doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2022.03.003

契比雪夫界限定理的改进

陈 刚,吴 彬

(南通职业大学公共教学部,江苏 南通 226007)

[摘要] 选用较传统更贴切的组合数以优化半长区间上素数连乘积的上界估计,然后通过构造半长区间的有限序列来覆盖全区间上的素数,由此得到契比雪夫界限定理(Chebyshev's Bound)中上界限(即控制函数)的若干改进,并给出改进后估计式的关键参数的控制范围和具体算法.

[关键词] 契比雪夫界限定理,控制函数,改进,组合数,素数连乘积,向下整数序列

[中图分类号]O156.1 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2022)03-0015-05

Some Improvements of Chebyshev'ss Bound

Chen Gang,Wu Bin

(Public Teaching Department of Nantong Vocational University,Nantong 226007,China)

Abstract:This paper shows some improvements of Chebyshev'ss Bound(i.e. upper control function)and presents the control area and algorithm of key parameters. Some combinatorial number better than the traditional one is chosen and estimated upper bound of continued product of prime numbers on half-length interval is optimized. Finally,all prime numbers in the given interval are covered by an infinite half-length sequence.

Key words:Chebyshev'ss bound,control function,improvement,combinatorial number,continued product of prime numbers,downward sequence of integer

契比雪夫界限定理[1-2]是研究素数分布的重要公式之一,在证明贝特朗(Bertrand)假设[1,3-5]等数论结果时起到了关键的作用. 该定理指出:对于任意正整数 n,所有不大于 n 的素数 p 的连乘积满足 $\prod\limits_{p\leqslant n} p<4^n$,即 4^n 是连乘积的一个控制函数,简称(上)界限. 该式又可表述为 $\theta(n)<2n\ln 2$,其中 $\theta(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}\ln p$ 叫做契比雪夫函数[5-6]. 本文将契比雪夫界限定理改进为

$$\prod_{p\leqslant n} p<\delta(b)\frac{4^n}{n}(n\geqslant b)\text{或 }\theta(n)<2n\ln 2-\ln n+\ln\delta(b),$$

这里由 b 唯一确定的 $\delta(b)<1$. 本文给出了 $\delta(b)$ 的可操作算法.

改进结果使估计的上界限缩小了 $[\delta(b)]^{-1}n$ 倍,在相关应用中将会取得更好的效果.

1 预备知识

设某个确定的正数 $b>2$,整数 $n\geqslant b$,现构造正整数序列 $\{a_i\}$:首项取 $a_0=\frac{n}{2}$ 或 $a_0=\frac{n+1}{2}$,使得 a_0 为整数;然后递推 $a_{i+1}=\frac{a_i}{2}$ 或 $a_{i+1}=\frac{a_i+1}{2}$,使得 a_{i+1} 为整数($i=0,1,2,\cdots$). 显然有 $a_{i+1}\leqslant\frac{a_i+1}{2}\leqslant a_i$,特别地,有 $n\leqslant 2a_0\leqslant n+1$.

记 $\left[\frac{b}{2}\right]=r$(下文通用),这时序列 $\{a_i\}$ 有下列主要性质:

收稿日期:2021-11-17.

基金项目:国家自然科学基金面上项目(11771224).

通讯作者:陈刚,教授,研究方向:代数学及其应用. E-mail:ntcggycg@163.com

性质 1　存在序号 s, $s+1=\min\{i|a_i\leqslant r\}$, 使得 $a_i\geqslant r+1(i\leqslant s)$; 并且有

$$r+1\leqslant a_s\leqslant 2r, \tag{1}$$

以及

$$2^{s+1}\geqslant\frac{n}{2r}. \tag{2}$$

证明　显然 $a_0\geqslant\frac{b}{2}=r+\left\{\frac{b}{2}\right\}$, 而 a_0 是整数, 所以 $a_0\geqslant r+1$. 假设所有的 $a_i\geqslant r+1>1$, 则 $a_{i+1}\leqslant\frac{a_i+1}{2}<a_i$, 从而 $\{a_i\}$ 严格递减, 递减量 $a_i-a_{i+1}\geqslant 1$, 该式求和得

$$k\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}(a_i-a_{i+1})=a_0-a_k,$$

因为 a_0 随 n 给定而确定, 所以当 k 足够大时必有 $a_k\leqslant a_0-k<r+1$, 这与假设矛盾. 因此存在某个 i, 使得 $a_i\leqslant r$. 设 $s+1=\min\{i|a_i\leqslant r\}$, 这时 $a_{s+1}\leqslant r$ 与 $a_s\geqslant r+1$, 并且对所有的 $i<s$, 也有 $a_i\geqslant r+1$. 由 $\{a_i\}$ 的构造知 $a_s\leqslant 2a_{s+1}$, 故有 $r+1\leqslant a_s\leqslant 2r$.

再由 $a_i\leqslant 2a_{i+1}$ 递推得 $n\leqslant 2a_0\leqslant 2^2a_1\leqslant\cdots\leqslant 2^{s+1}a_s\leqslant 2^{s+2}r$, 从而得到 $2^{s+1}\geqslant\frac{n}{2r}$, 并有 $s\geqslant\log_2\frac{n}{r}-2$. 证毕.

性质 2　对于 $a_s\geqslant r+1$, $a_{s+1}\leqslant r$, 有

$$\sum_{i=0}^{s}a_i\leqslant n-a_s+s+2. \tag{3}$$

证明　由 $\{a_i\}$ 的构造知 $2a_{i+1}\leqslant a_i+1$, 求和得 $\sum_{i=0}^{s}a_i+s+1\geqslant 2\sum_{i=0}^{s}a_{i+1}=2\left(\sum_{i=0}^{s}a_i+a_{s+1}-a_0\right)$, 所以 $\sum_{i=0}^{s}a_i\leqslant 2(a_0-a_{s+1})+s+1$, 结合 $2a_0\leqslant n+1$ 与 $2a_{s+1}\geqslant a_s$ 即得式(3).

性质 3　对于 $a_s\geqslant r+1$, $a_{s+1}\leqslant r$, 有下列区间覆盖关系:

$$\{p|p\leqslant n\}\subset\{p|p\leqslant a_s\}\cup(\bigcup_{i=0}^{s}\{p|a_i<p\leqslant 2a_i\}). \tag{4}$$

证明　由 $\{a_i\}$ 的定义及其单调性知 $a_{i+1}<a_i\leqslant 2a_{i+1}<2a_i(0\leqslant i\leqslant s)$, 且因 $n\leqslant 2a_0$, 故有 $(a_s,n]\subset(a_s,2a_0]\subset\bigcup_{i=0}^{s}(a_i,2a_i]$. 因此有

$$\{p|p\leqslant n\}=\{p|p\leqslant a_s\}\cup\{a_s<p\leqslant n\}\subset\{p|p\leqslant a_s\}\cup(\bigcup_{i=0}^{s}\{p|a_i<p\leqslant 2a_i\}).$$

性质 3 得证.

2　有关引理

本文约定字母 p, p_i 以及 q 均表示素数; 记组合数 $C_{2k-1}^{k}=\frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}=N_k$, 半区间和全区间上素数的连乘积分别记做 $\prod_{k<p\leqslant 2k}p=H_k$ 和 $\prod_{p\leqslant n}p=P(n)$, 并定义算术函数 $f(k)=\frac{P(k)}{4^k}$.

引理 1　$k\geqslant 5$ 时, 有组合数的估计: $N_k<2^{2k-3}$.

证明　用数学归纳法. 当 $k=5$, 易知 $N_5=C_9^5=2\times 63<2^{2\times 5-3}$.

假设对某个 $k\geqslant 5$, $N_k<2^{2k-3}$ 成立, 则

$$N_{k+1}=C_{2k+1}^{k+1}=\frac{(2k+1)!}{(k+1)!k!}=\frac{2(2k+1)}{k+1}\cdot\frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!}<4N_k<2^{2(k+1)-3},$$

根据数学归纳原理知, 对所有的 $k\geqslant 5$, 均有 $N_k<2^{2k-3}$. 证毕.

下面的引理 2 将用于本文主要结果的推导与证明.

引理 2　$k\geqslant 5$ 时, 有半区间上素数连乘积的估计: $H_k<2^{2k-3}$ 或 $\log_2 H_k<2k-3$.

证明　因为 $\{p|k<p\leqslant 2k\}=\{p|k<p\leqslant 2k-1\}\subset\{k+1,k+2,\cdots,2k-1\}$, 所以 H_k 能够整除连续整数的乘积 $(k+1)(k+2)\cdots(2k-1)=N_k(k-1)!$. 由于 H_k 与 $(k-1)!$ 互素, 故 H_k 能整除 N_k, 从而 $H_k\leqslant N_k$, 再由引理 1 得: $k\geqslant 5$ 时 $H_k<2^{2k-3}$. 证毕.

引理 3　算术函数 $f(k)$ 具有如下性质：

设 p_1,p_2 是两个相邻的素数，合数 m_1 和 m_2 满足 $p_1<m_1<m_2\leqslant p_2-1<p_2$，则有 $f(p_1)>f(m_1)>f(m_2)\geqslant f(p_2-1)$；当 $p_2\geqslant 5$ 时，有 $f(p_2-1)<f(p_2)$.

证明　由于 $P(m_1)=P(m_2)=P(p_2-1)=P(p_1)$，而 $4^{p_2-1}\geqslant 4^{m_2}>4^{m_1}>4^{p_1}$，所以由函数 f 的定义知 $f(p_1)>f(m_1)>f(m_2)\geqslant f(p_2-1)$.

$p_2\geqslant 5$，所以 $\frac{p_2}{4}>1$，故 $f(p_2)=\frac{p_2}{4}\cdot\frac{P(p_1)}{4^{p_2-1}}>f(p_2-1)$.

3　主要结果及其证明

为了对契比雪夫界限定理的改进结果加以论证，首先采用归纳法证明一个预备定理.

3.1　预备定理

命题 1　设 n 是正整数，则有

$$P(n)=\prod_{p\leqslant n}p<\frac{4^n}{2n}.\tag{5}$$

证明　用数学归纳法. 由计算知当 $n\leqslant 8$ 时命题均成立.

假设命题对所有小于 n 的 $k(k<n)$ 都成立，现对 $n(n\geqslant 9)$ 予以证明.

取 $a_0=\frac{n}{2}$ 或 $a_0=\frac{n+1}{2}$，使得 $a_0=\frac{n+1}{2}$ 是正整数. 这样就存在如下区间覆盖关系：

$$\{p\mid p\leqslant n\}\subset\{p\mid p\leqslant a_0\}\cup\{a_0<p\leqslant 2a_0\},$$

所以有 $P(n)\leqslant P(a_0)H_{a_0}$.

由于 $a_0\leqslant\frac{n+1}{2}<n$，根据归纳假设，$P(a_0)<\frac{4^{a_0}}{2a_0}$；又整数 $a_0\geqslant\frac{n}{2}\geqslant 4.5$，所以 $a_0\geqslant 5$，满足引理 2 条件，故有 $H_{a_0}<2^{2a_0-3}$. 于是

$$P(n)<\frac{4^{a_0}}{2a_0}\cdot 2^{2a_0-3}=\frac{4^{2a_0-1}}{4a_0}\leqslant\frac{4^n}{2n}.$$

至此，命题的归纳法证明完成.

3.2　主要定理

命题 2　设正整数 $n\geqslant b\geqslant 9$，则有

$$Q(n)=\prod_{p\leqslant n}p<\delta(b)\cdot\frac{4^n}{n},\tag{6}$$

其中 $\delta(b)$ 由 b 唯一确定，其计算式为

$$\delta(b)=2r\cdot\max_{a_s\in[r+1,2r]}f(a_s).\tag{7}$$

证明　利用式(4)对素数所在区间 $\{p\mid p\leqslant n\}$ 进行的覆盖，得到 $P(n)$ 的初步估计：$P(n)\leqslant P(a_s)\prod_{i=0}^{s}H_{a_i}$，或 $\log_2 P(n)\leqslant\log_2 P(a_s)+\sum_{i=0}^{s}\log_2 H_{a_i}$.

首先考虑 $b\geqslant 9$ 的情形，这时在序列 $\{a_i\}$ 中，当 $i\leqslant s$ 时，$a_i\geqslant r\geqslant 5$.

由引理 2 知 $\log_2 H_{a_i}<2a_i-3(i\leqslant s)$，求和并运用式(3)得

$$\sum_{i=0}^{s}\log_2 H_{a_i}<2\sum_{i=0}^{s}a_i-3s-3\leqslant 2n-2a_s-(s+1).$$

所以有 $\prod_{i=0}^{s}H_{a_i}<4^n\cdot 4^{-a_s}\cdot 2^{-(s+1)}$. 运用式(2)得 $2^{-(s+1)}\leqslant\frac{2r}{n}$，故 $\prod_{i=0}^{s}H_{a_i}<\frac{2r}{4^{a_s}}\cdot\frac{4^n}{n}$.

综上即得 $P(n)<2r\cdot\frac{P(a_s)}{4^{a_s}}\cdot\frac{4^n}{n}=2r\cdot f(a_s)\cdot\frac{4^n}{n}$.

注意到整数 $a_s\in[r+1,2r]$ 是有限区间，可以求得式(6)，即 $\delta(b)=2r\cdot\max_{a_s\in[r+1,2r]}f(a_s)$，从而得到当 $n\geqslant b$

$(b\geqslant 9)$时素数连乘积 $P(n)=\prod\limits_{p\leqslant n}p$ 上限的一个估计式:$P(n)<\delta(b)\cdot\dfrac{4^n}{n}$. 式(5)得证. 又因为 $r=\left[\dfrac{b}{2}\right]$,所以式(6)由 b 唯一确定. 命题 2 得证.

3.3 $\delta(b)$的算法优化与应用

对于较小的 n,素数连乘积 $P(n)$ 可直接计算而无需估计. 式(5)的价值在于当 n 较大(即 $n>b$,b 较大)且不特定时,给出对 $P(n)$ 的动态估计,即给出对应的系数 $\delta(b)$. 整数 a_s 所在区间的有限性保证了算式(6)的可操作性,进一步,我们希望从 f 的特殊结构获得更多的信息,得到 $\delta(b)$ 的简化算法,以期提高估计式(5)的应用效果.

命题 3 设正整数 $n\geqslant b\geqslant 9$,记 $S_r=\{p_i\mid p_i\in(r+1,2r)\}$,$T_r=\{r+1\}\cup S_r$,则

$$\delta(b)=2r\max_{k\in T_r}\{f(k)\}. \tag{8}$$

若记 $p_0=\max\{p\mid p\leqslant r+1\}$,$p_m=\max\limits_{p_i\in S_r}\{p_i\}$,则有

$$\delta(b)=2rf(k_M), \tag{9}$$

其中 $k_M\in T_r$,并对所有的 $k\in T_r$,有 $4^{p_m-k_M}\dfrac{P(k_M)}{P(p_0)}\geqslant 4^{p_m-k}\dfrac{P(k)}{P(p_0)}$.

进一步,有 $\delta(b)<1$.

证明 由引理 3 知,在区间$[r+1,2r]$上凡是左侧有素数的合数处 f 都不可能取到最大值,并且在连续的合数处 f 严格递减. 由贝特朗假设知,$S_r\neq\phi$,所以其中最小的 $p_1\leqslant p_m$. 位于左端点 $r+1$ 右侧且在 p_1 左侧的合数 m,$r+1$ 均有 $f(m)<f(r+1)$;同样,p_1 右侧的合数 m 也有 $f(m)<f(p_1)$,如此直到右端点 $2r$,但 $2r$ 是合数. 且 $p_m<2r$. 所以 $f(2r)<f(p_m)$. 综上,算术函数 f 在$[r+1,2r]$上只能在有限素数集 S_r 上以及左端点 $r+1$ 处取最大值,从而式(7)成立.

在式(7)中对等号右端的括号中各 $f(k)$ 的分子提取最大公因子 $P(p_0)$,分母提取最小公倍数 4^{p_m},即得 $\delta(b)=\dfrac{2rP(p_0)}{4^{p_m}}\max\limits_{k\in T_r}\left\{4^{p_m-k}\dfrac{P(k)}{P(p_0)}\right\}$,该式可确定 k_M,从而得到式(8).

下面证明 $\delta(b)<1$,这里 $b\geqslant 9$.

分别在 T_r 中 $r+1$ 和 S_r 内的每个素数 p_i 点处运用命题 1 结论,得到

$$2r\cdot f(r+1)=\frac{2r\cdot P(r+1)}{4^{r+1}}<\frac{2(r+1)\cdot P(r+1)}{4^{r+1}}<1 \text{ 和 } 2r\cdot f(p_i)=\frac{2r\cdot P(p_i)}{4^{p_i}}<\frac{2p_i\cdot P(p_i)}{4^{p_i}}<1,$$

故 $\delta(b)=2r\max\limits_{k\in T_r}\{f(k)\}<1(b\geqslant 9)$. 命题 3 得证.

式(7)将 $\delta(b)$ 的计算和比较点从区间上的 r 个整数缩减到至多 $\dfrac{r+1}{2}$ 个素数的范围,并且基于素数分布的总体稀疏性,对较大的 b,这种简化相对于式(6)的优势将能够得到体现. 此外式(8)等号右端大括号中参与比较的各项均为整数,从左到右依次比较,逐步剔除较小者即可遴选最大者,最终只需要做一次除法,无论是手工还是计算机计算[7],都能降低工作量.

作为应用,这里以 $n\geqslant 34$ 为例,运用式(8)求出 $\delta(34)$.

$n\geqslant b=34$,$r=17$. 因左端点 18 是素数集 S_{17} 中 19 的左邻数,据引理 3 应予剔除,故计算集缩至$\{19,23,29,31=p_m\}$. 由式(8)得 $\max\limits_{k=19,23,29,31}\left\{4^{31-k}\dfrac{P(k)}{P(17)}\right\}=4^{31-k}\dfrac{P(k)}{P(17)}\Bigg|_{k=19}$,所以 $\delta(34)=34f(17)$,这里 $f(17)=\dfrac{f(17)}{4^{17}}<\dfrac{1}{4^{10}}$.

进一步,运用命题 2 和 3,即本文的主要结果,可以得到如下估计,使契比雪夫界限定理得到改进.

推论 设 n 是任意正整数,则有估计式 $P(n)=\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ n\geqslant 4}}p<\dfrac{15}{64}\cdot\dfrac{4^n}{n}$ 和 $P(n)=\prod\limits_{p\leqslant n}p<\dfrac{19}{64}\cdot\dfrac{4^n}{n}$.

证明 首先考虑 $n\geqslant 9$,由命题 2 知 $P(n)<\delta(9)\cdot\dfrac{4^n}{n}$. 这时 $b=9$,$r=4$,故仅需对区间$[5,8)$上仅有的素数 5

和 7 直接运用式(7)做计算和比较,得 $\delta(9)=8\max\{f(5),f(7)\}=8f(5)=\frac{15}{64}$,所以有 $P(n)=\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ n\geqslant 9}}p<\frac{15}{64}\cdot\frac{4^n}{n}$.

再对 $4\leqslant n\leqslant 8$ 逐一验证,$\prod\limits_{p\leqslant n}p<\frac{15}{64}\cdot\frac{4^n}{n}$ 也都成立,$P(n)=\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ n\geqslant 4}}p<\frac{15}{64}\cdot\frac{4^n}{n}$.

$P(2)$ 和 $P(3)$ 通过验证,而 $\prod\limits_{\substack{p\leqslant n\\ n\geqslant 4}}p<\frac{15}{64}\cdot\frac{4^n}{n}<\frac{19}{64}\cdot\frac{4^n}{n}$,所以全体不超过 n 的素数的连乘积 $P(n)=\prod\limits_{p\leqslant n}p<\frac{19}{64}\cdot\frac{4^n}{n}$.

若以 $P(3)=\frac{18}{64}$ 作为起点,在理论上有更细致的结果:$P(n)<\frac{18+\varepsilon}{64}\cdot\frac{4^n}{n}$,其中 ε 是任意正数. 证毕.

4　结论

经典契比雪夫界限定理的证明中,组合数的估计 $N=C_{2n}^{n}<4^{n-1}$、半长区间上素数连乘积的估计 $H_n=\prod\limits_{n<p\leqslant 2n}p<C_{2n}^{n}$,与定理的最终估计 $P(n)<4^n$ 有着形式上的相似性[8],其中可能蕴含着某种内在联系. 基于这种分析,本文通过构造一组递缩半长区间$(a_i,2a_i]$(a_i 是正整数,$i=0,1,2,\cdots,s$)来覆盖不超过 n 的全体素数 p,并选用了异于传统的组合数 $N_k=C_{2k-1}^{k}(k\geqslant 5)$ 作为实现突破的关键节点,使 H_n 的估计式优化为 $H_n<2^{2n-3}$,从而推导出较经典结论更强的契比雪夫界限定理,即对任意 $n\geqslant b$,$P(n)<\delta(b)\frac{4^n}{n}$. 进一步,给出了 $\delta(b)$ 的简化算法并证明了整数 $\delta(b)<1$.

运用本文的改进结果,不仅能改善相关问题的估计效果[9],也能使一些与素数分布的经典结论得到一定的加强. 例如一般情形下的贝特朗假设(定理)[10]指出:对于任意正整数 k,存在 $N>0$,使得在区间$(n,2n)$内至少含有 k 个素数 p,运用本文的估计式处理可以缩小 N,扩大定理的适用范围.

[参考文献]

[1] 华罗庚. 华罗庚文集(数论卷Ⅱ)[M]. 北京:科学出版社,2010:87-90.

[2] 百度百科. 伯特兰-契比雪夫定理[EB/OL]. [2020-03-18]. https://baike.baidu.com/item/%E4%BC%AF%E7%89%B9%E5%85%B0-%E5%88%87%E6%AF%94%E9%9B%AA%E5%A4%AB%E5%AE%9A%E7%90%86/2053704.

[3] 王元. 浅谈素数[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011:34.

[4] 潘承彪. 从契比雪夫到爱尔特希——素数定理的初等证明(上)[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013:30.

[5] APOSYOL T M. (美)解析数论导引[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016:73.

[6] MURTY M R. (美)解析数论中的问题[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014:36,273.

[7] BHAT M A,KOSURU G S R. A generalization of Chebyshev's inequality and its applications[EB/OL]. arXiv:2018.01479v3 [math. FA](2021-10-24)[2021-11-03] http://www.xueshufan.com/publication/3190830802.

[8] 闵嗣鹤,严士健. 初等数论[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2003:21-22.

[9] LANGEVIN M. Méthodes élémentaires en vue du théorèm de Sylvester[C]//Séminaire Delange-Pisto-Poitou. Théoriedesnombres, 1976,17(2):G2-01-G2-09.

[10] 吴彬,陈刚. 关于贝朗特假设一般情形的证明[J]. 南通职业大学学报,2020(3):67-69.

[责任编辑:陆炳新]