doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.01.001

带有位势井的分数阶渐近薛定谔方程的多解性研究

陆伟东,单 远

(南京审计大学数学学院,江苏 南京 211815)

[摘要] 研究分数阶薛定谔方程:

$$(-\Delta)^s u+V_\lambda(\boldsymbol{x})u=f(\boldsymbol{x},u),\ 0<s<1,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N,$$

其中 $N>2s$,f 满足渐近线性条件,且当 λ 充分大时位势函数 V_λ 具有位势井. 利用临界点定理得到方程的多解性.

[关键词] 分数阶薛定谔方程,位势井,渐近线性条件,多解性

[中图分类号] O177.91 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2023)01-0001-05

Multiple Solutions for Asymptotically Linear Fractional Schrödinger Equation with Steep Potential Well

Lu Weidong,Shan Yuan

(School of Mathematics of Nanjing Audit University,Nanjing 211815,China)

Abstract:In this paper,we study the nonlinear fractional Schrödinger equation

$$(-\Delta)^s u+V_\lambda(\boldsymbol{x})u=f(\boldsymbol{x},u),\ 0<s<1,\quad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N,$$

on the whole space $\mathbf{R}^N$ with $N>2s$. The nonlinearity f is assumed to be asymptotically linear and the potential V_λ has a steep potential well for sufficiently large parameter λ. By virtue of critical point theory,the existence of multiple solutions are obtained.

Key words:fractional Schrödinger equation,steep potential well,asymptotically linear condition,multiple solutions

本文研究如下的分数阶薛定谔方程:

$$(-\Delta)^s u+V_\lambda(\boldsymbol{x})u=f(\boldsymbol{x},u),\ \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N,$$

其中 $0<s<1$,$N>2s$,$f\in C(\mathbf{R}^N\times\mathbf{R},\mathbf{R})$,分数阶拉普拉斯 $(-\Delta)^s$ 定义为:

$$(-\Delta)^s u(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}\frac{u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-2u(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{y}|^{N+2s}}\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \tag{1}$$

位势函数 $V_\lambda:=\lambda g(\boldsymbol{x})+1$,$\lambda\geqslant 0$ 是实参数并满足如下条件:

(V_1):$g\in C(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$,$g\geqslant 0$,且 $\Omega:=\mathrm{int}(g^{-1}(0))\neq\varnothing$.

(V_2):存在 $M_0>0$ 使得集合 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N,\quad g(\boldsymbol{x})\leqslant M_0\}$ 非空且具有有限测度.

(V_3):$\overline{\Omega}=g^{-1}(0)$ 是带有 Lipschitz 边界的有界区域.

方程(1)源自于时间依赖的分数阶薛定谔方程

$$i\partial_t\psi+(-\Delta)^s\psi+(V(\boldsymbol{x})-c)\psi=g(\boldsymbol{x},\psi),\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N,t\in\mathbf{R},$$

的驻波解的研究. 这里驻波解是指满足方程形如 $\psi(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{e}^{ict}u(t)$ 的解. 近些年,人们利用分数阶的拉普拉斯或拟微分算子来研究纯数学或者应用数学中的一些具体的现象. 分数阶薛定谔方程是分数阶量子力学的重要模型之一. 值得指出的是文献[1]在路径积分中利用 Levy 路径代替布朗路径得到了分数阶薛定谔方程,并将布朗量子力学推广到 Levy 量子力学,使得该方程得到了广泛的关注(参见文献[2-9]).

当 λ 充分大时,条件 (V_1)-(V_3) 建立了位势井. 这类条件被运用于薛定谔方程的研究中[10-12]. 随后,

收稿日期:2022-09-23.

基金项目:国家自然科学基金项目(11971233).

通讯作者:单远,副教授,研究方向:微分动力系统. E-mail:shannjnu@gmail.com

位势并被引入薛定谔-泊松方程、Krichhoff 问题、分数阶薛定谔方程等的研究中(参见文献[13-15]).

为了介绍非线性项 f 的条件,我们首先给出带有齐次狄利克雷边值条件的非局部拉普拉斯问题的特征值问题(参见文献[16]):

$$\begin{cases}(-\Delta)^s u(\boldsymbol{x})+u(\boldsymbol{x})=\nu u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ u=0, & \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N\backslash\Omega.\end{cases}$$

设 $L=(-\Delta)^s+1$,并记 $\sigma(L)$ 为满足 Dirichlet 边值条件的算子 L 的谱,则 $\sigma(L)$ 由正的有限重特征值构成. 在本文中,我们希望将薛定谔方程中的经典结果[11-12,17]推广至分数阶薛定谔方程(1)的研究中. 我们主要研究当非线性项 f 满足渐近线性条件时方程(1)的多解性.针对 f,我们做出如下假设:

(f_1): $f(\boldsymbol{x},u)=o(u)$, $u\to0$,关于 $\boldsymbol{x}$ 一致.

(f_2): $f(\boldsymbol{x},u)=B_\infty(\boldsymbol{x})u+r(\boldsymbol{x},u)$,其中 B_∞ 是有界连续的实值函数,$\dfrac{r(\boldsymbol{x},u)}{u}\in\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}\backslash\{0\}$ 且 $r(\boldsymbol{x},u)=o(u)$, $|u|\to\infty$ 关于 x 一致.

(f_3): $m_0:=\inf_{x\in\mathbf{R}^N}B_\infty(\boldsymbol{x})>\inf\sigma(L)$.

(f_4):要么(i) $0\notin\sigma(L-B_\infty)$,要么(ii) $\hat{F}(\boldsymbol{x},u)\geqslant0$ 且存在 δ_0 使得 $|u|$ 充分大时 $\hat{F}(\boldsymbol{x},u)\geqslant\delta_0$ 成立. 其中 $\hat{F}(\boldsymbol{x},u)=\dfrac{1}{2}f(\boldsymbol{x},u)u-F(\boldsymbol{x},u)$,且 $F(\boldsymbol{x},u)=\int_0^u f(\boldsymbol{x},s)\,\mathrm{d}s$.

设 ζ 为算子 L 落入 $(0,m_0)$ 内的特征值的个数,本文的主要定理如下:

定理 1　设 $(V_1)-(V_3)$ 和 $(f_1)-(f_4)$ 成立. 若 f 关于 u 是奇函数,则当 λ 充分大时,方程(1)至少含有 ζ 对解.

注 1　如下的函数满足条件 $(f_1)-(f_4)$:

$$F(\boldsymbol{x},u)=B_\infty(\boldsymbol{x})|u|^2\left(1-\frac{1}{\ln^2(\mathrm{e}+|u|)}\right).$$

1　预备知识

我们首先回顾分数阶 Sobolev 空间的相关知识. 定义分数阶函数空间 X:

$$X:=\left\{u\in L^2(\mathbf{R}^N): \iint_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{(u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y}))^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{N+2s}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}<\infty\right\},$$

其上的范数定义为

$$\|u\|_X=\left(\iint_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{(u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y}))^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{N+2s}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int_{\mathbf{R}^{2N}}u^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/2}.$$

算子 $(-\Delta)^s+V_\lambda$ 的形式定义域为:

$$E_\lambda=\left\{u\in X:\int_{\mathbf{R}^{2N}}V_\lambda(\boldsymbol{x})u^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}<\infty\right\}.$$

E_λ 是一个 Hilbert 空间并带有内积

$$\|u\|_\lambda^2=(u,u)_\lambda=\iint_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{(u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y}))^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{N+2s}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\int_{\mathbf{R}^N}(1+\lambda g(\boldsymbol{x}))u^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

E_λ 可以连续嵌入 X. 特别的,根据[3]中的引理 2.2,可得

引理 1　E_λ 可以连续嵌入 $L^p(\mathbf{R}^N)$, $\forall\ p\in[2,2_s^*]$,且紧嵌入 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$, $\forall\ p\in[2,2_s^*]$,其中 $2_s^*=\dfrac{2s}{N-2s}$.

定义 E_λ 上的泛函 $I_\lambda:E_\lambda\to\mathbf{R}$,

$$I_\lambda(u)=\frac{1}{2}\iint_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{(u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y}))^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{N+2s}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}+\frac{1}{2}\iint_{\mathbf{R}^{2N}}V_\lambda u^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\iint_{\mathbf{R}^{2N}}F(\boldsymbol{x},u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\|u\|_\lambda^2-\iint_{\mathbf{R}^{2N}}F(\boldsymbol{x},u)\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\quad(2)$$

根据 f 的假设易得 $I_\lambda\in C^1(E_\lambda,\mathbf{R})$ 且 I_λ 的临界点是方程(1)的解.

设 $B_r(y)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N:|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant r\}$. 简记 $B_r=B_r(0)$ 和 $B_r^c=\mathbf{R}^N\backslash B_r$. 根据文献[3,6],我们得到如下结论:

引理 2 设$(V_1)-(V_3)$成立. 任取$2\leqslant p\leqslant 2_s^*$,对于任意的$\varepsilon>0$,存在$\Lambda_\varepsilon>0$和$r_\varepsilon>0$使得

$$\| u \|_{L^p(B^c_{r_\varepsilon})} \leqslant \varepsilon \| u \|^p_\lambda, \ \forall u\in E_\lambda, \lambda>\Lambda_\varepsilon.$$

我们引入如下的空间E:

$$E=\left\{u \mid u:\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}\text{ 可测},u\in L^2(\Omega)\text{ 且}\frac{u(\boldsymbol{x})-u(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{\frac{N}{2}+s}}\in L^2(Q)\right\},$$

其中$Q=\mathbf{R}^{2N}\setminus\Lambda,\Lambda=\Omega^c\times\Omega^c$. 记

$$E_0=\{u\in X:u=0\text{ 几乎处处于 }\Omega^c\},$$

E_0是定义在Ω上的算子$(-\Delta)^s+1$的形式定义域,且$\sigma(L)$只具有正的孤立的有限重特征值.

下面我们介绍对称形式的山路引理(参见[18]定理6.3)用来研究泛函I_λ的临界点. 回顾序列$(u_n)\in X$被称为I的Palais-Smale(简写为PS)序列是指:$I(u_n)$有界且$I'(u_n)\to 0$. 函数I满足PS条件是指:I的任一PS序列具有收敛子列.

定理 2 设$\Phi\in C^1(X,R^1)$为巴拿赫空间X上的偶泛函,$\Phi(0)=0$且Φ满足(PS)条件. 若

(Φ_1)存在$G_1\subset X$,$\dim X=l_1$和$r>0$使得

$$\sup_{u\in G_1,u\geqslant r}\Phi(u)\leqslant 0,$$

(Φ_2)存在$G_2\subset X$,$\operatorname{codim} X=l_2<l_1$和$\rho>0$使得

$$\inf_{u\in G_2\cap\partial B_\rho}\Phi(u)>0,$$

则Φ至少有l_1-l_2对临界点(正临界值).

2 定理1的证明

引理 3 设(f_1)和(f_2)成立,则存在$\rho>0$使得

$$\inf_{u\in E_\lambda\cap\partial B_\rho}I_\lambda(u)>0,$$

对于任意$\lambda\geqslant 0$都成立.

证明 由(f_1)和(f_2)可得:对于任意$\varepsilon>0$,存在$C_\varepsilon>0$以及$p\in[2,2_s^*]$使得

$$|f(\boldsymbol{x},u)|\leqslant\varepsilon u+C_\varepsilon|u|^{p-1},$$

以及

$$|F(\boldsymbol{x},u)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}u^2+\frac{C_\varepsilon}{p}|u|^p.$$

从而

$$I_\lambda\geqslant\frac{1}{2}\| u \|^2_\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\| u \|^2_{L^2}-\frac{C_\varepsilon}{p}\| u \|^p_{L^p}, \ \forall u\in E_\lambda.$$

因此当$\rho=\| u \|_\lambda$充分小时该引理成立.

设L在$(0,m_0)$中的特征值(按重数计算)为$\mu_1(L)<\mu_2(L)\leqslant\mu_3(L)\leqslant\cdots\mu_\zeta(L)<m_0$,并用$\boldsymbol{e}_j$, $j=1,2\cdots\zeta$表示其对应的特征向量. 记$G_1=\operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_\zeta\}$.

引理 4 存在$r>0$使得

$$\sup I_\lambda(G_1\cap B_r^c)<0.$$

证明 只需证当$u\in G_1$且$u_\lambda\to\infty$时$I_\lambda\to-\infty$. 假设存在$M>0$,$\{u_j\}\subset G_1$且$\| u_j \|_\lambda\to+\infty$时$I_\lambda(u_j)>-M$. 设$v_j=\dfrac{u_j}{\| u_j \|_\lambda}$,则有$\| v_j \|_\lambda=1$. 由于$G_1$是有限维空间,不妨设在$G_1$中$v_j\to v$. 则有

$$\frac{-M}{\| u_j \|^2_\lambda}\leqslant\frac{I_\lambda(u_j)}{\| u_j \|^2_\lambda}=\frac{1}{2}\| v_j \|^2_\lambda-\int_{\mathbf{R}^N}\frac{F(\boldsymbol{x},u_j)}{\| u_j \|^2_\lambda}\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

记$R(\boldsymbol{x},u)=F(\boldsymbol{x},u)-\dfrac{1}{2}B_\infty u^2$. 由条件$(f_2)$可得$|R(\boldsymbol{x},u)|\leqslant cu^2$以及当$|u|\to+\infty$时$\dfrac{|R(\boldsymbol{x},u)|}{u^2}\to 0$.

从而

$$\int_{\mathbf{R}^N}\frac{R(\boldsymbol{x},u_j)}{\|u_j\|_\lambda^2}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\mathbf{R}^N}\frac{R(\boldsymbol{x},u_j)}{\|u_j\|^2}|v_j|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant 2\iint_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{|R(\boldsymbol{x},u_j)|}{|u_j|^2}|v_j-v|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+2\iint_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{|R(\boldsymbol{x},u_j)|}{|u_j|^2}|v|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=$$
$$o(1)+\int_{v\neq 0}\frac{|R(\boldsymbol{x},u_j)|}{|u_j|^2}|v|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}=o(1).$$

此外,根据条件(f_3)有

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N}B_\infty v_j^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\frac{m_0}{2}\|v_j\|_{L^2}^2 \tag{4}$$

结合式(3)、(4),我们得到

$$o(1)\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m_0\|v_j\|_{L^2}^2\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{m_0}{\mu_\zeta(L)}\right)<0,$$

矛盾. 证毕.

引理 5　设定理 1 的条件都成立,则当 λ 充分大时,所有的(PS)序列有界.

证明　设序列$\{u_j\}$满足 $I_\lambda(u_j)\to c$ 且 $I'_\lambda(u_j)\to 0$. 假设$\{u_j\}$无界. 令 $v_j=\dfrac{u_j}{\|u_j\|_\lambda}$,则有 $\|v_j\|_\lambda=1$.

不妨设在 E_λ 中 $v_j\rightharpoonup v$ 且在 $L_{\mathrm{loc}}^p(\mathbf{R}^N)$中 $v_j\to v$.

首先证 $v\neq 0$. 事实上,如果 $v=0$,则存在常数 C 使得

$$o(1)=\frac{I'_\lambda(u_j)}{\|u_j\|_\lambda^2}u_j=1-\int_{\mathbf{R}^N}\frac{f(\boldsymbol{x},u_j)}{u_j}v_j^2 2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant 1-C\int_{\mathbf{R}^N}v_j^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

由引理 2,当 λ 充分大时,对于 $\varepsilon>0$ 存在 r_ε 使得 $\int_{B_{R_\varepsilon}^c}v_j^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\varepsilon$. 又由于在 $L^2(B_{r_\varepsilon})$中 $v_j\rightharpoonup 0$,所以由式(5)可得 $o(1)\geqslant 1-C\varepsilon$. 矛盾. 从而 $v\neq 0$.

$\forall\psi\in C_0^\infty$,有

$$o(1)=\frac{I'_\lambda(u_j)}{\|u_j\|_\lambda}\psi=(v_j,\psi)_\lambda-(B_\infty(\boldsymbol{x})v_j,\psi)_{L^2}-\int_{\mathbf{R}^N}\frac{r(\boldsymbol{x},u_j)}{u_j}v_j\psi\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

令 $j\to+\infty$,则有$(v,\quad\psi)_\lambda-(B_\infty(\boldsymbol{x})v,\psi)_{L^2}=0$ 以及$(-\Delta)^s v+V_\lambda u-B_\infty v=0$. 若条件($f_4$)(i)成立,则有 $v=0$,矛盾. 假设条件(f_4)(ii)成立,即存在 $\alpha>0$ 使得 $\hat{F}(\boldsymbol{x},u)\geqslant\delta_0$ 对于$|u|\geqslant\alpha$ 成立. 由 $\hat{F}(\boldsymbol{x},u)>0$,可得

$$C\geqslant I_\lambda(u_j)-\frac{1}{2}I'_\lambda(u_j)u_j=\iint_{\mathbf{R}^{2N}}\hat{F}(\boldsymbol{x},u_j)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\int_{|u_j|\geqslant\alpha}\hat{F}(\boldsymbol{x},u_j)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant\delta_0|\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N:|u_j|\geqslant\alpha|.$$

因此,$|\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N:|u_j|\geqslant\alpha|\leqslant\dfrac{C}{\delta_0}$. 此外,存在$\beta>0$ 和集合 $\varXi\subset\mathbf{R}^N$ 使得$|v(\boldsymbol{x})|\geqslant 2\beta$ 和$\dfrac{2C}{\delta_0}\leqslant|\varXi|<\infty$. 根据 Egoroff 定理,存在集合 $\varXi'\subset\varXi$ 满足$|\varXi'|>\dfrac{C}{\delta_0}$,使得 $v_j(\boldsymbol{x})\to v(\boldsymbol{x})$关于 $\varXi'$一致. 因此,$|u_j(\boldsymbol{x})|\geqslant\alpha$, $\forall\boldsymbol{x}\in\varXi'$ 且对于几乎所有的 j 成立. 从而,

$$\frac{C}{\delta_0}<|\varXi'|\leqslant|\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^N:|u_j|\geqslant\alpha|\leqslant\frac{C}{\delta_0},$$

矛盾. 综上所述,$\{u_j\}$在 E_λ 中有界. 证毕.

引理 6　设定理 1 的条件都成立,则有 I_λ 满足(PS)条件.

证明　设$\{u_j\}\subset E_\lambda$ 是 I_λ 的(PS)序列. 由引理 5,$\{u_j\}$在 E_λ 中有界. 不妨设在 E_λ 中 $u_j\rightharpoonup u$,且在 $L_{\mathrm{loc}}^p(\mathbf{R}^N)$中 $u_j\to u$. 令 $w_j=u_j-u$,则有 E_λ 中 $w_j\rightharpoonup 0$ 且在 $L_{\mathrm{loc}}^p(\mathbf{R}^N)$中 $w_j\to w$. 从而,

$$I'_\lambda(u_j)w_j=(u_j,w_j)_\lambda-\int_{\mathbf{R}^{2N}}f(\boldsymbol{x},u_j)w_j\mathrm{d}\boldsymbol{x}=o(1)+(w_j,w_j)_\lambda-\int_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{f(\boldsymbol{x},u_j)}{u_j}w_j^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\geqslant o(1)+\|w_j\|_\lambda^2-C\|w_j\|_{L^2(\mathbf{R}^N)}^2 \tag{6}$$

根据引理 2,当 λ 充分大时,对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 R_ε 使得 $\int_{B_{R_\varepsilon}^c}w_j^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\varepsilon\|w_j\|_\lambda^2$. 此外,$\|w_j\|_{L^2(B_{r_\varepsilon}^c)}^2\to 0$. 因此,从式(6)可得 $o(1)\geqslant(1-C\varepsilon)\|w_j\|_\lambda^2$,则有在 E_λ 中$\|w_j\|_\lambda^2\to 0$. 引理得证.

定理 1 的证明　根据引理 4 可得,定理 2 的条件($\varPhi_1$)成立且有 $\dim G_1=\zeta$. 令 $G_2=E_\lambda$,则有 $\mathrm{codim}\ G_2=0$,

且引理 3 说明条件(Φ_1)成立. 引理 5 和引理 6 说明,当 λ 充分大时 I_λ 满足(PS)条件. 由 $f(\boldsymbol{x},u)$ 关于 u 是奇函数知 I_λ 是偶函数. 因此,I_λ 具有至少 ζ 对非平凡的临界点. 证毕.

[参考文献]

[1] LASKIN N. Fractional quantum mechanics and path integrals[J]. Physics letters, 2000, A 269:298-305.
[2] AMBROSIO V, HAJAIEJ H. Multiple solutions for a class of nonhomogeneous fractional Schrödinger equations in $\mathbf{R}^N$[J]. Journal of dynamics and differential equations, 2018, 30:1119-1143.
[3] CHANG X. Ground state solutions of asymptotically linear fractional Schrödinger equation[J]. Journal of mathematical physics, 2013, 54:061504.
[4] CHANG X, WANG Z Q. Ground state of scalar field equations involving a fractional Laplacian with general nonlinearity[J]. Nonlinearity, 2013, 26:479-494.
[5] FELMER P, QUAAS A, TAN J. Positive solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the fractional Laplacian[J]. Proceedings of the Royal Society A, 2012, 142:1237-1262.
[6] LIU Z, LUO H, ZHANG Z. Dancer-Fucik spectrum for fractional Schrödinger operators with a steep potential well on R^N[J]. Nonlinear analysis, 2019, 189:1-26.
[7] SECCHI S. Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in R^N[J]. Journal of mathematical physics, 2013, 54:031501.
[8] WAN Y, WANG Z. Bound state for fractional Schrödinger equation with saturable nonlinearity[J]. Applied mathematics and computation, 2016, 273:735-740.
[9] YANG L, LIU Z. Multiplicity and concentration of solutions for fractional Schrödinger equation with sublinear perturbation and steep potential well[J]. Computers and mathematics with applications, 2016, 72:1629-1640.
[10] BARTSCH T, PANKOV A, WANG Z Q. Nonlinear schrödinger equations with steep potential well[J]. Communications in contemporary mathematics, 2001, 3:549-569.
[11] HEERDEN F A. Multiple solutions for a Schrödinger type equation with an asymptotically linear term[J]. Nonlinear analysis, 2003, 55:739-758.
[12] LIU Z L, HEERDEN F A, WANG Z Q. Nodal type bound states of Schrödinger equations via invariant set and minimax methods[J]. Journal of differential equations, 2005, 214:358-390.
[13] JIANG Y, ZHOU H. Schrödinger-Poisson system with steep potential well[J]. Journal of differential equations, 2011, 251:582-608.
[14] ZHAO L, LIU H, ZHAO F. Existence and concentration of solutions for the Schrödinger-Poisson equations with steep potential well[J]. Journal of differential equations, 2013, 255:1-23.
[15] SUN J, WU T. Ground state solutions for an indefinite Krichhoff type problem with steep potential[J]. Journal of differential equations, 2015, 256:1771-1792.
[16] SERVADEI R, VALDINOCI E. Variational methods for non-local operators of elliptic type[J]. Discrete continuous dynamical systems, 2013, 33:2105-2137.
[17] ZHAO F, ZHAO L, DING Y. Existence and multiplicity of solutions for a non-periodic Schrödinger equation[J]. Nonlinear analysis, 2008, 69:3671-3678.
[18] STRUWE M. Variational methods: applications to nonlinear partial differential equations and hamiltonian systems[M]. Fourth Edition. Springer, Berlin, New York, 2008.

[责任编辑:陆炳新]