doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.01.005

一类含对数非线性项的分数阶基尔霍夫型方程解的存在性

黄 红[1],尚旭东[2]

(1.南京师范大学中北学院,江苏 镇江 212334)
(2.南京师范大学泰州学院,江苏 泰州 225300)

[摘要] 通过对对数项精细的估计来证明紧性条件的成立,借助山路引理,研究带有对数非线性项的分数阶基尔霍夫型方程

$$\begin{cases}(a+b[u]_{s,p}^{p})(-\Delta)_p^s u=|u|^{q-2}u\ln|u|^2 & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=0 & \text{在 } \mathbf{R}^N\setminus\Omega \text{ 中}.\end{cases}$$

在一定条件下解的存在性.

[关键词] 分数阶基尔霍夫型方程,对数非线性项,紧性条件,山路引理

[中图分类号]O175.8 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2023)01-0024-04

Existence of Solution for a Kind of Fractional Kirchhoff Equation with Logarithmic Nonlinearity

Huang Hong[1],Shang Xudong[2]

(1.Zhongbei College,Nanjing Normal University,Zhenjiang 212334,China)
(2.Taizhou College,Nanjing Normal University,Taizhou 225300,China)

Abstract:By proving the compactness condition through careful estimation of logarithmic terms,and with the help of mountain pass lemma,the authors study the existence of nontrivial solution for *a* kind *of* fractional Kirchhoff equation with logarithmic nonlinear term

$$\begin{cases}(a+b[u]_{s,p}^{p})(-\Delta)_p^s u=|u|^{q-2}u\ln|u|^2 & \text{in } \Omega,\\ u=0 & \text{in } \mathbf{R}^N\setminus\Omega.\end{cases}$$

under certain conditions.

Key words:fractional Kirchhoff equation,logarithmic nonlinearity,compactness condition,mountain pass lemma

1 引言及主要结论

本文主要研究如下形式的带有对数非线性项和 p-Laplacian 算子的分数阶基尔霍夫型方程解的存在性:

$$\begin{cases}(a+b[u]_{s,p}^{p})(-\Delta)_p^s u=|u|^{q-2}u\ln|u|^2 & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ u=0 & \text{在 } \mathbf{R}^N\setminus\Omega \text{ 中}.\end{cases}\tag{1}$$

这里 a,b 是正常数,$N>sp,s\in(0,1),1<p<q<p_s^*,p_s^*=Np/(N-ps)$是分数临界 Sobolev 指数,$\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是一个具有 Lipshcitz 边界的有界区域,$[u]_{s,p}^{p}=\iint_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^P}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$(-\Delta)_p^s$ 是分数阶 p-Laplacian 算子,其定义为

收稿日期:2022-06-19.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11571176,11701289).
通讯作者:尚旭东,博士,副教授,研究方向:非线性分析,临界点理论及对非线性偏微分方程的应用. E-mail:xudong-shang@163.com

$$(-\Delta)_p^s\varphi(x)=2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{R^N\setminus B_\varepsilon(x)}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|^{p-2}(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}y,\quad x\in\mathbf{R}^N,$$

式中，$\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. $B_\varepsilon(x)$ 表示以 $x\in\mathbf{R}^N$ 为中心且半径 $\varepsilon>0$ 的球.

近年来，基尔霍夫型方程越来越受到广泛的关注，经典的基尔霍夫型方程是由 Kirchhoff[1] 考察弦在振动过程中整数长度的变化效应时，提出的一种实际存在的数学模型. 通过对非线性项赋予适当的条件下获得了解的存在性和多解性的结果，Perera 等[2] 利用 Yang 指标和临界群的方法得到了问题非平凡解的存在性；Chen 等[3] 研究带有凹凸非线性项的问题，利用 Nehari 流形的方法得到了问题多解的存在性. 而分数阶基尔霍夫模型是由 Fiscella-Valdinoci[4] 为了刻画在分数长度处的弦张力，首次提出的一种数学模型. 随后，许多学者开始对这类问题进行深入的研究并获得了许多有意义的结果，见文献[5-7]. 但是，对于带有对数非线性项的分数阶方程解的存在性和多解性的结果不多. 文献[8]研究了如下的一类对数非线性项的分数阶薛定谔方程：

$$(-\Delta)^s u+\omega u=u\ln|u|^2,\quad x\in\mathbf{R}^N,$$

式中，$\omega>0$，利用分数阶对数 Sobolev 不等式得到了无穷多解的存在性，并讨论了解的正则性问题. Truong[9] 研究了一类带有分数阶 p-Laplacian 算子和对数非线性项的一类方程，利用 Nehari 流形方法获得了两个非平凡解的存在性.

受以上文献启发，本文研究带有对数非线性项和 p-Laplacian 算子的分数阶基尔霍夫型方程(1)解的存在性. 本文主要难点有两点：第一，由于对数非线性项的出现，导致了失去紧性条件的现象发生，经典的山路引理无法直接应用；第二，由于 p-Laplacian 算子不是线性算子，导致了一些经典的估计式不再成立，需要利用一些精细的分析技巧来克服这个困难.

本文的主要结果如下：

定理 1　若 $2p<q<p_s^*$ 成立，则方程(1)存在一个非平凡解.

2　紧性条件

在本部分中，首先简要介绍有关的分数阶 Sobolev 空间的知识，更多的内容和证明见文献[10]. 本文采用的 Sobolev 空间为 $W_o^{s,p}(\Omega)$，其范数为 $\|u\|=[u]_{s,p}$. 空间 $W_o^{s,p}(\Omega)$ 能够连续且紧嵌入到空间 $L^r(\Omega)$，这里空间 $L^r(\Omega)$ 的范数为 $|u|_r=\left(\int_\Omega|u|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}$，$p\leqslant r<p_s^*$. 以 S_r 表示最佳嵌入常数，即

$$S_r|u|_r\leqslant\|u\|,\quad\forall u\in W_o^{s,p}(\Omega).$$

问题(1)所对应的能量泛函 $J:W_o^{s,p}(\Omega)\to\mathbf{R}$ 为：

$$J(u)=\frac{a}{p}[u]_{s,p}^p+\frac{b}{2p}[u]_{s,p}^{2p}+\frac{2}{q^2}\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x-\frac{1}{q}\int_\Omega|u|^q\ln|u|^2\mathrm{d}x.\tag{2}$$

利用文献[11]的证明方法可证 $J\in C^1(W_o^{s,p}(\Omega),\mathbf{R})$. 进一步地可知，对任意的 $u,v\in W_o^{s,p}(\Omega)$，都有

$$J'(u)v=(a+b[u]_{s,p}^p)L_p(u,v)-\int_\Omega|u|^{q-2}uv\ln|u|^2\mathrm{d}x$$

成立，这里

$$L_p(u,v)=\iint_{\mathbf{R}^{2N}}\frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+ps}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{3}$$

当 $2p<q<p_s^*$，对所有 $r\in(q,p_s^*)$，都有$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{|t|^{q-1}\ln|t|^2}{|t|^{p-1}}=0$ 和$\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{|t|^{q-1}\ln|t|^2}{|t|^{r-1}}=0$ 成立. 于是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$|t|^{q-1}\ln|t|^{p-1}\leqslant\varepsilon|t|^{p-1}+C_\varepsilon|t|^{r-1}.\tag{4}$$

一方面，由 Vitali 收敛定理得出

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega|u_n|^q\ln|u_n|^2\mathrm{d}x\to\int_\Omega|u|^q\ln|u|^2\mathrm{d}x.\tag{5}$$

另一方面，在 $L^q(\Omega)$ 中，当 $u_n\to u$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^q \mathrm{d}x \to \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x. \tag{6}$$

接下来,证明能量泛函满足紧性条件.

引理 1　若 $2p<q<p_s^*$ 成立. 则能量泛函 J 满足 $(PS)_c$ 条件对于 $c\in\mathbf{R}$.

证明　设 $\{u_n\}_n$ 是一个 $(PS)_c$ 序列,即当 $n\to\infty$ 时 $J(u_n)\to c$,以及 $J'(u_n)\to 0$. 于是有

$$c+o(1)\|u_n\| = J(u_n)-\frac{1}{q}J'(u_n)u_n=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)a\|u\|^p+\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{q}\right)b\|u\|^{2p}+\frac{2}{q^2}\int_\Omega |u|^q\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)a\|u\|^p, \tag{7}$$

因为 $2p<q$,所以式(7)表明了序列 $\{u_n\}_n$ 在 $W_o^{s,p}(\Omega)$ 中有界. 从而,可假设 $u_n\rightharpoonup u$ 在 $W_o^{s,p}(\Omega)$,由于空间 $W_o^{s,p}(\Omega)$ 连续紧嵌入到空间 $L^r(\Omega)$,对任意的 $p\leqslant r<p_s^*$. 所以 $v_n\to v$ 在空间 $L^r(\Omega)$ 中.

接下来证明 $\{u_n\}_n$ 强收敛于 u 在 $W_o^{s,p}(\Omega)$ 中,根据(5)式、范数的弱下半连续性和 Brezis-Lieb 引理,可知

$$o_n(1)=J'(u_n)u_n=a[u_n]_{s,p}^p+b[u_n]_{s,p}^{2p}-\int_\Omega |u_n|^q\ln|u_n|^2\mathrm{d}x\geqslant a[u_n-u]_{s,p}^p+a[u]_{s,p}^p+b[u]_{s,p}^{2p}-$$
$$\lambda\int_\Omega |u|^q\ln|u|^2\mathrm{d}x\geqslant a[u_n-u]_{s,p}^p+J'(u)u+o_n(1),$$

因为 $J'(u)=0$,所以由上式可知 $\{u_n\}$ 在 $W_o^{s,p}(\Omega)$ 中强收敛于 u.

3　定理 1 证明

接下来,我们将利用如下的山路引理证明方程(1)非平凡解的存在性.

定理 2(见文献[11])　令 J 是定义在 Banach 空间 E 上的泛函,且 $J\in C^1(E,\mathbf{R})$ 满足 $(PS)_c$ 条件. 假设存在常数 $\alpha,\rho>0$ 使得

(J_1) $J(u)\geqslant\alpha, u\in E$ 且 $u=\rho$;

(J_2) 存在 $e\in E$ 且 $e>\rho$ 使得 $J(0)=0, J(e)<\alpha$.

定义 $c=\inf\limits_{\gamma\in\Gamma_j}\max\limits_{t\in[0,1]}J(\gamma(t))$,其中 $\Gamma_j=\{\gamma\in C([0,1],E):\gamma(0)=0,\gamma(1)=e\}$. 那么,泛函 J 有一个临界值 $c\geqslant\alpha$.

定理 1 的证明　接下来分 3 步证明定理 1 的结论.

第一步:能量泛函 J 满足几何性质 (J_1).

从(4)式和 Sobolev 嵌入,可知

$$J(u)\geqslant\frac{1}{p}a\|u\|^p+\frac{1}{2p}b\|u\|^{2p}-\frac{1}{q}\varepsilon\int_\Omega |u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{q}C_\varepsilon\int_\Omega |u|^r\mathrm{d}x\geqslant\left(\frac{1}{p}a-\frac{1}{q}\varepsilon C_1\right)\|u\|^p-\frac{1}{q}C_\varepsilon C_2\|u\|^r,$$

式中,C_1 和 C_2 是正的常数,选取 $\varepsilon>0$ 充分小使得 $\left(\frac{1}{p}a-\frac{1}{q}\varepsilon C_1\right)>0$. 因为 $r>p$,故存在 $\alpha,\rho>0$ 使得当 $u=\rho$ 时 $J(u)\geqslant\alpha$. 因此定理 2 的 (J_1) 得证.

第二步:能量泛函 J 满足几何性质 (J_2).

由于对任意的 $\tau\in(0,\infty)$ 都有不等式 $2\tau^q-q\tau^q\ln|\tau|^2\leqslant 2$ 成立. 令 $v\in W_o^{s,p}(\Omega)$ 且 $v\neq 0$,选取 t_0 足够大,使得 $t_0v>\rho$ 且 $2|\Omega|-2|v|_q^q\ln|t_0|<-1$ 成立,于是有

$$J(tv)\leqslant\frac{a}{p}t^p\|v\|^p+\frac{b}{2p}t^{2p}\|v\|^{2p}-\frac{1}{q^2}t^q.$$

因为 $q>2p$,于是有 $J(t_0v)<0$. 令 $e=t_0v$,所以找到满足条件的函数 e,于是定理 2 中条件 (J_2) 成立.

第三步:方程(1)存在一个非平凡解.

由于 $J(0)=0$,结合定理 2 可知 J 存在一个非平凡临界点 u 且 $J(u)\geqslant\alpha$. 于是方程(1)存在一个非平凡的弱解.

[参考文献]

[1]　KIRCHHOFF G. Vorlesungen Uber Mechanik,Teubner,Leipzig[M]. Stutgarty:Springer,1883.

[2] PERERA K,ZHANG Z. Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index[J]. Journal of differential equations,2006,221:246-255.

[3] CHEN C Y,KUO Y C,WU T F. The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight functions[J]. Journal of differential equations,2011,250:1876-1908.

[4] FISCELLA A,VALDINOCI E. A critical Kirchhoff type problem involving a nonlocal operator[J]. Nonlinear analysis,2014,94:156-170.

[5] PUCCI P,XIANG M Q,ZHANG B L. Existence of entire solutions for Kirchhoff type equations involving the fractional p-Laplacian[J]. Advances in nonlinear analysis,2016,5:27-55.

[6] XIANG M Q,PUCCI P,SQUASSINA M,et al. Nonlocal Schrödinger Kirchhoff equations with external magnetic field[J]. Discrete and continuous dynamical systems,2017,37:503-521.

[7] SONG Y Q,SHI S Y. Existence of infinitely many solutions for degenerate p-fractional Kirchhoff equations with critical Sobolev-Hardy nonlinearities[J]. Zeitschrift fur angewandte mathematik und physik,2017,68:1-13.

[8] D'AVENIA P,SQUASSINA M,ZENARI M. Fractional logarithmic Schrödinger equations[J]. Mathematical methods in the applied sciences,2015,38:5207-5216.

[9] TRUONG L X. The Nehari manifold for fractional p-Laplacian equation with logarithmic nonlinearity on whole space[J]. Computers and mathematics with applications,2019,78:3931-3940.

[10] DI NEZZA E,PALATUCCI G,VALDINOCI E. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces[J]. Bulletin des sciences mathématiques,2012,136:521-573.

[11] RABINOWITZ P H. Minimax methods in critical point theory with applications to diferential equations[M]. Providence,Rhode Island:American Mathematical Society,1984.

[责任编辑:陆炳新]