doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.01.004

m-WOD 序列随机加权和的完全收敛性

贺　婕[1],朱春华[2],姚宇恒[1],高启兵[1]

(1.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210046)
(2.南京审计大学统计与数据科学学院,江苏 南京 211815)

[摘要]　在一些宽泛条件下,研究 m-宽象限相依序列(m-WOD)随机加权和的完全收敛性,该结果将现有文献中宽象限相依(WOD)序列的相关结论拓展到 m-WOD 序列的情形.

[关键词]　完全收敛,m-WOD 序列,随机加权和
[中图分类号]O211.4　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2023)01-0018-06

Complete Convergence of Random Weighted Sums of m-WOD Sequences

He Jie[1],Zhu Chunhua[2],Yao Yuheng[1],Gao Qibing[1]

(1.School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210046,China)
(2. School of Statistics and Data Sciences,Nanjing Audit University,Nanjing 211815,China)

Abstract:In this paper,the complete convergence for randomly weighted sums of m-widely orthant dependent(m-WOD, for short) is established under some mild conditions,extending the corresponding results from widely orthant dependent (WOD,for short) sequences to m-WOD sequences.

Key words:complete convergence,m-WOD sequence,randomly weighted sums

经典的概率极限理论往往假定随机变量序列相互独立,并在此基础上讨论随机变量序列的部分序列或部分和最大值序列的渐近理论,这些理论在统计中有着重要的应用. 但实际问题中该假定往往过于严格,如在经济、金融、流行病等数据分析中,数据中常表现出一定的相依性. 因此近年来对不同相依结构随机变量序列的极限理论研究引起众多学者的研究兴趣. 如文献[1-4]分别提出负相协(简记为 NA)、负象限相依(简记为 NOD)、扩展负相依(简记为 END)和宽象限相依(简记为 WOD)随机变量序列概念并对其极限理论展开研究. 为进一步拓展相依性,文献[5]提出更广泛的 m-拓展负相依(简写为 m-END)随机变量序列,而文献[6]提出 m-宽象限相依(简写为 m-WOD)随机变量序列的概念,并且对其诸如部分和序列或部分和的最大序列的渐近理论展开研究. 已有研究表明 NA、NOD、END、WOD 这几类序列后者依次包含前者,参见文[7]. 当 $m=1$,m-END 和 m-WOD 退化为 END 和 WOD 随机序列,所以 m-END 和 m-WOD 随机序列分别是 END 和 WOD 随机序列概念的推广. 因此,m-WOD 是一种比 NA、NOD、END、WOD 和 m-END 随机变量序列更宽泛的相依结构,其极限理论研究也具有重要理论和应用意义.

对于 WOD 随机变量序列,文献[8]给出了 WOD 随机变量序列的完全收敛性及非参数回归模型中加权估计量的完全相合性;文献[9]给出了线性回归模型中 M 估计的强相合性;文献[10]给出了 WOD 随机变量序列随机加权和的收敛性和在线性时不变系统中的应用. 对于 m-WOD 随机变量序列,文献[11]给出了 m-WOD 随机变量序列密度函数和失效率函数核估计的强相合性;文献[6]给出了 m-WOD 随机变量序列误差下非线性回归模型 LS 估计的收敛性;文献[12]给出 m-WOD 随机变量序列移动平均过程的完全收敛性. 但据我们所知,目前针对 m-WOD 随机变量序列的随机权和相关结果尚未建立,本文将对其展开研究.

收稿日期:2022-05-26.
基金项目:国家社会科学基金项目(21BTJ030).
通讯作者:朱春华,博士,副教授,研究方向:概率极限理论. E-mail:zhuchunhua@ nau.edu.cn

1　预备知识及引理

为讨论本文的主要结果,我们介绍一些准备知识:

首先是文献[8]引入了下面的 WOD 的概念.

定义 1　对于随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$,对每个 $n\geqslant 1$,若存在正数 $g_U(n)$ 和 $g_L(n)$,使对所有的 $X_i\in\mathbf{R},1\leqslant i\leqslant n$,有

$$P(X_1>x_1,X_2>x_2,\cdots,X_n>x_n)\leqslant g_U(n)\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x_i)$$

和

$$P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n)\leqslant g_L(n)\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant x_i).$$

则称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$是 WOD(widely orthant dependent)的,其控制系数为 $g(n)=\max\{g_U(n),g_L(n)\}$.

在 WOD 定义给出的基础上,由文献[6]给出了如下的 m-WOD 的定义.

定义 2　如果对某个固定的正整数 m,对任意的 $n\geqslant 2$ 和 $i_1,i_2,\cdots,i_n$,当$|i_k-i_j|\geqslant m,1\leqslant k\neq j\leqslant n$ 时,有 $X_{i_1},X_{i_2},\cdots,X_{i_n}$为 WOD 的,则称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$为 m-WOD(m-widely orthant dependent).

引理 1[13]　假设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为 m-WOD 随机变量序列,其控制系数为$\{g(n),n\geqslant 1\}$,其中 $g(n)=\max\{g_u(n),g_L(n)\}$,若$\{f_n(X_n),n\geqslant 1\}$为非降或非增函数,则$\{f_n(X_n),n\geqslant 1\}$仍为 m-WOD 随机变量序列,其中控制系数仍为$\{g(n),n\geqslant 1\}$.

引理 2[7]　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为 WOD 随机序列,且 $EX_n=0,E|X_n|^p<\infty,n\geqslant 1,p\geqslant 2$,则存在仅与 p 有关的常数 $C_1(p)$和 $C_2(p)$使得

$$E\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{j}X_i\Big|^p\Big)\leqslant C_1(p)(\log n)^p\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^p+C_2(p)g(n)(\log n)^p\Big(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2\Big)^{p/2}.$$

引理 3　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为 m-WOD 随机序列,且 $EX_n=0,E|X_n|^p<\infty,n\geqslant 1,p\geqslant 2$.则存在仅与 m 和 p 有关的常数 $C_1(m,p)$和 $C_2(m,p)$使得:

$$E\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{j}X_i\Big|^p\Big)\leqslant C_1(m,p)(\log n)^p\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^p+C_2(m,p)g(n)(\log n)^p\Big(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2\Big)^{p/2}.$$

证明　对于任意充分大的正整数 n,都存在正整数 i'和 ℓ',$1\leqslant\ell'\leqslant m$,满足 $n=mi'+\ell'$,对于任意的 $1\leqslant j\leqslant n$,都存在 i 与 ℓ 使得 $j=mi+\ell,1\leqslant\ell\leqslant m$,所以

根据 C_r 不等式

$$\begin{aligned}E\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{j}X_i\Big|^p\Big)&=E\Big(\max_{1\leqslant mi+\ell\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{mi+\ell}X_i\Big|^p\Big)\leqslant E\Big(\max_{1\leqslant mi+\ell\leqslant n}\sum_{k=1}^{\ell}\Big|\sum_{t=1}^{i+1}X_{mk+t}\Big|+\max_{1\leqslant mi+\ell\leqslant n}\sum_{k=\ell+1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{i}X_{mk+t}\Big|\Big)^p\leqslant\\&2^{p-1}\Big\{E\Big(\max_{1\leqslant mi+\ell\leqslant n}\sum_{k=1}^{\ell}\Big|\sum_{t=1}^{i+1}X_{mk+t}\Big|\Big)^p+E\Big(\max_{1\leqslant mi+\ell\leqslant n}\sum_{k=\ell+1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{i}X_{mk+t}\Big|\Big)^p\Big\}=\\&2^{p-1}\Big\{E\max_{1\leqslant u\leqslant\ell,1\leqslant v\leqslant i'+1}\Big(\sum_{k=1}^{u}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p+E\max_{\ell+1\leqslant u\leqslant m,1\leqslant v\leqslant i'}\Big(\sum_{k=u+1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p\Big\},\end{aligned}$$

而

$$E\max_{1\leqslant u\leqslant\ell,1\leqslant v\leqslant i'+1}\Big(\sum_{k=1}^{u}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p\leqslant E\Big(\sum_{k=1}^{m}\max_{1\leqslant v\leqslant i'+1}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p\leqslant m^{p-1}\sum_{k=1}^{m}E\Big(\max_{1\leqslant v\leqslant i'+1}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p.$$

同理可证

$$E\max_{\ell+1\leqslant u\leqslant m,1\leqslant v\leqslant i'}\Big(\sum_{k=u+1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p\leqslant m^{p-1}\sum_{k=1}^{m}E\Big(\max_{1\leqslant v\leqslant i'+1}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p.$$

因此

$$\begin{aligned}&2^{p-1}\Big\{E\sum\max_{1\leqslant u\leqslant\ell,1\leqslant v\leqslant i'+1}\Big(\sum_{k=1}^{u}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p+E\max_{\ell+1\leqslant u\leqslant m,1\leqslant v\leqslant i'}\Big(\sum_{k=u+1}^{m}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p\Big\}\leqslant\\&2^pm^{p-1}\sum_{k=1}^{m}E\Big(\max_{1\leqslant v\leqslant i'+1}\Big|\sum_{t=1}^{v}X_{mk+t}\Big|\Big)^p.\end{aligned}$$

根据 m-WOD 的定义和引理 2. 可得

$$2^p m^{p-1}\sum_{k=1}^{m} E\Big(\max_{1\leqslant v\leqslant i'+1}\Big|\sum_{t=1}^{v} X_{mk+t}\Big|\Big)^p \leqslant$$

$$C_1(p)2^p m^{p-1}(\log(i'+1))^p\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{i'+1}E|X_{mk+t}|^p+C_2(p)2^p m^{p-1}g(j)(\log(i'+1))^p\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{t=1}^{i'+1}EX_{mk+t}^2\Big)^{p/2}\leqslant$$

$$C_1(p)2^p m^{p-1}(\log n)^p\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{i'+1}E|X_{mk+t}|^p+C_2(p)2^p m^{p-1}g(n)(\log n)^p\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{t=1}^{i'+1}EX_{mk+t}^2\Big)^{p/2}=:$$

$$C_1(m,p)(\log n)^p\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^p+C_2(m,p)g(n)(\log n)^p\Big(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2\Big)^{p/2}.$$

至此完成引理 3 的证明.

引理 4[10]　设$\{X_n,n\geqslant1\}$为非负独立随机变量序列,$\{Y_n,n\geqslant1\}$为 WOD 随机变量序列.假设$\{X_n,n\geqslant1\}$独立于$\{Y_n,n\geqslant1\}$,则$\{X_nY_n,n\geqslant1\}$仍为 WOD 随机变量,且与$\{Y_n,n\geqslant1\}$具有相同的控制系数.

引理 5　设$\{X_n,n\geqslant1\}$为非负独立随机变量序列,且$\{Y_n,n\geqslant1\}$为 m-WOD 随机变量.假设$\{X_n,n\geqslant1\}$独立于$\{Y_n,n\geqslant1\}$,则$\{X_nY_n,n\geqslant1\}$仍为 m-WOD 随机变量,且与$\{Y_n,n\geqslant1\}$具有相同的控制系数.

证明　由于$\{Y_n,n\geqslant1\}$为 m-WOD 随机变量,所以由定义 2 可知,$\{Y_n,n\geqslant1\}$可以分解为 m 个 WOD 序列,即

$$\{Y_1,Y_{1+m},Y_{1+2m},\cdots\},\{Y_2,Y_{2+m},Y_{2+2m},\cdots\},\cdots,\{Y_m,Y_{2m},Y_{3m},\cdots\}.$$

结合引理 4,可得,

$$\{x_1Y_1,x_{1+m}Y_{1+m},\cdots\},\{x_2Y_2,x_{2+m}Y_{2+m},\cdots\},\cdots,\{x_mY_m,x_{2m}Y_{2m},\cdots\},$$

仍为与$\{Y_n,n\geqslant1\}$具有相同的控制系数的 WOD 随机变量序列,结合 m-WOD 的定义,易得引理 5. 至此完成引理 5 的证明.

引理 6[10]　设$\{X_n,n\geqslant1\}$为 X 随机控制的随机变量序列,则对于所有的 $n\geqslant1,\alpha>0,\beta>0$,有

$$E[|X_n|^\alpha I(|X_n|\leqslant\beta)]\leqslant C_1\{E[|X|^\alpha I(|X|\leqslant\beta)]+\beta^\alpha P(|X|>\beta)\},$$

$$E[|X_n|^\alpha I(|X_n|>\beta)]\leqslant C_2E[|X|^\alpha I(|X|>\beta)].$$

此外,对于所有的 $n\geqslant1$,有 $E|X_n|^\alpha\leqslant C_3E|X|^\alpha$,其中 C_1,C_2,C_3 是不依赖于 n 的正常数.

引理 7[14]　若 ℓ 为无限慢变化函数,则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{m} n^s\ell(n)\leqslant Cm^{s+1}\ell(m)$,其中 $s>-1,m$ 为正整数.

(2) $\sum\limits_{n=m}^{\infty} n^s\ell(n)\leqslant Cm^{s+1}\ell(m)$,其中 $s<-1,m$ 为正整数.

引理 8[14]　若 ℓ 为无限慢变化函数,则

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ell(x+u)}{\ell(x)}=1$,对于每个 $u>0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x^\delta\ell(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}x^{-\delta}\ell(x)=0$ 对于每个 $\delta>0$.

引理 9　若 ℓ_1 和 ℓ_2 都为无限慢变化函数,$h=\ell_1\ell_2$,则 h 为无限慢变化函数.

证明　由于 ℓ_1 和 ℓ_2 都为无限慢变化函数,根据慢变化函数定义可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell_1(tx)}{\ell_1(x)}=1,\lim_{x\to\infty}\frac{\ell_2(tx)}{\ell_2(x)}=1,\quad t>0.$$

而 $h=\ell_1\cdot\ell_2$,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(tx)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ell_1(tx)\ell_2(tx)}{\ell_1(x)\ell_2(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ell_1(tx)}{\ell_1(x)}\lim_{x\to\infty}\frac{\ell_2(tx)}{\ell_2(x)}=1,\quad t>0.$$

因此引理 9 成立. 至此完成引理 9 的证明.

注　对于常数 q,很容易得到 $\ell(n)=(\log(n))^q$ 为无限慢变化函数.

引理 10　若 ℓ 为无限慢变化函数,对于任意的 $\beta<-1$,有:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta\ell(n)<\infty.$$

证明　对于任意的 $\beta<-1$，存在 $\delta>0$，使 $\beta'\triangleq\beta+\delta<-1$. 根据引理 8 的(2)，有

$$\lim_{n\to\infty}n^{\delta}\ell(n)=\infty,\ \lim_{n\to\infty}n^{-\delta}\ell(n)=0.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta}\ell(n)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{\beta'}(n^{-\delta}\ell(n))<\infty.$$

2　主要定理及证明

本小节将给出主要结果及其证明.

定理 1　设 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 为 X 随机控制的 m-WOD 随机变量序列，其中，控制系数满足 $g(n)=O(n^{\lambda})$，$\lambda\geqslant0$，$E|X|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}\ell(|X|^{\frac{1}{\alpha}})<\infty$. $\{A_{nk},1\leqslant k\leqslant n\}$ 是与 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 行独立的随机变量序列，满足

$$\sum_{k=1}^{n}EA_{nk}^2=O(n^{-r}),\tag{1}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|A_{nk}|=o(n^{-\alpha}),\tag{2}$$

且

$$\alpha(p-2)<k_1<\alpha p,k_1\geqslant0,$$

$$\max\left\{\alpha-1,\alpha-\frac{r+1}{2},\alpha-\frac{\alpha p-k_1-r}{2}\right\}<k_2\leqslant1,$$

则对于任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_k\right|\geqslant\varepsilon n^{k_2}\right)<\infty.\tag{3}$$

备注　定理 1 将文献[10]中的 WOD 随机变量序列的相关结果推广到 m-WOD 序列情形.

证明　由于 $A_{nk}X_k=A_{nk}^{+}X_k-A_{nk}^{-}X_k$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_k\right|\geqslant\varepsilon n^{k_2}\right)\leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}^{+}X_k\right|\geqslant\varepsilon n^{k_2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_k^{-}\right|\geqslant\varepsilon n^{k_2}\right).$$

不失一般性，令 $A_{nk}\geqslant0$. 对于任意固定的 n，和 $1\leqslant k\leqslant n$，令

$$X_{nk}(1)=-n^{\alpha}I(X_k<-n^{\alpha})+X_kI(|X_k|\leqslant n^{\alpha})+n^{\alpha}I(X_k>n^{\alpha}),$$

$$X_{nk}(2)=(X_k+n^{\alpha})I(X_k<-n^{\alpha})+(X_k-n^{\alpha})I(X_k>n^{\alpha}),$$

则 $X_k=X_{nk}(1)+X_{nk}(2)$，根据引理 1 知 $\{X_{nk}(1),1\leqslant k\leqslant n\}$ 和 $\{X_{nk}(2),1\leqslant k\leqslant n\}$ 都是 m-WOD 的，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_k\right|\geqslant\varepsilon n^{k_2}\right)\leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(|X_k|\geqslant n^{\alpha})\right)+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_{nk}(1)\right|\geqslant\varepsilon n^{k_2}\right)\leqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)\sum_{k=1}^{n}P(|X_k|\geqslant n^{\alpha})+\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_{nk}(1)\right|\geqslant\varepsilon n^{k_2}\right)=:H_1+H_2.$$

因此，要证明(3)，只要证明 $H_1<\infty$ 和 $H_2<\infty$.

首先，证明 $H_1<\infty$. 根据引理 6 和引理 7，有

$$H_1\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-k_1}\ell(n)P(|X|\geqslant n^{\alpha})=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha p-1-k_1}\ell(n)\sum_{k=n}^{\infty}EI(k^{\alpha}<|X|\leqslant(k+1)^{\alpha})=$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}EI(k^{\alpha}<|X|\leqslant(k+1)^{\alpha})\sum_{n=1}^{k}n^{\alpha p-1-k_1}\ell(n)\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}k^{\alpha p-k_1}\ell(k)EI(k^{\alpha}<|X|\leqslant(k+1)^{\alpha})\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}E|X|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}\ell(|X|^{\frac{1}{\alpha}})I(k^{\alpha}<|X|\leqslant(k+1)^{\alpha})\leqslant CE|X|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}\ell(|X|^{\frac{1}{\alpha}})<\infty.$$

下面证明 $H_2<\infty$.

$$H_2\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_{nk}(1)\right|\geqslant \varepsilon n^{k_2}\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1}\ell(n)P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_{nk}(1)-EA_{nk}X_{nk}(1)\right|\geqslant \varepsilon n^{k_2}\right)=:H_{21}+H_{22},$$

由(1)和 Hölder 不等式有:

$$\sum_{k=1}^{n}E|A_{nk}|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}EA_{nk}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)^{1/2}\leqslant Cn^{\frac{1-r}{2}}. \tag{4}$$

由于对于固定的 n,有 $\{A_{nk},1\leqslant k\leqslant n\}$ 与 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 相互独立,因此根据 Markov 不等式、引理 4 及 $EX_n=0$,引理 6、引理 7,(4),$\alpha-2-k_2+\frac{1-r}{2}<-1$ 有,

$$H_{21}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2}\ell(n)E\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}EX_{nk}(1)\right|\right)\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2}\ell(n)\sum_{k=1}^{n}E[A_{nk}|-n^{\alpha}P(X_k<-n^{\alpha})+EX_kI(|X_k|\leqslant n^{\alpha})+n^{\alpha}P(X_k>n^{\alpha})|]\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2}\ell(n)\sum_{k=1}^{n}EA_{nk}[n^{\alpha}P(|X_k|>n^{\alpha})+E|X_k|I(|X_k|>n^{\alpha})]\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2}\ell(n)\sum_{k=1}^{n}EA_{nk}E|X_k|I(|X_k|>n^{\alpha})\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2-k_2}\ell(n)\sum_{k=1}^{n}EA_{nk}E|X|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}I(|X|>n^{\alpha})\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2-k_2+\frac{1-r}{2}}E|X|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}\ell(|X|^{\frac{1}{\alpha}})I(|X|>n^{\alpha})\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2-k_2+\frac{1-\tau}{2}}<\infty.$$

下证 $H_{22}<\infty$.

对于任意固定的 n,由引理 4 可知 $\{A_{nk}X_{nk}(1)-EA_{nk}X_{nk}(1),1\leqslant k\leqslant n\}$ 仍为 m-WOD 序列. 取 $q>\max\{2,(2\alpha-2k_1-r-1)/k_2\}$,由 Markov 不等式和引理 3,可得

$$H_{22}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2q}\ell(n)E\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{k=1}^{j}A_{nk}X_{nk}(1)-EA_{nk}X_{nk}(1)\right|\right)^q\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2q}\ell(n)(\log n)^q\sum_{k=1}^{n}E|A_{nk}X_{nk}(1)-EA_{nk}X_{nk}(1)|^q=:H_3+H_4.$$

根据(1)和(2)有

$$E|A_{nk}|^q\leqslant EA_{nk}^2(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|A_{nk}|)^{q-2}\leqslant Cn^{-\alpha(q-2)}EA_{nk}^2.$$

根据 $q>\max\{2,(2\alpha-2k_1-r-1+\beta)/k_2,2(\alpha p-2-k_1+\lambda)/(2\alpha-p\alpha+k_1-2k_2-r+\beta)\}$ 有 $-k_2q+2(\alpha-k_1-1)-r<-1$

根据引理 6,引理 7,引理 9,可得

$$H_3\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2q}\ell(n)(\log n)^q\sum_{k=1}^{n}E|A_{nk}|^qE|X_{nk}(1)|^q\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2q}\ell(n)(\log n)^q\sum_{k=1}^{n}E|A_{nk}|^q[E|X_k|^qI(|X_k|\leqslant n^{\alpha})+n^{\alpha q}P(|X_k|>n^{\alpha})]\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2q}\ell(n)(\log n)^q\sum_{k=1}^{n}n^{-\alpha(q-2)}EA_{nk}^2[E|X_k|^qI(|X_k|\leqslant n^{\alpha})+n^{\alpha q}P(|X_k|>n^{\alpha})]\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2q}\ell(n)(\log n)^q\sum_{k=1}^{n}n^{-\alpha(q-2)+\alpha(q-p)-k_1}EA_{nk}^2[E|X_k|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}I(|X_k|\leqslant n^{\alpha})]+$$

$$E|X_k|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}I(|X_k|\geqslant n^{\alpha})\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k_2q+2(\alpha-k_1-1)}\ell(n)(\log n)^q\sum_{k=1}^{n}EA_{nk}^2E|X|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k_2q+2(\alpha-k1-1)-r}\ell(n)(\log n)^q<\infty.$$

根据

$$q>\max\{2,(2\alpha-2k_1-r-1+\beta)/k_2,2(\alpha p-2-k_1+\lambda)/(2\alpha-p\alpha+k_1-2k_2-r+\beta)\}$$

可得

$$\alpha p-2-k_1+\lambda+\frac{q}{2}(2\alpha-p\alpha+k_1-2k_2-r+\beta)<-1,$$

因此

$$
\begin{aligned}
H_4 = & \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2 q}\ell(n)(\log n)^q g(n)\left(\sum_{k=1}^{n} E|A_{nk}X_{nk}(1)-EA_{nk}X_{nk}(1)|^2\right)^{\frac{q}{2}} \leqslant \\
& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2 q+\lambda}\ell(n)(\log n)^q\left[\sum_{k=1}^{n} EA_{nk}^2 EX_{nk}^2(1)\right]^{q/2} \leqslant \\
& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2 q+\lambda}\ell(n)(\log n)^q\left[\sum_{k=1}^{n} EA_{nk}^2(EX_k^2 I(|X_k|\leqslant n^{\alpha})+n^{2\alpha}P(|X_k|>n^{\alpha}))\right]^{q/2} \leqslant \\
& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1-k_2 q+\lambda}\ell(n)(\log n)^q\left[\sum_{k=1}^{n} n^{2\alpha-p\alpha+k_1}EA_{nk}^2 E|X|^{p-\frac{k_1}{\alpha}}\right]^{q/2} \leqslant \\
& C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1+\lambda+\frac{q}{2}(2\alpha-p\alpha+k_1-2k-2-r)}\ell(n)(\log n)^q \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-k_1+\lambda+\frac{q}{2}(2\alpha-p\alpha+k_1-2k_2-r+\beta)}<\infty .
\end{aligned}
$$

至此完成定理 1 的证明.

3　结论

就现有研究而言,m-WOD 是一种相当宽泛的相依结构,其包含常见的 NA、NOD、END、WOD 和 m-END 相依结构随机变量序列. 本文在较宽泛的条件下,建立 m-WOD 的随机权和序列渐近性质进行讨论,该结果将 WOD 序列的相关结果推广到 m-WOD 的情形. 但有关结果在统计分析中的应用,如应用统计模型的参数估计的大样本性质讨论尚需进一步研究.

［参考文献］

[1] ALAM K,SAXENA K M L. Positive dependence in multivariate distributions[J]. Communication in statistics—theory and methods,1981,10(12):1183-1196.

[2] JOAG-DEV K,PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications[J]. Annals of statistics,1983,11:286-295.

[3] LIU L. Precise large deviations for dependent random variables with heavy tails[J]. Statistics and probability letters,2009,79,1290-1298.

[4] WANG K Y,WANG Y B,GAO Q W. Uniform asymptotics for the finite-time ruin probability of a new dependent risk model with a constant interest rate[J]. Methodology and computing in applied probability,2013,15(1),109-124.

[5] WANG X J, WU Y, HU S H. Exponential probability inequality for m-END random variables and its applications[J]. Metrika,2016,79(2):127-147.

[6] 朱妍蓓,宗瑞雪,乔旭东,等. m-WOD 误差下非线性回归模型 LS 估计收敛性[J]. 高校应用数学学报,2018,33(2):191-201.

[7] 吴燚.相依误差下几类统计模型的大样本性质[D]. 合肥:安徽大学,2020:120-126.

[8] WANG X J,XU C,HU T C,et al. On complete convergence for widely orthant dependent random variables and its applications in nonparametric regression models[J]. Test,2014,23:607-629.

[9] DENG X, WANG X J, WANG S J, et al. The strong consistency of M estimator in linear models based on widely orthant dependent[J]. Racsam,2017,111:781-796.

[10] LANG J J,HE T Y. Complete convergence for randomly weighted sums of random variables and its application in linear-time-invariant systems[J]. Communications in statistics— simulation and computation,2021,60(15):1-15.

[11] GUAN L H,XIAO Y S,ZHAO Y N. Strong consistency of kernel estimator of density function and failure rate function for m-WOD sequences[J]. Journal of Jilin University. 2019,57:833-838.

[12] GUAN L H,XIAO Y H,ZHAO Y N. Complete moment convergence of moving average processes for m-WOD sequence[J]. Journal of inequalities and applications,2021,16:1:13.

[13] FANG H Y, DING S S, LI X Q, et al. Asymptotic approximations of ratio moments based on dependent sequences[J]. Mathematics,2020,8(3):1-12.

[14] ZHOU H,XING C. Complete moment convergence of moving average processes under ϕ-mixing assumptions[J]. Statistics and probability letters,2010,80(5/6):285-292.

［责任编辑:陆炳新］