doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.01.002

半群的 n 维区间值模糊子半群

宋爱丽,王丰效

(喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什 844000)

[**摘要**] 半群的模糊子半群是半群模糊理论的一个重要研究领域. 结合 n 维模糊集和区间值模糊集的概念引入了 n 维区间值模糊集的概念,并应用于半群,引入了半群的 n 维区间值模糊子半群的概念. 讨论了半群的 n 维区间值模糊子半群的基本性质. 给出了半群的 n 维区间值模糊子半群与区间值模糊子半群及半群的子半群的关系. 证明了半群的 n 维区间值模糊子半群的交和直积仍然是 n 维区间值模糊子半群.

[**关键词**] 半群,n 维模糊集,区间值模糊集,n 维区间值模糊子半群,直积

[**中图分类号**]O159 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2023)01-0006-05

n-Dimensional Interval Valued Fuzzy Subsemigroup in Semigroups

Song Aili,Wang Fengxiao

(College of Mathematics and Statistics,Kashi University,Xinjiang 844000,China)

Abstract:Fuzzy subsemigroups of semigroups are an important research field of semigroup fuzzy theory. Combining the concepts of n-dimensional fuzzy sets and interval valued fuzzy sets,the concept of n-dimensional interval valued fuzzy sets is introduced and applied to semigroups. The concept of n-dimensional interval valued fuzzy subsemigroups of semigroups is introduced. The basic properties of n-dimensional interval valued fuzzy subsemigroups of semigroups are discussed. The relations between n-dimensional interval valued fuzzy subsemigroups, interval valued fuzzy subsemigroups and subsemigroups of semigroups are given. It is proved that the intersection and direct product of n-dimensional interval valued fuzzy subsemigroups of semigroups are still n-dimensional interval valued fuzzy subsemigroups.

Key words:semigroup,n-dimensional fuzzy set,interval valued fuzzy set,n-dimensional interval valued fuzzy subsemigroup, direct product

作为经典模糊集的推广,双极值模糊集、直觉模糊集和区间值模糊集的概念被提出,丰富了模糊集的相关理论. 随后,双极值模糊集、区间值模糊集、直觉模糊集等理论被广泛应用于代数系统,如群、半群、环、坡代数、$N(2,2,0)$代数、B-代数等代数系统[1-6]. 文献[7]引入了 n 维模糊集的概念,讨论了它的相关性质和运算. 文献[8]将模糊集应用于半群,研究了半群的几类模糊理想的特征. 文献[9]详细介绍了模糊半群理论. 文献[10-13]分别讨论了半群的区间值模糊子半群、区间值直觉模糊子半群、区间值模糊理想、区间值直觉模糊理想的相关特性. 作为模糊子半群和模糊理想的推广,带限度(λ,μ)的模糊子半群和模糊理想被应用于半群等代数系统[14-15]. 本文结合 n 维模糊集和区间值模糊集的概念,给出了 n 维区间值模糊集的概念,并将 n 维区间值模糊集的概念应用于半群,引入了半群的 n 维区间值模糊子半群的概念,并讨论了它的相关特性.

1 预备知识

为了讨论方便,先给出双极值模糊集等的相关概念.

非空集 X 的区间值模糊集记为 $M_A(x)=[M_A^L,M_A^U]$,$M_A:X\to D[0,1]$,其中 $D[0,1]$是区间$[0,1]$的子区间. 对于任意 $D_1=[a_1,b_1]\subset[0,1]$,$D_2=[a_2,b_2]\subset[0,1]$,规定

收稿日期:2022-06-15.

基金项目:新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2018D01A02).

通讯作者:宋爱丽,副教授,研究方向:模糊子代数研究. E-mail:sal220@sohu.com

$$D_1 \wedge' D_2 = [\min(a_1,a_2),\min(b_1,b_2)],D_1 \vee' D_2 = [\max(a_1,a_2),\max(b_1,b_2)],$$

$D_1 \geqslant D_2$ 当且仅当 $a_1 \geqslant a_2, b_1 \geqslant b_2$.

定义 1[8] 假设 X 是非空集合,令 $L_n = \{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid 0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 1\}$,称 $\lambda: X \to L_n$ 为 X 上的 n 维模糊集.

定义 2[3] 半群 S 上的模糊集 μ 称为模糊子半群,如果对任意 $x,y \in S$ 有 $\mu(xy) \geqslant \min(\mu(x),\mu(y))$.

定义 3[3] 半群 S 上的模糊集 M_A 称为区间值模糊子半群,如果对任意 $x,y \in S$ 有

$$M_A(xy) \geqslant M_A(x) \wedge' M_A(y).$$

定义 4[8] 半群 S 上的 n 维模糊集 $\lambda = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 n 维模糊子半群,如果对任意 $x,y \in S$ 有 $\lambda(xy) \geqslant \lambda(x) \wedge \lambda(y)$,即就是 $a_i(xy) \geqslant a_i(x) \wedge a_i(y), i = 1,2,\cdots,n$.

2 半群的 *n*-维区间值模糊子半群

定义 5 假设 X 是非空集,集合 $IV_n = \{(A_1,A_2,\cdots,A_n) \mid [0,0] \leqslant A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_n \leqslant [1,1]\}$,其中 $A_i \subseteq [0,1], i = 1,2,\cdots,n$. 称 $\vec{A}: X \to IV_n$ 为非空集 X 上的 n 维区间值模糊集.

由定义 1 可知,1-维区间值模糊集就是通常的区间值模糊集. 如果区间 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 退化成一个数,则 n 维区间值模糊集就是 n 维区间值模糊集. 因此 n 维区间值模糊集既是区间值模糊集的推广,又是 n 维模糊集的推广.

为了方便起见,用 $\vec{A} = (A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 表示 n 维区间值模糊集,并规定 n 维区间值模糊集的基本运算如下:

假设 $\vec{A} = (A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 和 $\vec{B} = (B_1,B_2,\cdots,B_n)$ 是非空集 X 上的 n 维区间值模糊集,规定:

(1) $\vec{A} \leqslant \vec{B} \Leftrightarrow A_i \leqslant B_i, i = 1,2,\cdots,n$.

(2) $\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_1 \wedge' B_1, A_2 \wedge' B_2, \cdots, A_n \wedge' B_n)$, $\vec{A} \vee \vec{B} = (A_1 \vee' B_1, A_2 \vee' B_2, \cdots, A_n \vee' B_n)$.

定义 6 假设 $\vec{A} = (A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 上的 n 维区间值模糊集,如果对任意 $x,y \in S$ 有

$$\vec{A}(x * y) \geqslant \vec{A}(x) \wedge \vec{A}(y),\text{即就是 } A_i(xy) \geqslant A_i(x) \wedge' A_i(y), i = 1,2,\cdots,n,$$

则称 $\vec{A} = (A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群.

由定义 3 可知,如果 $\vec{A} = (A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则 $A_i, i = 1,2,\cdots,n$ 都是半群 S 的区间值模糊子半群.

定理 1 假设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是半群 S 的区间值模糊子半群,且 $A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_n$,则 n 维区间值模糊集 $\vec{A} = (A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群.

例 1 假设 $S = \{0,1,2,3\}$,S 的二元运算·如下表:

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	0	3

则 $(S,\cdot)$ 是半群. 定义 S 的 4-维区间值模糊 $\vec{A}$ 为

$$\vec{A}(0) = ([0.62,0.63],[0.63,0.67],[0.67,0.70],[0.70,0.90]),$$

$$\vec{A}(1) = ([0.40,0.42],[0.43,0.47],[0.47,0.48],[0.48,0.50]),$$

$$\vec{A}(2) = ([0.50,0.52],[0.53,0.57],[0.57,0.67],[0.67,0.70]),$$

$$\vec{A}(3) = ([0.40,0.42],[0.43,0.47],[0.47,0.48],[0.48,0.50]).$$

通过简单计算验证可知,$\vec{A}$ 为 S 上的 4-维区间值模糊子半群.

定义 S 的 4-维区间值模糊集 $\vec{B}$ 为

$$\vec{B}(0) = ([0.22,0.23],[0.23,0.27],[0.27,0.30],[0.30,0.40]),$$

$$\vec{B}(1) = ([0.40,0.42],[0.43,0.47],[0.47,0.48],[0.48,0.50]),$$

$$\vec{B}(2) = ([0.30,0.35],[0.33,0.37],[0.37,0.47],[0.47,0.60]),$$

$$\vec{B}(3) = ([0.40,0.42],[0.43,0.47],[0.47,0.48],[0.50,0.60]).$$

则 $\vec{B}$ 不是 S 的 4-维区间值模糊子半群,这是由于 $\vec{B}(2*3)<\vec{B}(2)\wedge\vec{B}(3)$.

定理 2　假设 $\vec{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 上的 n 维区间值模糊集,则 $\vec{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群的充分必要条件是 $\vec{A}_L=(A_1^L,A_2^L,\cdots,A_n^L)$ 和 $\vec{A}_U=(A_1^U,A_2^U,\cdots,A_n^U)$ 都是半群 S 的 n 维模糊子半群. 这里 $A_i=[A_i^L,A_i^U]$, $i=1,2,\cdots,n$.

证明　若 $\vec{A}$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则对于任意 $x,y\in S$ 有 $\vec{A}(x*y)\geqslant\vec{A}(x)\wedge\vec{A}(y)$,也就是

$$[A_i^L(xy),A_i^U(xy)]=A_i(xy)\geqslant A_i(x)\wedge A_i(y)=[A_i^L(x),A_i^U(x)]\wedge[A_i^L(y),A_i^U(y)].$$

从而对任意 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $A_i^L(xy)\geqslant A_i^L(x)\wedge A_i^L(y)$, $A_i^U(xy)\geqslant A_i^U(x)\wedge A_i^U(y)$,

$$A_1^L\leqslant A_2^L\leqslant\cdots\leqslant A_n^L,A_1^U\leqslant A_2^U\leqslant\cdots\leqslant A_n^U,$$

因此 $\vec{A}_L=(A_1^L,A_2^L,\cdots,A_n^L)$ 和 $\vec{A}_U=(A_1^U,A_2^U,\cdots,A_n^U)$ 都是半群 S 的 n 维模糊子半群.

反过来,如果 $\vec{A}_L=(A_1^L,A_2^L,\cdots,A_n^L)$ 和 $\vec{A}_U=(A_1^U,A_2^U,\cdots,A_n^U)$ 都是半群 S 的 n 维模糊子半群,则对于任意 $x,y\in S$,有 $A_i^L(xy)\geqslant A_i^L(x)\wedge A_i^L(y)$, $A_i^U(xy)\geqslant A_i^U(x)\wedge A_i^U(y)$. 因此 $\vec{A}(x*y)\geqslant\vec{A}(x)\wedge\vec{A}(y)$.

又由于 $A_1^L\leqslant A_2^L\leqslant\cdots\leqslant A_n^L$, $A_1^U\leqslant A_2^U\leqslant\cdots\leqslant A_n^U$,从而 $\vec{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 上的 n 维区间值模糊集. 故 $\vec{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 上的 n 维区间值模糊子半群.

命题 1　设 $\vec{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)=([A_1^L,A_1^U],[A_2^L,A_2^U],\cdots,[A_n^L,A_n^U])$ 是半群 S 上的 n 维区间值模糊子半群. 记 $0\leqslant\varepsilon\leqslant1-A_n^U$, $0\leqslant\delta\leqslant A_1^L$,则半群 S 上的 n 维区间值模糊集

$$\vec{A}_{(-\delta,\varepsilon)}=([A_1^L-\delta,A_1^U+\varepsilon],[A_2^L-\delta,A_2^U+\varepsilon],\cdots,[A_n^L-\delta,A_n^U+\varepsilon]),$$

$$\vec{A}_{\varepsilon}=([A_1^L+\varepsilon,A_1^U+\varepsilon],[A_2^L+\varepsilon,A_2^U+\varepsilon],\cdots,[A_n^L+\varepsilon,A_n^U+\varepsilon])$$

也是半群 S 上的 n 维区间值模糊子半群.

命题 2　假设 $\vec{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 上的 n 维区间值模糊子半群,则 $\vec{A}=(A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik})$ 是半群 S 的 k 维区间值模糊子半群($2\leqslant k\leqslant n-1$). 这里 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik}$ 是 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中按顺序任选的 k 个.

定理 3　半群 S 上的 n 维区间值模糊集 $\vec{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是 n 维区间值模糊子半群的充分必要条件是对任意 $T\in IV_n$,非空集 $U(\vec{A},T)=\{x\in S|\vec{A}(x)\geqslant T\}$ 是半群 S 的子半群.

证明(必要性)　如果 $\vec{A}=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,对任意的 $x,y\in S$ 有 $\vec{A}(x*y)\geqslant\vec{A}(x)\wedge\vec{A}(y)$. 若 $x,y\in U(\vec{A},T)$,则 $\vec{A}(x)\geqslant T$, $\vec{A}(y)\geqslant T$,从而 $\vec{A}(x*y)\geqslant\vec{A}(x)\wedge\vec{A}(y)\geqslant T$. 即就是 $x*y\in U(\vec{A},T)$. 故非空集 $U(\vec{A},T)=\{x\in S|\vec{A}(x)\geqslant T\}$ 是半群 S 的子半群.

(充分性)设非空集 $U(\vec{A},T)$ 是半群 S 的子半群. 如果存在 $a,b\in S$,使得 $\vec{A}(ab)<\vec{A}(a)\wedge\vec{A}(b)$.

选择 $T_1\in IV_n$ 使得 $\vec{A}(ab)<T_1\leqslant\vec{A}(a)\wedge\vec{A}(b)$. 从而 $a,b\in U(\vec{A},T_1)$,但是 $a*b\notin U(\vec{A},T_1)$,这与非空集 $U(\vec{A},T_1)$ 是 S 的子半群矛盾. 因此,对任意 $x,y\in S$,都有 $\vec{A}(xy)\geqslant\vec{A}(x)\wedge\vec{A}(y)$. 所以 $\vec{A}$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群.

定理 4　若 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 都是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的交 $\vec{A}\cap\vec{B}$ 也是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群. 这里 $(\vec{A}\cap\vec{B})(x)=\vec{A}(x)\wedge\vec{B}(x)$.

证明　由 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的交 $\vec{A}\cap\vec{B}$ 的定义可知,两个 n 维区间值模糊集的交仍然是 n 维区间值模糊集. 如果 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 都是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则对于任意的 $x,y\in S$,有

$$\vec{A}(x*y)\geqslant\vec{A}(x)\wedge\vec{A}(y),\vec{B}(x*y)\geqslant\vec{B}(x)\wedge\vec{B}(y),$$

因此

$$(\vec{A}\cap\vec{B})(x*y)=\vec{A}(x*y)\wedge\vec{B}(x*y)\geqslant(\vec{A}(x)\wedge\vec{A}(y))\wedge(\vec{B}(x)\wedge\vec{B}(y))=$$
$$(\vec{A}(x)\wedge\vec{B}(x))\wedge(\vec{A}(y)\wedge\vec{B}(y))=(\vec{A}\cap\vec{B})(x)\wedge(\vec{A}\cap\vec{B})(y).$$

因此 $\vec{A}\cap\vec{B}$ 也是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群.

设 I 是半群 S 的非空子集,定义半群 S 的 n 维区间值模糊集 $\vec{C}$ 为

$$\vec{C}(x)=T\in IV_n,(x\in I);\vec{C}(x)=([0,0],[0,0],\cdots,[0,0]),(x\notin I).$$

定理 5　设 I 是半群 S 的非空子集,则 $\vec{C}$ 为半群 S 的 n 维区间值模糊子半群的充分必要条件是非空集

I 是半群 S 的子半群.

证明 若 $\vec{C}$ 为半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则对于任意的 $x,y\in S$,$\vec{C}(x*y)\geqslant\vec{C}(x)\wedge\vec{C}(y)$.

对于任意的 $x,y\in I$,有 $\vec{C}(x)=T$,$\vec{C}(y)=T$. 从而 $\vec{C}(x*y)\geqslant\vec{C}(x)\wedge\vec{C}(y)=T\wedge T=T$,也就是说

$$\vec{C}(x*y)=T,\text{即 } x*y\in I.\text{ 故 } I \text{ 是半群 } S \text{ 的子半群.}$$

反过来,若 I 是半群 S 的非空子集. 如果 $x,y\in I$,则 $x*y\in I$,从而 $\vec{C}(x*y)=\vec{C}(x)\wedge\vec{C}(y)=T$. 如果 $x\notin I$ 或者 $y\notin I$,则 $\vec{C}(x)=([0,0],[0,0],\cdots,[0,0])$或者 $\vec{C}(y)=([0,0],[0,0],\cdots,[0,0])$. 因此

$$\vec{C}(x*y)\geqslant([0,0],[0,0],\cdots,[0,0])=\vec{C}(x)\wedge\vec{C}(y).$$

因此 $\vec{C}$ 为半群 S 的 n 维区间值模糊子半群.

命题 3 设 I 是半群 S 的子半群,则一定存在半群 S 的 n 维区间值模糊子半群 $\vec{D}$,它的水平截集满足 $U(\vec{A},[1,1])=\{x\in S|\vec{A}(x)=[1,1]\}=I$.

下面,我们讨论半群的 n 维区间值模糊子半群直积的性质. 假设 S 和 R 是两个半群,定义 $S\times R$ 上的二元运算$(x_1,x_2)(y_1,y_2)=(x_1y_1,x_2y_2)$,$(x_1,x_2)$,$(y_1,y_2)\in S\times R$,则 $S\times R$ 也是半群. 如果 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 分别是 S 和 R 上的 n 维区间值模糊集,定义 $S\times R$ 上的 n 维区间值模糊集 $\vec{A}\times\vec{B}$ 为

$$(\vec{A}\times\vec{B})(x,y)=\vec{A}(x)\wedge\vec{B}(y),(x,y)\in S\times R.$$

定理 6 假设 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 分别是半群 S 和 R 上的 n 维区间值模糊子半群,则 $\vec{A}\times\vec{B}$ 是半群 $S\times R$ 的 n 维区间值模糊子半群.

证明 对于任意的(x_1,y_1),$(x_2,y_2)\in S\times R$,有$(\vec{A}\times\vec{B})((x_1,y_1)(x_2,y_2))=(\vec{A}\times\vec{B})(x_1x_2,y_1y_2)$.

由于 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 分别是半群 S 和 R 上的 n 维区间值模糊子半群,因此

$$\vec{A}(x_1x_2)\geqslant\vec{A}(x_1)\wedge\vec{A}(x_2),\vec{B}(y_1y_2)\geqslant\vec{B}(y_1)\wedge\vec{B}(y_2),$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})((x_1,y_1)(x_2,y_2))=(\vec{A}\times\vec{B})(x_1x_2,y_1y_2)\geqslant(\vec{A}(x_1)\wedge\vec{A}(x_2))\wedge(\vec{B}(y_1)\wedge\vec{B}(y_2))=$$

$$(\vec{A}(x_1)\wedge\vec{B}(y_1))\wedge(\vec{A}(x_2)\wedge\vec{B}(y_2))=(\vec{A}\times\vec{B})(x_1,y_1)\wedge(\vec{A}\times\vec{B})(x_2,y_2).$$

因此 $\vec{A}\times\vec{B}$ 是半群 $S\times R$ 的 n 维区间值模糊子半群.

命题 4 假设 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则 $\vec{A}\times\vec{B}$ 是半群 $S\times S$ 的 n 维区间值模糊子半群.

定理 7 假设 $\vec{A}\times\vec{B}$ 是半群 $S\times R$ 的 n 维区间值模糊子半群,则 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 分别是半群的 S 和 R 的 n 维区间值模糊子半群. 这里

$$\tilde{A}(x)=\max\{(\vec{A}\times\vec{B})(x,z)|z\in R\},\tilde{B}(y)=\max\{(\vec{A}\times\vec{B})(z,y)|z\in S\}.$$

证明 假设 $\vec{A}\times\vec{B}$ 是半群 $S\times R$ 的 n 维区间值模糊子半群,则对于任意(x_1,y_1),$(x_2,y_2)\in S\times R$,有

$$(\vec{A}\times\vec{B})((x_1,y_1)*(x_2,y_2))\geqslant(\vec{A}\times\vec{B})(x_1,y_1)\wedge(\vec{A}\times\vec{B})(x_2,y_2).$$

因此

$$\tilde{A}(x_1x_2)=\max\{(\vec{A}\times\vec{B})(x_1x_2,z)|z\in R\}=\max\{(\vec{A}\times\vec{B})(x_1x_2,z_1z_2)|z_1,z_2\in R\}=$$

$$\max\{(\vec{A}\times\vec{B})((x_1,z_1)*(x_2,z_2))|z_1,z_2\in R\}\geqslant$$

$$\max\{\vec{A}(x_1,z_1)\wedge\vec{B}(x_2,z_2)|z_1,z_2\in R\}=\max\{\vec{A}(x_1,z_1)|z_1\in R\}\wedge\max\{\vec{B}(x_2,z_2)|z_2\in R\}=\tilde{A}(x_1)\wedge\tilde{A}(x_2),$$

$$\tilde{B}(y_1y_2)=\max\{(\vec{A}\times\vec{B})(z,y_1y_2)|z\in S\}=\max\{(\vec{A}\times\vec{B})(z_1z_2,y_1y_2)|z_1,z_2\in S\}=$$

$$\max\{(\vec{A}\times\vec{B})((z_1,y_1)*(z_2,y_2))|z_1,z_2\in S\}\geqslant$$

$$\max\{\vec{A}(z_1,y_1)\wedge\vec{B}(z_2,y_2)|z_1,z_2\in S\}=\max\{\vec{A}(z_1,y_1)|z_1\in S\}\wedge\max\{\vec{B}(z_2,y_2)|z_2\in S\}=\tilde{B}(y_1)\wedge\tilde{B}(y_2).$$

因此 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 分别是半群的 S 和 R 的 n 维区间值模糊子半群.

定理 8 假设 f 是半群 S 的自同态,$\vec{A}$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则 $\vec{A}^f$ 也是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群. 这里 $\vec{A}^f(x)=\vec{A}(f(x))$.

证明 设 f 是半群 S 的自同态,则对于任意 $x,y\in S$ 有 $f(x*y)=f(x)*f(y)$. $\vec{A}$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,从而

$$\vec{A}^f(x*y)=\vec{A}(f(x*y))=\vec{A}(f(x)*f(y))\geqslant\vec{A}(f(x))\wedge\vec{A}(f(y))=\vec{A}^f(x)\wedge\vec{A}^f(y).$$

由定义 3 可知 $\vec{A}^f$ 也是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群.

定理 9　假设 $f:S\to R$ 是半群 S 到 R 的满同态. 如果 $\vec{B}$ 是半群 R 的 n 维区间值模糊集. 则 $\vec{B}^f$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群的充分必要条件是 $\vec{B}$ 是半群 R 的 n 维区间值模糊子半群.

证明　对于任意的 $y_1,y_2\in R$,存在 $x_1,x_2\in S$ 使得 $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$. 假设 $\vec{B}^f$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则 $\vec{B}^f(xy)\geqslant\vec{B}^f(x)\wedge\vec{B}^f(y),x,y\in S$. 因此

$$\vec{B}(y_1*y_2)=\vec{B}(f(x_1)*f(x_2))=\vec{B}(f(x_1*x_2))=\vec{B}^f(x_1*x_2)\geqslant$$
$$\vec{B}^f(x_1)\wedge\vec{B}^f(x_2)=\vec{B}(f(x_1))\wedge\vec{B}(f(x_2))=\vec{B}(y_1)\wedge\vec{B}(y_2).$$

故 $\vec{B}$ 是半群 R 的 n 维区间值模糊子半群.

反过来,对于任意的 $y_1,y_2\in R$,存在 $x_1,x_2\in S$ 使得 $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$. 假设 $\vec{B}$ 是半群 R 的 n 维区间值模糊子半群,则 $\vec{B}(y_1*y_2)\geqslant\vec{B}(y_1)\wedge\vec{B}(y_2)$. 因此

$$\vec{B}^f(x_1*x_2)=\vec{B}(f(x_1*x_2))=\vec{B}(f(x_1)*f(x_2))=\vec{B}(y_1*y_2)\geqslant$$
$$\vec{B}(y_1)\wedge\vec{B}(y_2)=\vec{B}(f(x_1))\wedge\vec{B}(f(x_2))=\vec{B}^f(x_1)\wedge\vec{B}^f(x_2),$$

所以 $\vec{B}^f$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群.

定理 10　假设 $f:S\to R$ 是半群 S 到 R 的满同态. 如果 $\vec{A}$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,则 $f(\vec{A})$ 是半群 R 的 n 维区间值模糊子半群. 这里 $f(\vec{A})(y)=\sup\{\vec{A}(x)\mid f(x)=y\}$.

证明　假设 $f:S\to R$ 是半群 S 到 R 的满同态,则对于 $y_1,y_2\in R$,存在 $x_1,x_2\in S$ 使得 $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$. 由于 $\vec{A}$ 是半群 S 的 n 维区间值模糊子半群,因此

$$f(\vec{A})(y_1*y_2)=\sup\{\vec{A}(x_1*x_2)\mid f(x_1*x_2)=y_1*y_2\}=\sup\{\vec{A}(x_1*x_2)\mid f(x_1)*f(x_2)=y_1*y_2\}=$$
$$\sup\{\vec{A}(x_1*x_2)\mid f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2\}\geqslant$$
$$\sup\{\vec{A}(x_1)\wedge\vec{A}(x_2)\mid f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2\}=(\sup\{\vec{A}(x_1)\mid f(x_1)=y_1\})\wedge(\sup\{\vec{A}(x_2)\mid f(x_2)=y_2\})=$$
$$f(\vec{A})(y_1)\wedge f(\vec{A})(y_2),$$

所以 $f(\vec{A})$ 是半群 R 的 n 维区间值模糊子半群.

3　结论

本文引入了半群的 n 维区间值模糊子半群的概念,并研究了它的一些重要性质. 这些定义和主要结果可以类似地推广到其他一些代数系统,如 BG 代数、B-代数和李代数. 本文的研究工作能为进一步研究半群理论奠定基础.

[参考文献]

[1]　ATANASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and systems,1986,20:87-96.

[2]　ATANASSOV K. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy sets and systems,1989,31:343-349.

[3]　王丰效. 半群的(U,V)区间值模糊双理想[J]. 吉林大学学报(自然科学版),2019,57(3):487-492.

[4]　WANG F X. Inter-valued intuitionistic fuzzy ideals of B-algebras[J]. Journal of intelligent and fuzzy systems,2017,33(4):2609-2615.

[5]　MASARWAH A A,AHMAD A G. *n*-Polar fuzzy ideals of BCK/BCI-algebras[J]. Journal of King Saud University,2018,(1):1-7.

[6]　LI X S,YUAN X H,LEE E S. The three dimensional fuzzy sets and their cut sets[J]. Computers and mathematics with applications,2009,58:1349-1359.

[7]　SHANG Y G,YUAN X H,LEE E S. The *n*-dimensional fuzzy sets and Zadeh fuzzy sets based on a finite valued fuzzy sets[J]. Computers and mathematics with applications,2010,60:442-463.

[8]　SHABIR M,RAFIQ M. On *n*-dimensional Fuzzy Ideals of Semigroups[J]. World applied sciences journal,2012,18(11):1546-1555.

[9]　KIM K H,JUN Y B. Intuitionistic fuzzy interior ideals of semigroups[J]. International journal of mathematics,2001,27:261-267.

(下转第17页)

1492-1508.

[10] LEPELTIER J,SAN MARTIN J. Backward stochastic differential equations with continuous coefficients[J]. Statist. Probab. Lett.,1997,34:425-430.

[11] GENG X,QIAN Z,YANG D. G-Brownian motion as rough paths and differential equations driven by G-Brownian motion[M]. Sminaire de Probabilits XLVI. Cham,Heidelberg,New York,Dordrecht London:Springer,2014:125-193.(eBook)

[责任编辑:陆炳新]

(上接第 10 页)

[10] KIM K H,JUN Y B. Intuitionistic fuzzy ideals of semigroups[J]. Indian journal of pure and applied mathematics,2002,33:443-449.

[11] KUROKI N. Fuzzy generalized bi-ideals in semigroups[J]. Information sciences,1992,66:235-243.

[12] LAJOS S,JUN Y B. On fuzzy(1,2)-ideals of semigroups[J]. Pure mathematics and applications,1997,8:335-338.

[13] DIB K A,GALHUM N. Fuzzy ideals and fuzzy bi-ideals in fuzzy semigroups[J]. Fuzzy sets and systems,1997,92:103-111.

[14] HONG S M,JUN Y B,MENG J. Fuzzy interior ideals in semigroups[J]. Indian journal of pure and applied mathematics,1995,26:859-863.

[15] HONG Y,FANG X. Characterizing intraregular semigroups by intuitionistic fuzzy sets[J]. Mathware and soft computing,2005,12:121-128.

[责任编辑:陆炳新]