分”$\mathcal{T}_K$,并且 $\mathcal{T}_K$ 的剖分尺寸与 h_K 相当. 此外,K 的每一条边均是 $\mathcal{T}_K$ 中某一三角形的边.

本文在假设 A1 下考虑二维 H^1 非协调元的若干估计. 对逆不等式,本文把文[9]中处理协调元的技巧推广至非协调情形,给出一个重要函数分解,将其证明归结为调和情形. 该技巧适用于二阶和四阶椭圆问题的协调和非协调虚拟元. 在虚拟三角剖分上使用泡函数技巧,证明了迹不等式(4)或(5),从而获得逆不等式,详见定理 1. 范数等价性推导的关键在于证明 L^2 情形即(6)的上界估计. 本文分两步证明该上界估

收稿日期:2020-11-15.

基金项目:国家自然科学基金面上项目(12071289).

通讯作者:余跃,博士研究生,研究方向:科学计算. E-mail:terenceyuyue@sjtu.edu.cn

计,即建立自由度型的逆不等式(8)和自由度型的 Poincare-Friedrichs 不等式(9). 需要指出的是,文[7]给出了任意阶任意维非协调元的范数等价性和插值误差分析. 除了虚拟三角剖分假设外,该文还需另一假设. 对高维一般情形,该分析涉及诸多精细技巧. 本文则借助虚拟三角剖分,使用非常简单、直接的方法给出逆不等式和范数等价性结果. 在范数等价性的基础上,使用(10)这一简单关系式建立插值算子的 L^2 稳定性,然后使用 Bramble-Hilbert 论证给出了插值算子的误差估计.

1　准备知识

先介绍本文用到的数学符号和基本结果. 对一个有界 Lipschitz 区域 D,符号 $(\cdot,\cdot)_D$ 表示 D 上的 L^2 内积, $\|\cdot\|_{0,D}$ 为 L^2 范数,而 $|\cdot|_{s,D}$ 为 $H^s(D)$ 半模. 对非负整数 k,用 $\mathbb{P}_k(D)$ 表示 D 上次数至多 k 的多项式集合. L^1 可积函数在 D 上的平均记为 $\bar{v}^D=|D|^{-1}\int_D v\mathrm{d}x$,式中 $|D|$ 表示 D 的测度. 此外,对两个量 a 和 b,"$a\lesssim b$"表示"$a\leqslant Cb$",式中的常数 C 不依赖于网格剖分 $\mathcal{T}_h$ 的尺寸 h_K,而"$a\lesssim b\lesssim a$"缩写为"$a\eqsim b$". 另外,使用 $\|\cdot\|_{l^2}$ 表示向量的 2-范数.

H^1 非协调虚拟元方法由文献[4]提出,对 $k\geqslant 1$,局部虚拟元空间定义为

$$V_k(K):=\{v\in H^1(K):\Delta v\in\mathbb{P}_{k-2}(K),\quad v|_{\partial K}\in\mathbb{B}_k(\partial K)\},\quad k\geqslant 1,$$

式中,

$$\mathbb{B}_k(\partial K)=\{v\in C^0(\partial K):v|_e\in\mathbb{P}_k(e),\quad e\subset\partial K\},$$

而 $C^0(\partial K)$ 表示沿着单元 K 的边界 ∂K 连续的函数集合. 为了给出自由度,引入尺度单项式集合

$$\mathbb{M}_r(D):=\left\{\left(\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_D}{h_D}\right)^{\boldsymbol{s}},\quad |\boldsymbol{s}|\leqslant r\right\},$$

式中, h_D 是单元直径, $\boldsymbol{x}_D$ 是单元的重心,对多重指标 $\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d$,定义 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{s}}=x_1^{s_1}\cdots x_d^{s_d}$ 和 $|\boldsymbol{s}|=s_1+\cdots+s_d$. 对 $r\leqslant -1$,规定 $\mathbb{M}_r(D)=\{0\}$. 自由度取为

- $\boldsymbol{\chi}_{\partial K}(v)$:边上直到 $k-1$ 阶的矩量,

$$\chi_e(v)=|e|^{-1}(m_e,v)_e,\quad m_e\in\mathbb{M}_{k-1}(e),e\subset\partial K.$$

- $\boldsymbol{\chi}_K(v)$:单元 K 上直到 $k-2$ 阶的矩量,

$$\chi_K(v)=|K|^{-1}(m_K,v)_K,\quad m_K\in\mathbb{M}_{k-2}(K).$$

另外,以 $\boldsymbol{\chi}(v)$ 记以上所有自由度形成的列向量.

非协调 VEM 的椭圆投影 $\Pi_k^\nabla:H^1(K)\to\mathbb{P}_k(K),v\mapsto\Pi_k^\nabla v$ 定义如下[4]:

$$\begin{cases}(\nabla\Pi_k^\nabla v,\nabla p)=(\nabla v,\nabla p),\quad p\in\mathbb{P}_k(K),\\ \int_{\partial K}\Pi_k^\nabla v\mathrm{d}s=\int_{\partial K}v\mathrm{d}s.\end{cases}$$

经分部积分可知,椭圆投影可由前面所提自由度唯一确定.

为得后文诸估计,先给出几个常用不等式,见文[10]. 应强调指出,各不等式的隐藏系数仅依赖假设 A1 中的几何参数.

引理 1　成立如下不等式:

(1) Dupont-Scott 定理:对任意的 $v\in H^l(K)$,存在多项式 $q\in\mathbb{P}_{l-1}(K)$ 使得

$$|v-q|_{m,K}\lesssim h_K^{l-m}|v|_{l,K},\quad m\leqslant l.$$

(2) Poincare-Friedrichs 不等式:

$$h_K^{-1}\|v\|_{0,K}\lesssim|v|_{1,K}+h_K^{-1}\left|\int_{\partial K}v\mathrm{d}s\right|,\quad v\in H^1(K).$$

(3) 乘法型迹不等式:

$$\|v\|_{0,\partial K}^2\lesssim\|v\|_{0,K}|v|_{1,K},\quad v\in H^1(K),\quad \bar{v}^{\partial K}=0.$$

(4) 带几何尺度迹不等式:

$$\|v\|_{0,\partial K}\lesssim h_K^{1/2}|v|_{1,K}+h_K^{-1/2}\|v\|_{0,K},\quad v\in H^1(K).$$

2 逆不等式

逆不等式是有限元方法数值分析的重要工具. 在文[9]中,对协调元情形,我们提出一个新的函数分解,将逆不等式的证明归结为调和情形. 下面将其推广至非协调元情形.

引理 2 对任意满足 $\Delta v\in\mathbb{P}_{k-2}(K)$ 的 $v\in H^1(K)$,存在多项式 $p\in\mathbb{P}_k(K)$,使得 $\Delta p=\Delta v$ 且

$$|p|_{1,K}\lesssim h_K\|\Delta v\|_{0,K}\lesssim |v|_{1,K},\qquad |p|_{1,K}\lesssim h_K^{-1}\|v\|_{0,K},\tag{1}$$

$$\|p\|_{0,K}\lesssim\|v\|_{0,K}.\tag{2}$$

证明 类似文献[11]中 Lemma 3.5 的证明,存在多项式 $p\in\mathbb{P}_k(K)$,使得 $\Delta p=\Delta v$ 且成立第一个估计. 由文献[8]中 Lemma 3.1 关于多项式的逆不等式知 $\|\Delta v\|_{0,K}\lesssim h_K^{-2}\|v\|_{0,K}$,于是成立第二个不等式. 剩下的是证明第三个不等式. 令 $p_1=p-\bar{p}^K$,一方面显然有

$$\Delta p_1=\Delta p=\Delta v,\quad |p_1|_{1,K}=|p|_{1,K}\lesssim h_K^{-1}\|v\|_{0,K}.$$

另一方面,由 Poincare-Friedrichs 不等式和已证的第二个不等式,有

$$\|p_1\|_{0,K}\lesssim h_K|v|_{1,K}\lesssim\|v\|_{0,K},$$

此 p_1 即为所求. 证毕.

定理 1 成立逆不等式

$$|v|_{1,K}\lesssim h_K^{-1}\|v\|_{0,K},\quad v\in V_k(K).\tag{3}$$

证明 对 $v\in V_k(K)$,设 $p\in\mathbb{P}_k(K)$ 是由引理 2 给定的多项式. 考虑函数分解 $v=(v-p)+p$. 由引理 2, $|p|_{1,K}\lesssim h_K^{-1}\|v\|_{0,K}$. 故使用三角不等式和(2),只需再证明

$$|v-p|_{1,K}\lesssim h_K^{-1}\|v-p\|_{0,K}.$$

换言之,在逆不等式(3)中,不妨设在 K 上 $\Delta v=0$,即讨论 $w=v-p$ 时逆不等式(3)是否成立即可.

由分部积分公式及 Cauchy-Schwarz 不等式,得

$$|w|_{1,K}^2=|w-\bar{w}^K|_{1,K}^2=(w-\bar{w}^K,\partial_n w)_{\partial K}\leqslant\|w-\bar{w}^K\|_{0,\partial K}\|\partial_n w\|_{0,\partial K}.$$

根据乘法型迹不等式,

$$\|w-\bar{w}^K\|_{0,\partial K}\lesssim\|w-\bar{w}^K\|_{0,K}^{1/2}|w-\bar{w}^K|_{1,K}^{1/2}\leqslant\|w\|_{0,K}^{1/2}|w|_{1,K}^{1/2},$$

从而只要证明

$$\|\partial_n w\|_{0,\partial K}\lesssim h_K^{-1/2}|w|_{1,K}.\tag{4}$$

对给定的 $e\subset\partial K$,设其对应的辅助三角形为 T,e 两个端点对应的 T 的面积坐标函数记为 λ_e^1 和 λ_e^2. 设 $b_e=\lambda_e^1\lambda_e^2$,并令 $\phi_e=b_e\partial_n w|_e$,由泡函数技巧或尺度论证知

$$\|\partial_n w\|_{0,e}^2\lesssim\int_e\partial_n w\phi_e\,\mathrm{d}s.$$

因$\partial_n w|_e$ 是多项式,将其沿着 e 的法向量方向常延拓到 T 上. 记延拓后的函数为 $E_T(\partial_n w|_e)$,并令 $\phi=b_eE_T(\partial_n w|_e)$. 注意到 $\Delta w=0$,由分部积分和多项式的逆估计得

$$\|\partial_n w\|_{0,e}^2\lesssim\int_e\partial_n w\phi_e\,\mathrm{d}s=\int_{\partial T}\partial_n w\phi\,\mathrm{d}s=(\nabla w,\nabla\phi)_T\leqslant|w|_{1,T}|\phi|_{1,T}\lesssim h_T^{-1}|w|_{1,T}\|\phi\|_{0,T}.$$

利用多项式的逆估计,并注意到常延拓,有

$$\|\phi\|_{0,T}=\|b_eE_T(\partial_n w|_e)\|_{0,T}\leqslant\|E_T(\partial_n w|_e)\|_{0,T}\lesssim h_T\|E_T(\partial_n w|_e)\|_{\infty,T}=h_T\|\partial_n w\|_{\infty,e}\lesssim h_T^{1/2}\|\partial_n w\|_{0,e},$$

由此即得(4). 证毕.

事实上,不等式(4)对非调和的 $v\in V_k(K)$ 也成立.

推论 1 成立估计

$$\|\partial_n v\|_{0,\partial K}\lesssim h_K^{-1/2}|v|_{1,K},\quad v\in V_k(K).\tag{5}$$

证明 根据定理 1 的证明,只要再证明 $\|\partial_n p\|_{0,\partial K}\lesssim h_K^{-1/2}|v|_{1,K}$,式中的 p 由引理 2 给定. 而使用迹不等式和多项式的逆不等式可得

$$\|\partial_n p\|_{0,\partial K}\lesssim h_K^{-1/2}\|\nabla p\|_{0,K}+h_K^{1/2}|\nabla p|_{1,K}\lesssim h_K^{-1/2}\|\nabla p\|_{0,K}=h_K^{-1/2}|p|_{1,K}\lesssim h_K^{-1/2}|v|_{1,K},$$

最后一步用到引理 2 的第一式. 结果得证.

3 范数等价性和插值误差估计

利用逆不等式可证明如下的范数等价性.

定理 2 对 $v\in V_k(K)$,成立

$$h_K^{-1}\|v\|_{0,K}\simeq\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2},\tag{6}$$

$$|v-\Pi_k^{\nabla}v|_{1,K}\simeq\|\boldsymbol{\chi}(v-\Pi_k^{\nabla}v)\|_{l^2}.\tag{7}$$

证明 分为四步.

步 1:建立 l^2-L^2 估计

$$\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}\lesssim h_K^{-1}\|v\|_{0,K},v\in V_k(K).$$

对边界矩量,由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$||e|^{-1}(m_e,v)_e|\leqslant|e|^{-1}\|m_e\|_{0,e}\|v\|_{0,e}\lesssim h_K^{-1/2}\|v\|_{0,e}.$$

使用迹不等式和前面已建立的逆不等式,有

$$\|v\|_{0,e}\leqslant\|v\|_{0,\partial K}\lesssim h_K^{-1/2}\|v\|_{0,K}+h_K^{1/2}|v|_{1,K}\lesssim h_K^{-1/2}\|v\|_{0,K}.$$

于是

$$||e|^{-1}(m_e,v)_e|\lesssim h_K^{-1/2}\|v\|_{0,K}.$$

对内部矩量,直接估计有

$$||K|^{-1}(m_K,v)_K|\leqslant|K|^{-1}\|m_K\|_{0,K}\|v\|_{0,K}\lesssim h_K^{-1}\|v\|_{0,K}.$$

步 2:建立自由度型的逆不等式

$$|v|_{1,K}\lesssim\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2},v\in V_k(K).\tag{8}$$

分部积分有

$$|v|_{1,K}^2=-(v,\Delta v)_K+(v,\partial_n v)_{\partial K}.$$

对第一项,令 $g=-\Delta v=\sum_\alpha g_\alpha m_\alpha$,并记 $\boldsymbol{g}=(g_\alpha)$. 根据 Cauchy-Schwarz 不等式和文[8]中 Lemma 4.1 关于函数 g 的范数等价性结果,可知

$$|(g,v)_K|=||K|\sum_\alpha g_\alpha\chi_\alpha(v)|\lesssim h_K^2\|\boldsymbol{g}\|_{l^2}\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}\lesssim h_K\|g\|_{0,K}\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}.$$

使用引理 2 的第一个不等式,立得

$$\|g\|_{0,K}=\|\Delta v\|_{0,K}\lesssim h_K^{-1}|v|_{1,K},$$

从而

$$|-(v,\Delta v)_K|=|(g,v)_K|\lesssim|v|_{1,K}\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}.$$

对第二项,令

$$r_e=\partial_n v|_e=\Sigma_\alpha r_e^\alpha m_e^\alpha,\quad \boldsymbol{r}_e=(r_e^\alpha).$$

类似有

$$|(r_e,v)_e|=||e|\Sigma_\alpha r_e^\alpha\chi_e^\alpha(v)|\lesssim h_K\|\boldsymbol{r}_e\|_{l^2}\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}\lesssim h_K^{1/2}\|r_e\|_{0,e}\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}.$$

使用推论 1 的不等式得

$$\|r_e\|_{0,e}\leqslant\|\partial_n v\|_{0,\partial K}\lesssim h_K^{-1/2}|v|_{1,K},$$

于是

$$|(v,\partial_n v)_e|=|(r_e,v)_e|\lesssim h_K^{1/2}\|r_e\|_{0,e}\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}\lesssim|v|_{1,K}\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}.$$

联立以上诸式即得(8).

步 3:建立自由度型的 Poincare-Friedrichs 不等式

$$h_K^{-1}\|v\|_{0,K}\lesssim|v|_{1,K}+\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2},\tag{9}$$

结合步 2 的结果得第一式的上界估计. 上式直接由 Poincare-Friedrichs 不等式和自由度的定义获得.

步 4:证明第二式的下界估计. 前三步已证明第一式,以及第二式的上界估计. 对 $v-\Pi_k^{\nabla}v$ 使用 Poincare-Friedrichs 不等式即完成证明.

现在考虑插值误差估计. 设 $I_K:H^1(K)\to V_k(K)$ 为节点插值算子,满足

$$\chi(I_K v)=\chi(v),\quad \chi\in\boldsymbol{X}_k(K),$$

式中,$\boldsymbol{X}_k(K)$ 表示自由度集合.

定理 3 设 $v\in H^{k+1}(K)$,$k\geqslant 0$,则成立如下的最优误差估计

$$\| v-I_K v \|_{0,K}+h_K|v-I_K v|_{1,K}\lesssim h_K^{k+1}|v|_{k+1,K}.$$

证明 根据定理 2 的范数等价性以及插值算子的定义,有

$$\| I_K v \|_{0,K}\simeq h_K \|\boldsymbol{\chi}(I_K v)\|_{l^2}=h_K\|\boldsymbol{\chi}(v)\|_{l^2}. \tag{10}$$

回顾定理 2 步 1 的计算可知,插值算子有如下的 L^2 稳定性

$$\| I_K v \|_{0,K}\lesssim \| v \|_{0,K}+h_K|v|_{1,K}.$$

根据 Dupont-Scott 理论,存在多项式 $p\in\mathbb{P}_k(K)$ 使得

$$|v-p|_{\ell,K}\lesssim h_K^{k+1-\ell}|v|_{k+1,K},\quad v\in H^{k+1}(K),\quad 0\leqslant \ell\leqslant k+1.$$

由三角不等式

$$\| v-I_K v \|_{0,K}\leqslant \| v-p \|_{0,K}+\| I_K(v-p)\|_{0,K}$$

以及已证的稳定性可知

$$\| v-I_K v \|_{0,K}\lesssim h_K^{k+1}|v|_{k+1,K},\quad v\in H^{k+1}(K),\quad k\geqslant 0.$$

类似地,由

$$|v-I_K v|_{1,K}\leqslant |v-p|_{1,K}+|I_K(v-p)|_{1,K}$$

并利用逆不等式

$$|I_K(v-p)|_{1,K}\lesssim h_K^{-1}\| I_K(v-p)\|_{0,K},$$

立得 H^1 半模下的误差估计. 证毕.

[参考文献]

[1] BEIRAO D V L,BREZZI F,CANGIANI A,et al. Basic principles of virtual element methods[J]. Mathematical models and methods in applied sciences,2013,23(1):199-214.

[2] AHMAD B,ALSAEDI A,BREZZI F,et al. Equivalent projectors for virtual element methods[J]. Computational and applied mathematics,2013,66(3),376-391.

[3] BEIRAO D V L,BREZZI F,MARINI L D,et al. The Hitchhiker's guide to the virtual element method[J]. Mathematical models and methods in applied sciences,2014,24(8):1541-1573.

[4] DE DIOS B A,LIPNIKOV K,MANZINI G. The nonconforming virtual element method[J]. Mathematical modelling and numerical analysis,2016,50(3):879-904.

[5] CANGIANI A,MANZINI G,SUTTON O J. Conforming and nonconforming virtual element methods for elliptic problems[J]. IMA journal of numerical analysis,2017,37(3):1317-1354.

[6] BREZZI F,MARINI L D. Virtual element methods for plate bending problems[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering,2013,253:455-462.

[7] CHEN L,HUANG X. Nonconforming virtual element method for 2m-th order partial differential equations in Rn[J]. Mathematics of computation,2020,89(324):1711-1744.

[8] CHEN L,HUANG J. Some error analysis on virtual element methods[J]. A quarterly on numerical analysis and theory of computation,2018,55(1):5,23.

[9] HUANG J,YU Y. A medius error analysis for nonconforming virtual element methods for Poisson and biharmonic equations[J]. Journal of computational and applied mathematics,2021,386:113229,20.

[10] BRENNER S C,SCOTT L R. The mathematical theory of finite element methods[M]. New York:Springer-Verlag,2008.

[11] BEIRAO D V L,LOVADINA C,RUSSO A. Stability analysis for the virtual element method[J]. Mathematical models and methods in applied sciences,2017,27(13):2557-2594.

[责任编辑:陆炳新]