

# 危险品车辆路径规划的双目标模型与算法研究

沈 良<sup>1</sup>, 吴 婷<sup>2</sup>, 覃朝晖<sup>1</sup>, 冯 雨<sup>3</sup>, 邵 虎<sup>4</sup>, 邵 枫<sup>4</sup>

(1.徐州医科大学管理学院, 江苏 徐州 221116)

(2.南京大学数学系, 江苏 南京 210093)

(3.中国煤炭运销协会, 北京 100013)

(4.中国矿业大学数学学院, 江苏 徐州 221116)

**[摘要]** 本文在交通流量、行程时间、受影响的人数等不确定条件下,研究了危险品运输车辆的可靠性和安全性双目标路径规划模型.对于可靠性目标,考虑了路段的随机通行时间、路口等待时间以及路段和路口通行时间相关性的3个因素的可靠路径搜索问题.对于安全性目标,不仅考虑危险品运输车辆所经过路段附近受影响的人数,还考虑了事故发生后该路段上的车辆中受影响的人数以及其相关性.由于目标函数的不可加性,本文提出了一个新的基于不等式放缩技巧和K短路算法的启发式算法,对双目标函数进行求解,节约了计算量,并给出了搜索非支配解(non-dominated solution)的方法.数值算例的结果说明与传统的模型相比,若忽略信号交叉口的随机延迟和相关性会导致寻找可靠最短路径和最优安全路径的结果存在偏差,导致路径选择不准确,有可能造成严重的经济损失和环境危害.最后,通过数值演示了该算法在现实道路交通网络中的潜在应用前景.

**[关键词]** 交通工程,安全可靠路径,K短路算法,不等式技巧,危险品运输车辆,随机交通网络

**[中图分类号]** U268.6 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2022)02-0081-10

## Bi-objective Path Finding Problem for Hazardous Materials Transportation Vehicles

Shen Liang<sup>1</sup>, Wu Ting<sup>2</sup>, Qin Zhaohui<sup>1</sup>, Feng Yu<sup>3</sup>, Shao Hu<sup>4</sup>, Shao Feng<sup>4</sup>

(1.School of Management, Xuzhou Medical University, Xuzhou 221116, China)

(2.Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

(3.China Coal Transportation and Marketing Association, Beijing 100013, China)

(4.School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

**Abstract:** This paper investigates the bi-objective path finding problem with simultaneous consideration of the reliability and safety issues for hazardous materials transportation vehicles in stochastic networks. Regarding the reliability issue, the stochastic link travel time (SLTT), the delays at intersections and traffic signals (DITS) and the correlations between SLTT and DITS are considered in reliable path finding problem. To address the safety issue, the number of people possibly affected around each link (PPAAL), the number of people possibly affected while using each link (PPAUL) and the correlations between PPAAL and PPAUL are considered in safe path finding problem. Due to the non-additive properties of the reliability and safety measures, this paper proposes a heuristic algorithm to solve the proposed multi-objective model using the mathematical deductions of inequalities and K-shortest algorithm. The proposed algorithm is designed to save the computational time and obtain the non-dominated solutions of the proposed model. Compared with the traditional model, the results of numerical example showed that ignoring the DITS and correlations may lead to basis results in finding the reliable shortest path and the safest path. Such basis results may cause serious economic loss and environmental harm. Finally, we demonstrate the performance of the proposed algorithm in real road traffic network by numerical simulation.

**Key words:** traffic engineering, safe and reliable path, K-shortest algorithm, inequality technique, hazardous materials transportation vehicles, stochastic traffic networks

收稿日期: 2021-09-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71671184、72071202、71971108)、江苏省高校哲学社会科学研究一般项目(2021SJA1079)、江苏省“六大人才高峰”高层次人才项目(XNYQC-001)、徐州医科大学科研启动基金项目(D2019046).

通讯作者: 吴婷, 博士, 副教授, 研究方向: 交通网络建模研究. E-mail: tingwu@nju.edu.cn

随着城市化进程的不断发展,我国对于危险品的需求也逐渐增加,这就导致危险品运输的市场需求变得旺盛.需要指出的是危险物品具有易爆性、有毒性、传染性、腐蚀性和其他危险的特点,一旦在运输过程中出现交通事故导致危险品的泄露,往往容易造成人员伤亡、财产损失、环境污染等.据估计,每年全世界有 40 亿 t 危险材料被运输.中国每年通过公路运输的危险品超过 10 亿 t,全国约有 1.16 万家企业,约 3 200 万人参与,从事道路危险品运输的车辆超过 36 万辆<sup>[1]</sup>.对于承运企业而言,行程时间和运输风险是两个非常重要的考虑因素.从行程时间的角度看,承运企业希望尽可能地在较短的时间内完成运输任务,降低企业的成本,这种情况下可能会选择经过城区中心的短距离的运输路线,此时就会使得较多的人口面临潜在的风险.从运输风险的角度看,承运企业希望尽可能地降低运输风险,这种情况下可能会选择距离较长的郊区道路进行运输,此时就会使得行程时间变长,增加企业的运输成本.因此,如何更好地平衡这两个因素之间的关系是一个非常值得研究的问题.

对于危险品运输车辆的行程时间,可以看成是危险品运输车辆的路径优化问题,此问题已经引起了各国政府和主管部门的广泛关注,许多学者从不同的方面进行了研究<sup>[2-3]</sup>.如 Joy<sup>[4]</sup>在危险品运输中运用最短路径算法进行了一些实证研究. Hall<sup>[5]</sup>研究了在出行时间具有随机性和时变性的网络中的最优路径问题. Toumazis 等<sup>[6]</sup>提出了一种基于条件风险值测度的车辆交通网络的危险品路径优化方法. Wei 等<sup>[7]</sup>在运输风险为时变模糊随机变量的假设下,研究了危险品运输的位置调度问题,并给出了车辆的最优出发时间. Fu 等<sup>[8]</sup>在随机的动态交通网络条件下,提出了一种基于  $K$  最短路径算法的启发式算法用来求解动态随机最短路径问题. Chang 等<sup>[9]</sup>在此基础上,将此问题推广到多准则路径优化问题上,并给出详细的应用.但是上述的研究都没有考虑到危险品车辆运输的行程时间可靠性<sup>[10-11]</sup>.代存杰等以行程时间和运输风险的随机属性值为优化准则,建立了整数规划模型,考虑了不确定条件下的危险品运输车辆的可靠路径和运输风险<sup>[12]</sup>.然而,该研究中并没有考虑到危险品运输车辆在交通信号交叉口的等待时间以及路口和路段之间的时间相关性.

对于危险品运输车辆的运输风险,其目的是评估事故的可能性和事故后果的严重程度,以寻求最低事故率和最少的损失<sup>[13]</sup>.在现实的交通运输网络中,关于危险品运输车辆路径属性值的相关数据的收集和采集的难度是非常大的,如发生意外时受影响的人数和受影响的车辆数、危险品运输车辆的行驶时间等都具有很强的随机性(并不是一个确定性的值,即数据的不确定性).在这种情况下,更加需要进行不确定条件下的危险品车辆运输风险的研究,使得结果更加符合实际情况.需要注意的是,目前关于危险品车辆运输风险的计算方式有很多种,其中最为常用的就是危险品运输车辆的传统风险度量模型<sup>[14]</sup>.代存杰等<sup>[12]</sup>在传统风险模型的基础上,将不同路段附近的人口数利用对数正态分布函数进行分段拟合,可得不同路段附近人口的均值和方差,并建立多准则路径优化模型.接着,在此基础上,代存杰等<sup>[15]</sup>建立了基于运输风险的随机机会约束规划模型,并利用分段线性逼近方法将非线性函数转化为线性函数进行求解.需要注意的是,以上的研究中都只是考虑到了路段附近的人口数,并没有考虑路段上行驶的车辆中的人数,当危险品运输车辆发生交通事故后,该路段上车辆中的驾驶员和乘客受到的影响会更严重.

本文拟对随机道路交通网络中危险品运输车辆的可靠路径和安全路径进行研究,建立一个双目标优化模型,考虑到目标函数的不可加性和非线性,采用基于  $K$  短路算法的启发式算法进行模型的求解,利用经典的交通网络算例对模型的准确性和有效性进行验证.

## 1 问题描述与建模

### 1.1 基本符号定义

$G=(N,A)$	表示有向路网,其中 $N$ 表示节点的集合, $A$ 表示路段的集合;
$\Xi$	表示路段和路口之间的相关系数矩阵;
$\rho_{a(i,j),a(s,t)}$	表示路段 $a(i,j)$ 和 $a(s,t)$ 上的受影响人数的相关系数;
$\delta_{a(i,j),k}^{rs}$	表示决策变量,若路段 $a(i,j)$ 在路径 $k$ 上,那么 $\delta_{a(i,j),k}^{rs}=1$ ,否则 $\delta_{a(i,j),k}^{rs}=0$ ;
$\hat{\mu}_k$ 和 $\hat{\sigma}_k$	表示路径 $k$ 上出行时间的均值和方差;
$\hat{\mu}_{a(i,j)}$ 和 $\hat{\sigma}_{a(i,j)}$	表示 $\ln(\beta_{a(i,j)})$ 的位置标量和尺度标量;

$M_k$ 和 $D_k$	表示路径 $k$ 的近似对数正态分布的一阶原点矩和二阶中心矩;
$\bar{M}_k$ 和 $\bar{D}_k$	表示路径 $k$ 上路口等待时间近似对数正态分布的一阶原点矩和二阶中心矩;
$R_k$	表示危险品运输车辆路径 $k$ 上总的运输风险;
$\tilde{\mu}_k$ 和 $\tilde{\sigma}_k$	表示路径 $k$ 上的所有路口等待时间的均值和方差;
$t_k^{rs}$ 和 $\mu_k^{rs}$	表示 OD 对 $rs$ 中的路径 $k$ 的有效出行时间和对应的均值;
$P_{a(i,j)}$	表示两个节点 $i$ 和 $j$ 之间的位置关系的变量;
$\gamma_{a(i,j)}$	表示事故发生后路段 $a_{(i,j)}$ 附近受到影响的居民数量;
$v_{a(i,j)}$	表示事故发生后路段 $a_{(i,j)}$ 上的车辆中受影响人数;
$\Phi^{-1}(\theta)$	表示置信水平 $\theta$ 下路径通行时间的标准正态分布的逆累积分布函数(CDF);
$p_{a(i,j)}$	表示危险品运输车辆路段 $a_{(i,j)}$ 上发生事故的概率;
$\mu_{a(i,j)}^R$ 和 $\sigma_{a(i,j)}^R$	表示附近居民 $\ln(\gamma_{a(i,j)})$ 的均值和方差;
$\bar{\mu}_k$ 和 $\bar{\sigma}_k$	表示路径 $k$ 上运输风险的均值和方差;
$\hat{M}_k$ 和 $\hat{D}_k$	表示路径 $k$ 上的运输风险的近似对数正态分布的一阶原点矩和二阶中心矩;
$\mu_{a(i,j)}^v$ 和 $\sigma_{a(i,j)}^v$	表示车流量 $\ln(v_{a(i,j)})$ 的均值和方差;
$\tilde{\sigma}(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)})$	表示 $\ln(\kappa_{a(i,j), a(j,l)})$ 尺度标量;
$\tilde{\mu}(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)})$	表示 $\ln(\kappa_{a(i,j), a(j,l)})$ 位置标量;
$\varepsilon_k^{rs}$	表示安全边际值;
$l_{a(i,j)}$	表示路段 $a_{(i,j)}$ 的长度;
$\beta_{a(i,j)}$	表示路段 $a_{(i,j)}$ 上的出行时间;
$\psi_{ijl}$	表示危险品车辆在节点 $j$ 处的转向;
$f_{R_k}$	表示路径 $k$ 上的有效风险值;
$\kappa_{a(i,j), a(j,l)}$	表示运输车辆在路口 $j$ 的等待时间;
$T_k^{rs}$	表示路径 $k$ 上的有效出行时间.

## 1.2 可靠路径定义

根据前人的研究,可以发现出行者都是将道路交通网络中的平均出行时间看作是选择某条路径的准则,即将平均出行时间最短的路径确定为最优路径. 然而在实际的交通网络中,由于受到供给和需求不确定性因素等原因的影响,危险品运输车辆的行程时间都是一个随机变量<sup>[16-17]</sup>. 在随机性的条件下,如果所有危险品运输车辆的驾驶员将平均出行时间当做是选择最优路径的标准,那么该危险品运输车辆并不一定能够非常准时地到达目的地. 在这种情况下,根据 Asakura 等<sup>[18]</sup>论文中关于出行时间可靠性的定义,可以发现该定义是用来描述车辆能够准时到达目的地的概率. 也就是说危险品运输车辆在进行路径决策的时候,需要考虑的不单单是较短的出行时间,还需要将较高的出行时间可靠性考虑到决策中. 此外,根据 Zhu 等<sup>[19]</sup>和 Shen 等<sup>[20]</sup>的研究结果,本文假设危险品运输车辆在道路上的出行时间服从对数正态分布,据此可得路径  $k$  的出行时间的均值  $\hat{\mu}_k$  和方差  $\hat{\sigma}_k^2$ ,分别为式(1)、(2)、(3)和(4).

$$M_k = \sum_{a(i,j) \in k} \exp(\hat{\mu}_{a(i,j)} + 0.5\hat{\sigma}_{a(i,j)}^2) \delta_{a(i,j),k}^{rs}, \quad (1)$$

$$D_k = \sum_{a(i,j), a(m,n) \in k} \text{cov}(t_{a(i,j)}, t_{a(m,n)}) \delta_{a(i,j),k}^{rs} \delta_{a(m,n),k}^{rs} =$$

$$\sum_{a(i,j) \in k} \exp(2\hat{\mu}_{a(i,j)} + \hat{\sigma}_{a(i,j)}^2) (\exp(\hat{\sigma}_{a(i,j)}^2) - 1) \delta_{a(i,j),k}^{rs} + \sum_{a(i,j), a(m,n) \in k} \delta_{a(i,j),k}^{rs} \delta_{a(m,n),k}^{rs} \Xi_{LN, a(i,j), a(m,n)} \times$$

$$\sqrt{\exp(2\hat{\mu}_{a(i,j)} + \hat{\sigma}_{a(i,j)}^2) (\exp(\hat{\sigma}_{a(i,j)}^2) - 1) \exp(2\hat{\mu}_{a(m,n)} + \hat{\sigma}_{a(m,n)}^2) (\exp(\hat{\sigma}_{a(m,n)}^2) - 1)}, \quad (2)$$

$$\hat{\sigma}_k = \sqrt{LN(1 + \frac{D_k}{M_k^2})}, \quad (3)$$

$$\hat{\mu}_k = LN(M_k) - 0.5\hat{\sigma}_k^2. \quad (4)$$

需要注意的是,根据 Sun 等<sup>[21]</sup>和 Yu 等<sup>[22-23]</sup>关于随机道路交通网络中的交通信号灯的研究,可以发

现若不考虑车辆在红绿灯路口的等待时间,会使得求解出的结果与实际情况存在较大偏差. 因此,需要将出行时间的不确定性、车辆在交通信号灯路口的等待时间以及不同路段之间的相关性等因素考虑到路径优化模型中,并进行深入的研究. 那么,运输车辆在路口的等待时间参考 Shen 等<sup>[20]</sup>的模型,可以得到路径  $k$  上的所有路口等待时间的均值和方差,分别为式(5)、(6)、(7)和(8).

$$\bar{M}_k = \sum_{a(i,j), a(j,l) \in k} \exp(\tilde{\mu}(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)}) + 0.5\tilde{\sigma}^2(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)})) \delta_{a(i,j),k}^{rs} \delta_{a(j,l),k}^{rs}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \bar{D} = & \sum_{a(i,j), a(j,l), a(m,n), a(n,q)} cov(\tilde{t}_{a(i,j), a(j,l)}, \tilde{t}_{a(m,n), a(n,q)}) \delta_{a(i,j),k}^{rs} \delta_{a(j,l),k}^{rs} \delta_{a(m,n),k}^{rs} \delta_{a(n,q),k}^{rs} = \sum_{a(i,j), a(j,l) \in k} \exp(2\tilde{\mu}(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)}) + \\ & \tilde{\sigma}^2(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)})) \times (\exp(\tilde{\sigma}^2(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)})) - 1) \delta_{a(i,j),k}^{rs} \delta_{a(j,l),k}^{rs} + \\ & \sum_{a(i,j), a(j,l), a(m,n), a(n,q) \in k} \delta_{a(i,j),k}^{rs} \delta_{a(j,l),k}^{rs} \delta_{a(m,n),k}^{rs} \delta_{a(n,q),k}^{rs} \Xi_{LN, (P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)} + \omega + 3(j-1), P_{a(m,n)} \otimes P_{a(n,q)} + \omega + 3(n-1))} \times \\ & \{ \exp(2\tilde{\mu}(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)}) + \tilde{\sigma}^2(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)})) (\exp(\tilde{\sigma}^2(j, P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)})) - 1) \times \\ & \exp(2\tilde{\mu}(n, P_{a(m,n)} \otimes P_{a(n,q)}) + \tilde{\sigma}^2(n, P_{a(m,n)} \otimes P_{a(n,q)})) (\exp(\tilde{\sigma}^2(n, P_{a(m,n)} \otimes P_{a(n,q)})) - 1) \}^{\frac{1}{2}}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_k = \sqrt{LN(1 + \frac{\bar{D}_k}{\bar{M}_k^2})}, \quad (7)$$

$$\tilde{\mu}_k = LN(\bar{M}_k) - 0.5\tilde{\sigma}_k^2. \quad (8)$$

式中,  $P_{a(i,j)}$  表示的是关于两个节点  $i$  和  $j$  之间的位置关系的变量.  $P_{a(i,j)} = 1, -1, 2, -2$  分别表示点  $i$  在点  $j$  的上方、下方、左方和右方(点  $i$  和点  $j$  之间存在可行路段). 本文采用  $\psi_{ijl} = P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)}$  表示危险品运输车辆在节点  $j$  处的转向(即通过路段  $a(i,j)$  和  $a(j,l)$ , 包含左转、直行和右转), 具体的计算过程见式(9), 可以发现  $\psi_{ijl} = 1$  表示车辆在节点  $j$  处左转,  $\psi_{ijl} = 2$  表示车辆在节点  $j$  处直行,  $\psi_{ijl} = 3$  表示车辆在节点  $j$  处右转.

$$\begin{aligned} \psi_{ijl} = & P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)} = \\ & \begin{cases} 1 & \text{if } P_{a(i,j)} = 1, P_{a(j,l)} = 2 \text{ or } P_{a(i,j)} = -1, P_{a(j,l)} = -2 \text{ or } P_{a(i,j)} = 2, P_{a(j,l)} = -1 \text{ or } P_{a(i,j)} = -2, P_{a(j,l)} = 1 \\ 2 & \text{if } P_{a(i,j)} = P_{a(j,l)} = -1, -2, 1, 2 \\ 3 & \text{if } P_{a(i,j)} = 1, P_{a(j,l)} = -2 \text{ or } P_{a(i,j)} = -1, P_{a(j,l)} = 2 \text{ or } P_{a(i,j)} = 2, P_{a(j,l)} = 1 \text{ or } P_{a(i,j)} = -2, P_{a(j,l)} = -1 \end{cases}, \quad (9) \end{aligned}$$

为了说明车辆在路口转弯的方向, 本文只给出一个示意图来描述右转, 同理可得左转和直行. 如图 1 所示, 共有 3 个节点, 分别为始点 1、路口节点 2 和终点 3. 可以发现, 始点 1 在路口节点的左边, 故  $P_{a(1,2)} = 2$ , 中间节点 2 在终点 3 的上方, 故  $P_{a(2,3)} = 1$ , 即  $\psi_{123} = 2 \otimes 1$ . 此时根据等式(9)中的描述, 可以发现车辆在节点 2 处的转弯方向为右转(见图 1).

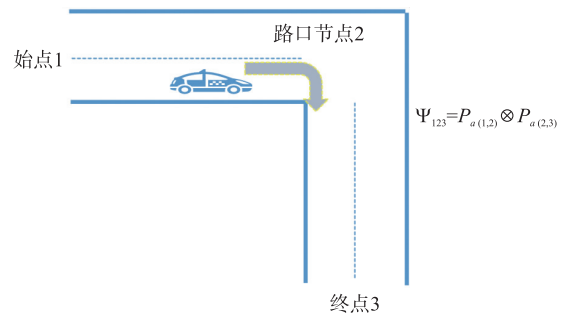


图 1 节点 2 处的右转示意图

Fig. 1 Turn right at intersection node 2

然后, 根据 Hall<sup>[24]</sup>文献中采用的有效出行时间模型, 本文中的危险品运输车辆在 OD 对  $rs$  中的路径  $k$  的有效出行时间  $t_k^{rs}$  表示为均值  $\mu_k^{rs}$  和安全边际值  $\varepsilon_k^{rs}$  的和.

$$t_k^{rs} = \mu_k^{rs} + \varepsilon_k^{rs}, \quad (10)$$

需要注意的是, 安全边际值  $\varepsilon_k^{rs}$  是通过如下的机会约束模型得到:

$$\min_{\varepsilon_k^{rs}} t_k^{rs} = \mu_k^{rs} + \varepsilon_k^{rs}, \quad (11)$$

$$\text{s.t. } \Pr[T_k^{rs} \leq t_k^{rs}] \geq \theta,$$

式中,  $\theta$  表示的是给定的置信水平. 接着, 可以将等式(11)进行变形, 得到有效出行时间模型:

$$t_k^{rs} = \mu_k^{rs} + \Phi^{-1}(\theta) \sigma_k^{rs}. \quad (12)$$

上述给出的有效出行时间模型可以保证在最小化出行时间的同时使得出行时间的可靠性不小于给定的置信水平  $\theta$ . 接着, 给出最优可靠路径的定义:

**定义 1** 在 OD 对  $rs$  的所有可行路径中, 将具有最小有效出行时间的路径看作是最优可靠路径, 即路

径  $k_r^*$  看做是最优可靠路径,当且仅当  $k_r^* = \arg \min T_k^{rs}$ .

### 1.3 安全路径定义

关于危险品运输车辆的风险度量模型有很多,其中最为常用的是传统的风险度量模型<sup>[13-15]</sup>,具体形式如下:

$$r_{a(i,j)} = p_{a(i,j)} \gamma_{a(i,j)}. \quad (13)$$

通常取  $p_{a(i,j)} = l_{a(i,j)} \times 10^{-6}$ . 需要注意的是,当事故发生后,不仅路段附近的居民会受到影响,路段上的车辆中的人也会受到影响,并且车辆中的人受到的影响会比附近的居民受到的影响更大. 考虑到受影响的车辆中的人数与路段上的车流量是相关的,因此可以通过交通配流模型<sup>[25-26]</sup>得到不同路段上的车流量,进而进行运算. 据此,给出如下新的风险分析模型:

$$r_{a(i,j)} = p_{a(i,j)} (\gamma_{a(i,j)} + v_{a(i,j)}). \quad (14)$$

由于交通网络中不同路段上的人口密度具有差异性和不确定性,本文中假设变量  $\gamma_{a(i,j)}$  是服从对数正态分布的随机数<sup>[8,12]</sup>,可得受影响的总人数的计算公式如下:

$$\gamma_{a(i,j)} + v_{a(i,j)} = \exp(\mu_{a(i,j)}^R + k_1 \mu_{a(i,j)}^v + 0.5(\sigma_{a(i,j)}^R + k_2 \sigma_{a(i,j)}^v)). \quad (15)$$

据此,可得危险品运输车辆在路径  $k$  上总的运输风险  $R_k$  为:

$$R_k = \sum_{a(i,j) \in k} r_{a(i,j)} \delta_{a(i,j),k}^{rs}. \quad (16)$$

通过以上的讨论,发现  $\gamma_{a(i,j)}$  是一个随机变量,那么可得  $R_k$  也是一个随机变量,为了控制运输风险的大小,建立了一个随机机会约束规划模型<sup>[12]</sup>,给出有效风险值  $f_{R_k}$  的定义,具体如下.

有效风险值由概率约束模型确定:

$$\begin{aligned} f_{R_k} &= \min \tilde{f}_R \\ \text{s.t. } &\Pr\{R_k \leq \tilde{f}_R\} \geq \beta, \end{aligned} \quad (17)$$

根据概率约束模型确定的风险值  $f_R(x)$  即为满足机会约束的有效风险值. 通过简单的变形,可得对数正态分布下的有效风险值为:

$$f_{R_k} = \min \{\bar{\mu}_k + \varphi^{-1}(\beta) \bar{\sigma}_k\}. \quad (18)$$

式中,  $\varphi^{-1}(\cdot)$  表示的是标准对数正态分布函数的逆函数,需要注意的是,在研究危险品运输车辆的风险评估时<sup>[13-15,27]</sup>,都没有将不同路段上的受影响的人数的相关性考虑其中,Shen 等<sup>[28]</sup>指出不考虑相关性会使得结果产生高估或者低估的可能性,使得计算结果出现偏差,因此本文在此基础上将人口的相关性考虑到模型中,可以得到路径  $k$  上运输风险的均值  $\bar{\mu}_k$  和方差  $\bar{\sigma}_k$ ,分别为式(19)、(20)、(21)和(22).

$$\hat{M}_k = \sum_{a(i,j) \in k} p_{a(i,j)} \exp(\mu_{a(i,j)}^R + \mu_{a(i,j)}^v + 0.5(\sigma_{a(i,j)}^R + \sigma_{a(i,j)}^v)) \delta_{a(i,j),k}^{rs}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_k &= \sum_{a(i,j) \in k} (p_{a(i,j)})^2 (\exp((\sigma_{a(i,j)}^R + \sigma_{a(i,j)}^v)^2) - 1) \exp(2(\mu_{a(i,j)}^R + \mu_{a(i,j)}^v) + (\sigma_{a(i,j)}^R + \sigma_{a(i,j)}^v)^2) \delta_{a(i,j),k}^{rs} + \\ &\sum_{a(i,j), a(s,t) \in k} \rho_{a(i,j), a(s,t)} \{ (p_{a(i,j)})^2 (\exp((\sigma_{a(i,j)}^R + \sigma_{a(i,j)}^v)^2) - 1) \exp(2(\mu_{a(i,j)}^R + \mu_{a(i,j)}^v) + (\sigma_{a(i,j)}^R + \sigma_{a(i,j)}^v)^2) * \\ & (p_{a(s,t)})^2 (\exp((\sigma_{a(s,t)}^R + \sigma_{a(s,t)}^v)^2) - 1) \exp(2(\mu_{a(s,t)}^R + \mu_{a(s,t)}^v) + (\sigma_{a(s,t)}^R + \sigma_{a(s,t)}^v)^2) \}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_k = \sqrt{LN(1 + \frac{\hat{D}_k}{\hat{M}_k^2})}, \quad (21)$$

$$\bar{\mu}_k = LN(\hat{M}_k) - 0.5 \bar{\sigma}_k^2. \quad (22)$$

**定义 2** 针对某个 OD 对中的所有可行路径,将具有最小风险度量值的路径定义为安全路径  $k_s^*$ ,具体的数学表达式如下:

$$k_s^* = \arg \min f_{R_k}. \quad (23)$$

### 1.4 双目标优化模型

根据上述关于可靠路径和安全路径的定义,给出了不确定条件下的危险品运输车辆的双目标优化模型,具体形式如下:



$$\begin{cases} \min T_k^{rs} = \exp\{\hat{\mu}_k + \tilde{\mu}_k + \Phi^{-1}(\theta) \times \{\hat{\sigma}_k^2 + \tilde{\sigma}_k^2 + \\ 2 \sum_{a(i,j), a(m,n), a(n,q) \in k} \delta_{a(i,j),k}^{rs} \delta_{a(m,n),k}^{rs} \delta_{a(n,q),k}^{rs} \Xi_{LN, (a(i,j), P_{a(m,n)} \otimes P_{a(n,q)}) + \omega + 3 * (n-1)} \hat{\sigma}_{a(i,j)} \tilde{\sigma}(n, P_{a(m,n)} \otimes P_{a(n,q)})\}^{\frac{1}{2}}\}, \quad (24) \\ \min f_{R_k} = \bar{\mu}_k + \Phi^{-1}(\theta) \bar{\sigma}_k \end{cases}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a(i,j) \in A} \delta_{a(i,j),k}^{rs} - \sum_{a(j,l) \in A} \delta_{a(j,l),k}^{rs} = \begin{cases} -1 & \forall a(i,j) \notin k, a(j,l) \in k \\ 0 & \forall a(i,j), a(j,l) \in k; \forall a(i,j), a(j,l) \notin k, \\ 1 & \forall a(i,j) \in k, a(j,l) \notin k \end{cases} \quad (25)$$

$$\psi_{ijl} = P_{a(i,j)} \otimes P_{a(j,l)}, \quad (26)$$

$$\delta_{a(i,j),k}^{rs} \in \{0, 1\}, \quad \forall a(i,j) \in A, \quad (27)$$

$$P_{a(i,j)} \in \{-2, -1, 1, 2\}, \quad \forall a(i,j) \in A. \quad (28)$$

在该模型中,式(24)为该优化模型的目标函数,即最优可靠路径和最优安全路径;式(25)保证了路径的可行性;式(26)为运输车辆在路口拐弯方向的确定;式(27)为路段路径关联变量;式(28)表示两个相邻节点的位置关系。

## 2 求解算法设计

根据双目标优化模型中的目标函数(24),可以发现两个目标都是具有不可加性和非线性特点,是经典的 NP 难问题。传统的路径优化算法(如 Dijkstra 算法、Floyd 算法)并不能直接求解本文中提出的优化模型。因此,为了克服该模型的不可加性和非线性特点,本文拟通过采用 K 短路算法和不等式技巧(放缩法)进行模型的求解。首先利用放缩法推导出每条可行路径的有效出行时间和有效风险值的下界。此时,放缩后的下界需要满足可加性。接着,利用 K 短路算法生成一个备选可靠路径集。需要注意的是,该备选可靠路径集合中的路径数量取决于选取的参数“K”的大小(小于等于参数“K”),其中该集合是有界的(因为 K 是有界的)。最后,通过计算备选可靠路径集合中的路径的有效出行时间和有效风险值,可以分别得到最优可靠路径和最优安全路径。通过以上算法的简单描述,本文给出了如下的数学原理和证明。

### 2.1 求解算法的数学原理和证明

**定理 1** 有效出行时间  $T_k^{rs}$  和有效风险值  $f_{R_k}$  满足如下的不等式( $\theta \geq 50\%$ ):

$$T_k^{rs} \geq T_{k,\min}^{rs} = (M_k + \bar{M}_k) \cdot \exp(-0.5\hat{\sigma}_{\max}^2 - 0.5\tilde{\sigma}_{\max}^2), \quad (29)$$

$$f_{R_k} \geq f_{R_k,\min} = LN(\hat{M}_k) - 0.5\bar{\sigma}_{\max}^2, \quad (30)$$

式中,  $\hat{\sigma}_{\max}^2$ ,  $\tilde{\sigma}_{\max}^2$  和  $\bar{\sigma}_{\max}^2$  分别表示所对应的最大标准差。

**证明** 由于  $\theta \geq 50\%$ , 那么可得  $\Phi^{-1}(\theta) \geq 0$ , 根据目标函数(24), 可以得到  $T_k^{rs} \geq \hat{\mu}_k + \tilde{\mu}_k$ , 将式(4)和(8)代入上述不等式, 可得:

$$\begin{aligned} T_k^{rs} &\geq \exp(\hat{\mu}_k + \tilde{\mu}_k) = \exp(LN(M_k) - 0.5\hat{\sigma}_k^2 + LN(\bar{M}_k) - 0.5\tilde{\sigma}_k^2) = (M_k + \bar{M}_k) \cdot \exp(-0.5\hat{\sigma}_k^2 - 0.5\tilde{\sigma}_k^2) \geq \\ &(M_k + \bar{M}_k) \cdot \exp(-0.5\hat{\sigma}_{\max}^2 - 0.5\tilde{\sigma}_{\max}^2). \end{aligned} \quad (31)$$

根据不等式(31), 可以发现  $\hat{\sigma}_{\max}^2$  和  $\tilde{\sigma}_{\max}^2$  是一个确定的值,  $M_k$  和  $\bar{M}_k$  可以根据等式(1)和(5)计算, 因此可以发现此时有效出行时间  $T_k^{rs}$  的下界是满足可加性的, 同理可以证明不等式(30), 此时有效风险值  $f_{R_k}$  的下界也是满足可加性的。证毕。

**定理 2** 最优可靠路径  $k^*$  一定包含在备选路径集合  $Q$  中, 如果路径  $k^*$  满足如下条件:

$$\begin{cases} k^* \in Q, & \text{if } T_{k^*,\min}^{rs} \leq T_{k_i}^{rs} \\ k^* \notin Q, & \text{if } T_{k^*,\min}^{rs} > T_{k_i}^{rs} \end{cases}, \quad (32)$$

式中,  $T_{k_i}^{rs}$  表示具有有效出行时间的下界中的最小值所对应的路径  $k_i$  的有效出行时间。

**证明** 采用反证法。首先假设存在一条路径  $k^*$ , 该路径是 OD 对  $rs$  中所有可行路径中有效出行时间最小的, 并且假设该路径  $k^*$  不存在于备选可靠路径集合  $Q$  中(即  $k^* \notin Q$ )。接下来, 可以发现定理 2 中描述了若  $k^* \notin Q$ , 则:

$$T_{k^*, \min}^{rs} > T_{k_i}^{rs}, \quad (33)$$

根据定理 2 中所描述的内容,发现路径  $k_i$  是所有路径中有效出行时间下界中最小的. 鉴于此,可以得到在所有的可行路径中,一定存在某条路径  $k_j$ , 满足如下的不等式:

$$T_{k_j}^{rs} \leq T_{k_i}^{rs}, \exists k_j \in E, \quad (34)$$

即路径  $k_j$  的有效出行时间小于或者等于路径  $k_i$  的有效出行时间.

接着,根据等式(33)和(34),可得:

$$T_{k_j}^{rs} \leq T_{k_i}^{rs} < T_{k^*, \min}^{rs}, \exists k_j \in E. \quad (35)$$

由于  $T_{k^*, \min}^{rs}$  表示的是路径  $k^*$  的有效出行时间的下界,显然可以得到不等式  $T_{k^*, \min}^{rs} \leq T_{k^*}^{rs}$ .

接着,根据不等式(35),可得:

$$T_{k_j}^{rs} \leq T_{k_i}^{rs} < T_{k^*, \min}^{rs} \leq T_{k^*}^{rs}, \exists k_j \in E, k_j \neq k^*. \quad (36)$$

此时可以发现路径  $k_j$  的有效出行时间小于路径  $k^*$  的有效出行时间. 那么可得路径  $k^*$  并不是当前的最优可靠路径. 据此可发现,得到的结论与前面的假设是相互矛盾的. 因此,可得路径  $k^*$  一定包含在备选可靠路径集合  $Q$  中,定理 2 证毕.

**定理 3** 最优安全路径  $k^{**}$  一定包含在备选路径集合  $Q$  中,如果路径  $k^{**}$  满足如下条件:

$$\begin{cases} k^{**} \in Q, & \text{if } f_{R_{k^{**}, \min}} \leq f_{R_{k_i}} \\ k^{**} \notin Q, & \text{if } f_{R_{k^{**}, \min}} > f_{R_{k_i}} \end{cases}. \quad (37)$$

式中  $f_{R_{k_i}}$  表示具有有效风险值的下界中的最小值所对应的路径  $k_i$  的有效风险值.

**证明** 根据定理 2 中的证明过程,定理 3 也是成立的.

## 2.2 算法的步骤

步骤 1 进行初始化

给定备选路径集合  $Q = \phi$  和  $P = \phi$  ( $Q$  中存放的是可靠路径,  $P$  中存放的是安全路径),接着利用 Dijkstra 算法<sup>[29]</sup>对不等式(29)和(30)的下界进行运算,分别找到具有最小有效出行时间下界和最小有效风险值下界的路径  $k_m$  和  $k_n$ . 进而根据等式(24)分别计算路径  $k_m$  的有效出行时间和路径  $k_n$  的有效风险值,分别记为  $T_{k_m}^{rs}$  和  $f_{R_{k_n}}$ . 并将路径  $k_m$  放入备选路径集合  $Q$  中,路径  $k_n$  放入备选路径集合  $P$  中.

步骤 2 确定备选路径集合  $Q$  中的路径

根据有效出行时间的下界,利用  $K$  短路算法<sup>[28,30]</sup>得到一组以递增顺序排列的路径.

01:对于第  $i^{th}$  短路路径的有效出行时间的下界

02:如果  $T_{k_i, \min}^{rs} \leq T_{k_m}^{rs}$

03:如果  $i < K_{\max}$ ,将路径  $k_i$  放入备选路径集合中  $Q: Q = Q \cup \{k_i\}$  并且  $i = i + 1$

04:然后,跳到步骤 2 开始的地方,否则

05:执行步骤 3,结束

06:否则,执行步骤 3,结束

07:结束

步骤 3 确定备选路径集合  $P$  中的路径

根据有效风险值的下界,利用  $K$  短路算法得到一组以递增顺序排列的路径.

01:对于第  $j^{th}$  短路路径的有效风险值的下界

02:如果  $f_{R_{k_j}, \min} \leq f_{R_{k_n}}$

03:如果  $j < K_{\max}$ ,将路径  $k_j$  放入备选路径集合中  $P: P = P \cup \{k_j\}$  并且  $j = j + 1$

04:跳到步骤 3 开始的地方,否则

05:执行步骤 4,结束

06:否则,执行步骤 4,结束

07:结束

步骤 4 寻找非支配有效解

对于备选路径集合  $Q$  和  $P$  中的所有路径,执行如下操作:

根据等式(24)计算其中具有最小有效出行时间和最小有效风险值的路径,比较可靠路径集合  $Q$  和安全路径集合  $P$ . 路径  $k_p^*$  如果是一个非支配的有效解,则需要满足如下的准则:不存在任意一条路径  $k$  满足不等式  $T_k^{rs} \leq T_{k_p^*}^{rs}$  和  $f_{R_k} \leq f_{R_{k_p^*}}$ ,并且至少存在一条路径  $k_i$  满足不等式  $T_{k_i}^{rs} < T_{k_p^*}^{rs}$  和  $f_{R_{k_i}} < f_{R_{k_p^*}}$ .

注 本文中的算法利用了  $K$  短路算法. 由于  $K$  短路算法具有多项式时间计算复杂度<sup>[30]</sup>,因此本节提出的算法也具有多项式时间复杂度.

3 数值算例

为了验证模型和算法的准确性和有效性,本文中的数值算例采用代存杰<sup>[12]</sup>文章中的路网结构图,具体图形见图 2. 各路段上的行程时间的参数值以及区域内人口数量的分布参数可以参考论文代存杰<sup>[12]</sup>中的数值算例. 需要注意的是本文中还未考虑了事故发生后受影响的路段上车辆中的人数,该人数是根据路段上的车流量来确定的. 根据经典的 BPR(bureau of public roads)函数模型,可以发现路段上的车流量和该路段上的通行时间具有正相关性,因此为了方便计算,在数值算例中通过参数和路段通行时间相乘的方法来近似模拟路段上受影响的人数,函数模型中的参数设置为  $\theta = 0.95$ ,该数值算例是在内存 8GB,CPU 3.00GHz 的台式计算机中,采用 MATLAB2020a 对算法进行编程.

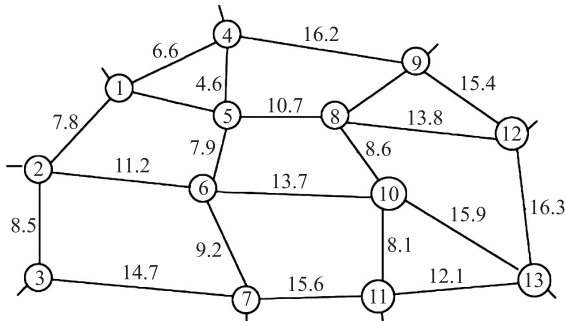


图 2 路网结构图(km)  
Fig. 2 The transportation network(km)

3.1 数值算例的解的分析

为说明本文提出的模型和算法的有效性,我们将本文中的数值算例的结果和代存杰<sup>[12]</sup>中的数值算例的结果进行了比较,结果见表 1. 通过表 1 中的数据,可看出不同路径的有效出行时间和有效风险值均与文献中的结果不同,这是由于本文中的模型考虑了更多的因素,使得结果更加符合实际情况.

表 1 不同路径上的有效出行时间和有效风险值的比较

路径	有效出行时间/h		有效风险值/(10 <sup>-3</sup> 人)	
	本文的结果	代存杰等 <sup>[12]</sup> 中的结果	本文的结果	代存杰等 <sup>[12]</sup> 中的结果
1-5-6-10-13	3.71	3.27	68.69	58.10
1-2-6-10-13	3.52	3.25	73.19	45.20
1-5-8-10-13	3.89	3.27	58.07	47.30
1-5-8-12-13	4.05	3.24	57.10	47.62

为了说明路口等待时间、路段和路口之间的相关性以及路段上的车流量、不同路段附近居民数量之间相关性是如何影响最优可靠路径和最优安全路径,我们给出了表 2 中所示的 4 种情况.

表 2 不同情况下的有效出行时间和有效风险值

Table 2 The effective travel times and effective risk values under different scenarios				
最优可靠路径	是否考虑路口等待时间(h)			
	否		是	
	未考虑路段出行时间之间相关性	考虑路段出行时间之间相关性	未考虑路段出行时间之间相关性	考虑路段出行时间之间相关性
1-2-6-10-13	2.88	3.08	2.94	3.15
最优安全路径	是否考虑路段上的车流量(10 <sup>-3</sup> 人)			
	否		是	
	未考虑路段上居民之间的相关性	考虑路段上居民之间的相关性	未考虑路段上居民之间的相关性	考虑路段上居民之间的相关性
1-5-8-10-11-13	47.9	47.98	52.68	52.78



从表 2 中可以发现,最优可靠路径和最优安全路径并不是同一条,这说明了这两条路径都是该模型的非支配有效解. 对于最优可靠路径,在不考虑路口等待时间和相关性的情况下,路径 1-2-6-10-13 的有效出行时间为 2.88 h,若考虑这些因素,路径 1-2-6-10-13 的有效出行时间为 3.15 h,可以发现路口等待时间和相关性对于有效出行时间影响还是比较大的. 对于最优安全路径,在不考虑路段上的车流量以及相关性的情况下,路径 1-5-8-10-11-13 的有效风险值为  $47.9 \times 10^{-3}$  人,若考虑上述两个因素的话,路径 1-5-8-10-11-13 的有效风险值变为  $52.78 \times 10^{-3}$  人,说明路段上的车流量和相关性对于有效风险值的计算有一定的影响. 至此,我们给出的数值算例说明了路口等待时间,路段和路口之间的相关性以及路段上的车流量,不同路段附近居民数量之间相关性对于提出的双目标优化模型的求解结果具有重要的影响.

3.2 数值算例的非支配有效解

根据本文中提出的模型和算法,给出了 OD 对 1 和 13 之间的非支配有效解的具体结果,见图 3 和表 3. 根据图 3 中的结果可以发现此时共有 6 个非支配的有效解,具体的非支配有效解对应的有效出行时间和有效风险值见表 3.

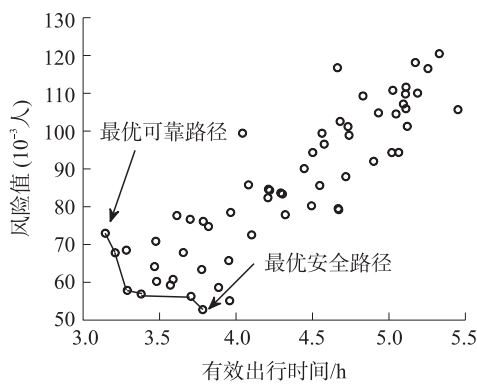


图 3 OD 对 1 和 13 之间的 Pareto 前沿面

Fig. 3 The Pareto solutions between OD pair 1 and 13

从表 3 中可以发现具有最小有效出行时间的路径是 1-2-6-10-13,具有最小有效风险值的路径是 1-5-8-10-11-13. 那么,对于危险品运输车辆来说,最优路径的选择完全取决于司机或者运输公司领导的个人偏好.

表 3 OD 对 1 和 13 之间的非支配有效解

Table 3 The non-dominated solutions between OD pair 1 and 13

非支配有效解	有效出行时间(h)	有效风险值( $10^{-3}$ 人)
[1,5,8,10,11,13]	3.782	52.78
[1,5,6,7,11,13]	3.706	56.29
[1,5,8,12,13]	3.38	56.91
[1,5,8,10,13]	3.289	57.88
[1,4,9,12,13]	3.21	67.81
[1,2,6,10,13]	3.145	72.99

4 结论

本文讨论了不确定条件下危险品车辆运输的可靠路径和安全路径的双目标优化模型. 最后通过数值算例说明了模型和算法的准确性和有效性,并得到了一系列非支配有效解. 通过本文的一些研究数值算例,我们论证了如下内容:

- (1)可靠路径的有效出行时间取决于不确定网络中的路段通行时间的均值和方差、路口等待时间的均值和方差以及准时到达的概率和其相关系数矩阵;
- (2)安全路径的有效风险值取决于不确定网络中的路段通行时间(路段上的车流量)、路段的距离、路段附近人口数的均值和方差以及相关系数矩阵;
- (3)此双目标优化模型的最优路径选择取决于通行者的个人偏好;
- (4)提出的双目标模型及其求解算法可以显著地帮助危险品车辆运输者在可靠路径和安全路径之间进行选择和预估,即使在具有不确定性的大型实际交通网络中也是适应的.

未来研究的方向可以考虑以下几个方面:本文中提出的基于可靠性的路径搜索问题是在随机道路网络中计算有效出行时间的静态模型. 因此,如何将本文提出的可靠路径搜索模型拓展到一个随时间变化的动态模型中是一个值得研究的问题. 此外,如何将该论文提出的算法应用到更大规模的交通网络中,从而验证提出模型和算法的有效性是后续需要研究的内容.

[参考文献]

[1] MA C X,ZHOU J B,XU X C,et al. Fleet scheduling optimization of hazardous materials transportation:a literature review[J]. Journal of advanced transportation,2020,Article ID:4079617.  
[2] 刘天亮,黄海军,陈剑. 考虑风险规避和认知更新的日常择路行为演进[J]. 交通运输工程学报,2008(4):90-94.

- [3] 陈喜群,刘教坤,胡浩强,等. 网络行程时间可靠性评价方法与影响因素[J]. 交通运输工程学报,2018,18(4):132-142.
- [4] JOY D. Predicting transportation routes for radioactive wastes[J]. Waster management,1981,1:415-425.
- [5] HALL R. The fastest path through a network with random time dependent travel times[J]. Transportation science,1986,20(3):182-188.
- [6] TOUMAZIS I,KWON C. Routing hazardous materials on time-dependent networks using conditional value-at-risk[J]. Transportation research part C,2013,37(3):73-92.
- [7] WEI M Y,LI X,YU L A. Time-dependent fuzzy random location-scheduling programming for hazardous materials transportation[J]. Transportation research part C,2015,57:146-165.
- [8] FU L P,RILETT L R. Expected shortest paths in dynamic and stochastic traffic networks[J]. Transportation research part B,1998,32(7):499-516.
- [9] CHANG T S,NOZICK L K,TURNQUIST M A. Multi-objective path finding in stochastic dynamic networks,with application to routing hazardous materials shipments[J]. Transportation science,2005,39(3):383-399.
- [10] XU H L,ZHOU J,XU W. A decision-making rule for modeling travelers' route choice behavior based on cumulative prospect theory[J]. Transportation research part C,2011,19:218-228.
- [11] 李健,周漪,刘威. 上海市历史城区震后应急救援路网评价与优化[J]. 交通运输系统工程与信息,2017,17(2):227-233.
- [12] 代存杰,李引珍,马昌喜,等. 随机时间依赖路网中危险品运输路径多准则优化[J]. 哈尔滨工业大学学报,2018,50(3):156-164.
- [13] 种鹏云,帅斌. 连环恐怖袭击下危险品运输网络级联失效建模[J]. 系统工程理论与实践,2014,34(4):1059-1065.
- [14] ABKOWITZ M,CHENG P. Developing a risk/cost framework for routing truck movements of hazardous materials[J]. Accident analysis & prevention,1988,20(1):39-51.
- [15] 代存杰,李引珍,马昌喜,等. 不确定条件下危险品配送路线多准则优化[J]. 吉林大学学报(工学版),2018,48(6):1694-1702.
- [16] SHAO H,LAM W,TAM M. A reliability-based stochastic traffic assignment model for network with multiple user classes under uncertainty in demand[J]. Networks and spatial economics,2006,6(3/4):173-204.
- [17] 朱宁,马寿峰,康迪. 基于排队依赖模型的车辆疏散问题研究[J]. 系统工程学报,2012,27(6):833-840.
- [18] ASAKURA Y,KASHIWADANI M. Road network reliability caused by daily fluctuation of traffic flow[J]. European transport, highways & planning,1991,19:73-84.
- [19] ZHU N,FU C Y,MA S F. Data-driven distributionally robust optimization approach for reliable travel-time-information-gain-oriented traffic sensor location model[J]. Transportation research part B,2018,113:91-120.
- [20] SHEN L,SHAO H,WU T,et al. Finding the reliable shortest path with correlated link travel times in signalized traffic networks under uncertainty[J]. Transportation research part E,2020,144:102159.
- [21] SUN J,LIU H. Stochastic eco-routing in a signalized traffic network[J]. Transportation research part C,2015,59:32-47.
- [22] YU S W,SHI Z K. An extended car-following model at signalized intersections[J]. Physica A-statistical mechanics and its applications,2014,407:152-159.
- [23] YU S W,FU R,GAO Y S,et al. Consensus and optimal speed advisory model for mixed traffic at an isolated signalized intersection[J]. Physica A-statistical mechanics and its applications,2019,531:121789.
- [24] HALL R. Travel outcome and performance;the effect of uncertainty on accessibility[J]. Transportation research part B. 1983,17(4):275-290.
- [25] 徐红利,周晶,徐薇. 考虑参考点依赖的随机网络用户均衡与系统演化[J]. 系统工程理论与实践,2010,30(12):1059-1065.
- [26] 徐薇,马萧宇,徐红利. 双目标用户均衡下的交通流逐日动态演化模型[J]. 管理科学学报,2020,23(7):116-126.
- [27] 王璐,朱宁. 基于高速公路事故预测的主动式巡逻车应急响应研究[J]. 交通信息与安全,2018,36(1):35-40.
- [28] SHEN L,SHAO H,WU T,et al. An energy-efficient reliable path finding algorithm for stochastic road networks with electric vehicles[J]. Transportation research part C,2019,102:450-473.
- [29] DIJKSTRA E. A note on two problems in connexion with graphs[J]. Numerische mathematik,1959,1:269-271.
- [30] YANG H H,CHEN Y L. Finding  $K$  shortest looping paths with waiting time in a time-window network[J]. Applied mathematical modelling,2006,30:458-465.

[责任编辑:陆炳新]