doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2022.01.002

传输密度的 $L^{p,q}$ 估计

陈 平

(江苏第二师范学院数学与信息技术学院,江苏 南京 210013)

[摘要] 研究了与两个概率测度 μ 和 v 之间的最优计划 γ 有关的传输密度 σ_γ 的绝对连续性和 $L^{p,q}$ 可和性. 更确切地说,如果 $\mu \in L^{p,q}$,其中 $1 \leqslant p<+\infty$,$1 \leqslant q<+\infty$ 以及 v 的支撑集合为有限点集,则有 $\sigma_\gamma \in L^{p,q}$. 本文的证明主要利用经由位移内插 μ_t 给出了 σ_γ 的等价定义公式,σ_γ 与 μ_t 的关系不等式,以及对位移内插 μ_t 进行的 $L^{p,q}$ 估计.

[关键词] $L^{p,q}$ 估计,传输密度,位移内插

[中图分类号]O186.14 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2022)01-0008-04

$L^{p,q}$ Estimation of a Transport Density

Chen Ping

(School of Mathematics and Information Technology, Jiangsu Second Normal University, Nanjing 210013, China)

Abstract: The paper presents the absolute continuity and $L^{p,q}$ summability of a transport density σ_γ associated to an optimal transport plan γ between two probability measures μ and v. More precisely, $\sigma_\gamma \in L^{p,q}$ holds if $\mu \in L^{p,q}$ where $1 \leqslant p<+\infty$, $1 \leqslant q<+\infty$ and v has a finite support set. The main methods we used include the equivalent redefinition of σ_γ by displacement interpolations μ_t, the relationship inequality between σ_γ and μ_t, and the $L^{p,q}$ estimation of such interpolations μ_t.

Key words: $L^{p,q}$ estimate, transport density, displacement interpolations

在欧氏空间中,与费用函数为欧氏范数 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 时的最优计划 γ 有关的传输密度 σ_γ,其本质上可以视为欧氏空间 R^d 上的测度. 可以证明作为测度,σ_γ 关于 Lebesgue 测度是绝对连续的,从而其密度函数 $\alpha(x)$: $R^d \to [0,+\infty)$ 存在,此外关于 σ_γ 的正则性也就是 $\alpha(\boldsymbol{x})$ 的正则性的研究可参考文献[1-4]. 在实际应用问题中,传输密度与图像处理有关,还可以用来描述和解决交通拥堵问题,上述研究结果可详见[1,5-6]. 本文主要研究了与费用函数为严格凸范数 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 时的最优计划 γ 有关的传输密度 σ_γ,首先建立了 σ_γ 的等价定义公式以及 σ_γ 与位移内插 μ_t 的关系不等式,然后研究了位移内插 μ_t 的正则性,最后基于上述两个结论得到了 σ_γ 的绝对连续性和 $L^{p,q}$ 正则性,这里 $p \in [1,+\infty)$,$q \in [1,+\infty)$. 由于欧氏范数 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 也是一种严格凸范数,从而,我们的结果推广了[1,2,4]中的关于 σ_γ 的绝对连续性和正则性的结论.

1 预备知识

在这一节中,我们将给出最优运输理论中的有关概念. 本文中,$\|\cdot\|$ 表示 R^d 中的任意严格凸范数,即由该范数定义的单位圆 $\{\boldsymbol{x} \in R^d, \|\boldsymbol{x}\| \leqslant 1\}$ 是 R^d 中的严格凸集. 例如欧氏范数 $|\cdot|$ 是严格凸范数,但 $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 不是严格凸范数.

定义 1[5-6] 设 X 为任意测度空间,对于给定的映射 $T: X \to X$ 以及 $\mu \in P(X)$,$T_{\#}\mu$ 给出了 X 上的一个概率测度,其定义为 $(T_{\#}\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A))$,其中 $A \subset X$ 为任意 Borel 集合.

定义 2[5] 设 $\Omega \subset R^d$ 为紧凸子集,μ, v 为 Ω 上的概率测度,记为 $\mu, v \in P(\Omega)$,对于给定的 $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}): \Omega \times \Omega \to [0,+\infty)$,变分问题

收稿日期:2021-07-12.

基金项目:国家自然科学基金青年项目(11601193)、国家自然科学基金面上项目(12071219).

通讯作者:陈平,博士,副教授,研究方向:最优运输,偏微分方程,几何分析. E-mail:chenping200507@126.com

$$\min_{\gamma\in\pi(\mu,v)}\int_{\Omega\times\Omega}c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{1}$$

的解 γ 称为费用函数为 $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 时的最优计划,其中集合 $\pi(\mu,v)$ 中的元素 γ 称为运输计划,其定义为 $\pi(\mu,v)=\{\gamma\in P(\Omega\times\Omega):(\pi_1)_\#\gamma=\mu,(\pi_2)_\#\gamma=v\}$,这里 $\pi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x},\pi_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}$ 分别为对第一和第二变量的典范投影.

定义 3[5-6]　对于给定的费用函数 $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,称 $\Gamma\subset X\times X$ 为 c-循环单调集合,如果 Γ 中的任意 k 个点对 $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),\cdots,(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_k)$,有不等式 $\sum_{i=1}^{k}c(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_i)\leqslant\sum_{i=1}^{k}c(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_{i+1})$ 成立,其中 $\boldsymbol{y}_{k+1}=\boldsymbol{y}_1$.

引理 1[5-6]　如果费用函数 $c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是下半连续的,且最优费用(1)是有限的,则 γ 是最优运输问题(1)的解当且仅当 γ 集中在 c-循环单调集合 $\Gamma\subset\Omega\times\Omega$ 上,即 $\gamma(\Omega\times\Omega\backslash\Gamma)=0$.

定义 4[3]　设 γ 为费用函数为 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 时的最优计划,则可以如下定义 Ω 上的一个测度 σ_γ:

$$\langle\sigma_\gamma,\varphi\rangle=\int_{\Omega\times\Omega}\int_0^1\varphi(\omega_{\boldsymbol{xy}}(t))\,\|\omega'_{\boldsymbol{xy}}(t)\|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ \forall\varphi\in C(\Omega), \tag{2}$$

其称为由 γ 诱导的传输密度. 其中 $\omega_{\boldsymbol{xy}}(t),t\in[0,1]$ 为连接 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的经由 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 定义的参数化测地线.

定义 5[7]　设 $\mu,v\in P(R^d)$,如果对任意集合 $A\subset R^d$,由 $v(A)=0$ 可得 $\mu(A)=0$,则称测度 μ 关于测度 v 绝对连续,并记为 $\mu\ll v$. 特别地,当 μ 关于 d 维($d\geqslant1$ 为整数)Lebesgue 测度 $\mathcal{L}^d$ 绝对连续时, $f(\boldsymbol{x})=\lim\limits_{r\to0}\sup\dfrac{\mu(B(\boldsymbol{x},r))}{L^d(B(\boldsymbol{x},r))}$ 称为 μ 关于 L^d 的密度函数,记为 $\mu=f\cdot\mathcal{L}^d$. 此外 μ 的正则性即指 f 的正则性,即 $\mu\in L^{p,q}$ 是指 $f\in L^{p,q}$,此外如果 $\|f\|_{L^{p,q}}$ 存在,则称 $\|f\|_{L^{p,q}}$ 为测度 μ 的 $L^{p,q}$ 范数,记为 $\|\mu\|_{L^{p,q}}$.

2　传输密度的 $L^{p,q}$ 正则性

本节我们首先给出传输密度 σ_γ 的一个经由位移内插 μ_t 表示的等价定义公式,然后基于这一等价公式,以及对位移内插 μ_t 的 $L^{p,q}$ 正则性的估计,建立传输密度 σ_γ 的 $L^{p,q}$ 正则性估计不等式. 在本文中 $p\in[1,+\infty)$,$q\in[1,+\infty)$.

我们首先给出 Lorentz 空间及其上 $L^{p,q}$ 拟范数的定义,可以看出 Lorentz 空间是 L^p 空间的推广.

定义 6[2]　$\Omega\subset R^d$ 上的 Lorentz 空间是指由 Ω 上的 $L^{p,q}$ 拟范数有限的全体可测函数,其中 $L^{p,q}$ 拟范数定义为

$$\|f\|_{L^{p,q}}=p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^{+\infty}t^{q-1}(L^d(\{\boldsymbol{x}:|f|\geqslant t\}^{\frac{q}{p}}))\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}},\quad 0<p,q<\infty,$$

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}^p=\sup_{t>0}(t^pL^d(\{\boldsymbol{x}:|f|\geqslant t\})),\qquad 0<p<\infty.$$

由定义可知 $L^{p,1}(\Omega)\subset L^{p,p}(\Omega)=L^p(\Omega)\subset L^{p,\infty}(\Omega)$ 以及如下的 Minkowski 不等式成立:

$$\|f+g\|_{L^{p,q}}\leqslant2^{\frac{1}{q}}\max\{1,2^{\frac{1-q}{q}}\}(\|f\|_{L^{p,q}}+\|g\|_{L^{p,q}}).$$

定理 1　设 γ 费用函数取 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 时的最优计划,则由 γ 诱导的传输密度 σ_γ 可以表示成

$$\sigma_\gamma=\int_0^1(\pi_t)_\#(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\gamma)\mathrm{d}t, \tag{3}$$

该式指 $\langle\sigma_\gamma,\varphi\rangle=\int_0^1\int_\Omega\varphi(z)\mathrm{d}(\pi_t)_\#(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\gamma)(z)\mathrm{d}t,\forall\varphi\in C(\Omega)$. 其中 $\pi_t(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^d$, $t\in[0,1]$. 此外,有下述不等式成立:

$$\sigma_\gamma\leqslant C\int_0^1\mu_t\mathrm{d}t, \tag{4}$$

这里 $C=\max\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|:\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega\}>0$ 为常数,$\mu_t=(\pi_t)_\#\gamma,t\in(0,1)$ 称为由 γ 诱导的从 $\mu_0=\mu$ 到 $\mu_1=v$ 的位移内插.

证明　由 $\|\cdot\|$ 的严格凸性可得式(2)中的 $\omega_{\boldsymbol{xy}}(t)=(1-t)\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{y},t\in[0,1]$ 且 $\|\omega'_{\boldsymbol{xy}}(t)\|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$. 因此对任意的 Borel 集合 $A\subset\Omega$ 及其特征函数 χ_A,由式(2)可得

$$\sigma_\gamma(A)=\sigma_\gamma\chi_A=\int_{\Omega\times\Omega}\int_0^1\chi_A(\omega_{\boldsymbol{xy}}(t))\,\|\omega'_{\boldsymbol{xy}}(t)\|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\int_0^1\int_{\Omega\times\Omega}\chi_A(\omega_{\boldsymbol{xy}}(t))\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^1\int_{\pi_t^{-1}(A)}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}t.$$

另一方面,

$$\int_0^1(\pi_t)_\#(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\gamma)\mathrm{d}t=\int_0^1\int_\Omega\chi_A(z)\mathrm{d}(\pi_t)_\#(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\gamma)(z)\mathrm{d}t=\int_0^1\int_A\mathrm{d}(\pi_t)_\#(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\gamma)(z)\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^1\int_{\pi_t^{-1}(A)}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\,\mathrm{d}\gamma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}t,$$

从而式(3)成立.

最后,由于 Ω 是紧集以及位移内插 μ_t 的定义,再由式(3)可以得到式(4).

接下来我们讨论位移内插 μ_t 的正则性,可参阅[7-9].

定理 2　设 $\mu\ll\mathcal{L}^d$,$v\in P(\Omega)$ 且测度 v 的支撑集合为有限个点组成的集合,γ 为费用函数取 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 时的最优计划,且 $\gamma=(id\times T)_\#\mu$. 则对于任意 $t\in(0,1)$,内插 μ_t 具有绝对连续性质和如下 $L^{p,q}$ 范数估计:

(1) $\mu_t\ll\mathcal{L}^d$.

(2) 如果还有 $\mu\in L^{p,q}$,则 $\mu_t\in L^{p,q}$,且

$$\|\mu_t\|_{L^{p,q}(\Omega)}\leqslant(1-t)^{-\frac{d(p-1)}{p}}\|\mu\|_{L^{p,q}(\Omega)}.\tag{5}$$

证明　由于 $\mu\ll\mathcal{L}^d$,因此由[2]中的定理 1.1 可知 $\gamma=(id\times T)_\#\mu$ 是存在的. 设 $\{y_i\}_{i=1}^k$ 为 v 的支撑集合,$\Omega_i=T^{-1}(\boldsymbol{y}_i)$ 以及 $\Omega_i(t)=\{(1-t)\boldsymbol{x}+tT(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in T^{-1}(\boldsymbol{y}_i),t\in(0,1)\}$,则有 $\mu_t\,(R^d-\bigcup_{i=1}^k\Omega_i(t))=0$.

注意到利用反证法可以证明 $\Omega_i(t)\cap\Omega_j(t)=\varnothing$, $\forall\, i\neq j$. 事实上,假设该结论不成立,即存在 $\boldsymbol{x}\in\Omega_i(t)\cap\Omega_j(t)$,不妨设 $\boldsymbol{x}_i\in\Omega_i$,$\boldsymbol{x}_j\in\Omega_j$,则有 $\boldsymbol{x}=(1-t)\boldsymbol{x}_i+t\boldsymbol{y}_i=(1-t)\boldsymbol{x}_j+t\boldsymbol{y}_j$,再由 $\|\cdot\|$ 的严格凸性可得:

$$\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_j\|+\|\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{y}_i\|\leqslant\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_j\|+\|\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_i\|=\|\boldsymbol{x}_i-(1-t)\boldsymbol{x}_i-t\boldsymbol{y}_i\|+$$

$$\|(1-t)\boldsymbol{x}_j+t\boldsymbol{y}_j-\boldsymbol{y}_j\|+\|\boldsymbol{x}_j-(1-t)\boldsymbol{x}_j-t\boldsymbol{y}_j\|+\|(1-t)\boldsymbol{x}_i+t\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{y}_i\|=\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i\|+\|\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{y}_j\|.$$

该式与 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$-循环单调性(见定义 3 及引理 1)矛盾,从而结论得证.

由 $\Omega_i(t)\cap\Omega_j(t)=\varnothing$ 以及 $\mu\ll\mathcal{L}^d$ 可得,对任意满足 $\mathcal{L}^d(A)=0$ 的集合 $A\subset R^d$,有

$$\mathcal{L}^d\left(\bigcup_{i=1}^k\frac{A\cap\Omega_i(t)}{1-t}\right)\leqslant\frac{\mathcal{L}^d(A)}{(1-t)^d}=0,$$

从而 $\mu_t(A)=\mu_t\,(A\cap\bigcup_{i=1}^k\Omega_i(t))=\mu\left(\bigcup_{i=1}^k\frac{A\cap\Omega_i(t)}{1-t}\right)=0$,即 $\mu_t\ll\mathcal{L}^d$.

最后我们进行范数估计,由第一步结论可知 $\mu_t\ll\mathcal{L}^d$,记 f_t, f 分别为 μ_t 和 μ 关于 Lebesgue 测度的密度函数,注意到 $\mu_t=[(1-t)id+tT]_\#\mu$,因此,对于几乎处处的 $z\in\Omega_i(t)$,有如下关系成立

$$f_t|_{\Omega_i(t)}(z)=\frac{f\left(\dfrac{z-t\boldsymbol{y}_i}{1-t}\right)}{(1-t)^d},$$

从而 $\|\mu_t\|_{L^{p,q}(\Omega)}=\|f_t\|_{L^{p,q}(\Omega)}\leqslant(1-t)^{-\frac{d(p-1)}{p}}\|\mu\|_{L^{p,q}(\Omega)}$,更详细的证明可参阅[3-4].

以下我们给出传输密度的正则性结论.

定理 3　设 $\mu\ll\mathcal{L}^d$,$v\in P(\Omega)$ 且测度 v 的支撑集合为有限点集,γ 为费用函数取 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ 时的最优计划,且满足 $\gamma=(id\times T)_\#\mu$,则对于由该最优计划 γ 诱导的传输密度 σ_γ 满足:

(1) $\sigma_\gamma\ll\mathcal{L}^d$.

(2) 如果还有 $\mu\in L^{p,q}(\Omega)$ 且 $p<d/(d-1)$,则 $\sigma_\gamma\in L^{p,q}(\Omega)$.

证明　由式(4)以及定理 2 的第一个结论可知 $\sigma_\gamma\ll\mathcal{L}^d$.

以下我们用记号 $\sigma_\gamma\geqslant t$ 表示 $f\geqslant t$,这里 f 为 σ_γ 关于 $\mathcal{L}^d$ 的密度函数. 仍由式(4)可知

$$\mathcal{L}^d(\{x:\sigma_\gamma\geqslant t\})\leqslant\mathcal{L}^d\left(\left\{x:\int_0^1\mu_t\mathrm{d}t\geqslant\frac{t}{C}\right\}\right).$$

由该不等式,Lorentz 空间中 Minkowski 不等式(见定义 6)以及式(5)可得

$$\|\sigma_\gamma\|_{L^{p,q}(\Omega)} \leqslant C \left\| \int_0^1 \mu_t \mathrm{d}t \right\|_{L^{p,q}(\Omega)} \leqslant C \int_0^1 \|\mu_t\|_{L^{p,q}(\Omega)} \mathrm{d}t = C\|\mu\|_{L^{p,q}(\Omega)} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{d(p-1)}{p}} \mathrm{d}t < +\infty .$$

3　结论

针对以严格凸函数为费用函数时的最优计划所诱导的传输密度,本文给出了它的等价表达式,建立了其与位移内插的关系不等式,这一系列工作的目的是为了进一步证明该传输密度的绝对连续性与正则性. 这些结果将对与形状优化问题的 Monge-Kantorovich 方程的研究产生影响.

[参考文献]

[1] AMBROSIO L. Lectures notes on optimal transport problems[M]. Berlin Heidelberg: Springer Science and Business Media,2003.

[2] DWEIK S. $L^{p,q}$ estimates on the transport density[J]. Communications on pure & applied analysis,2019,18(6):3001-3009.

[3] DWEIK S,SANTAMBROGIO F. L^p bounds for boundary-to-boundary transport densities,and $W^{1,p}$ bounds for the BV least gradient problem in 2D[J]. Calculus of variations and partial differential equations,2019,58:1-18.

[4] SANTAMBROGIO F. Absolute continuity and summability of optimal transfort densities:simpler proofs and new estimates[J]. Calculus of variations and partial differential equations,2009,36(3):343-354.

[5] SANTAMBROGIO F. Optimal transport for applied mathematicians:calculus of variations,PDEs,and modeling[M]. Switzerland:Birkäuser,2015.

[6] VILLANI C. Optimal transport,old and new[M]. New York:Springer Science and Business Media,2008.

[7] CHAMPION T,DE PASCALE L. The Monge problem for strictly convex norms in R^d[J]. Journal of the European Mathematical Society,2010,12:1355-1369.

[8] 陈平. Heisenberg 群上内插的 L^∞ 范数估计[J]. 南京师大学报(自然科学版),2020,43(2):12-15.

[9] CHEN P,JIANG F D,YANG X P. Optimal transportation in R^n for a distance cost with a convex constraint[J]. Zeitschrift für angewandte mathematik und physik,2015(66):587-606.

[责任编辑:陆炳新]