

数据驱动的扭曲均值-半方差投资组合选择

杨东方,李孟雨,王天放,米 辉,刘国祥

(南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 运用样本平均近似的数据驱动方法研究了带概率扭曲的均值-半方差投资组合优化模型,结合经典的遗传算法(ICA)和帝国竞争算法(GA),提出了 ICA-GA 混合算法. 利用真实市场数据,对模型进行实证分析并求解有效前沿. 最后,通过比较算法程序运行时间,表明本文创新的 ICA-GA 混合算法融合了帝国竞争算法和遗传算法两者的优势,比它们有更好的表现.

[关键词] 带概率扭曲的均值-半方差,投资组合优化,ICA-GA 混合算法,数据驱动方法

[中图分类号] O211;F830 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2023)02-0007-08

Mean-Semivariance Portfolio Selection with Distortion Based on a Data Driven Approach

Yang Dongfang, Li Mengyu, Wang Tianfang, Mi Hui, Liu Guoxiang

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: This paper studies a mean-semivariance portfolio optimization problem with probability distortion by using the data driven sample average approximation (SAA) approach. The paper builds ICA-GA hybrid algorithm based on the traditional imperial competitive algorithm (ICA) and genetic algorithm (GA). Employing the true market data, the model is empirically analyzed and the effective frontier is solved. Finally, by comparing the running time of the computer programs, it shows that the ICA-GA hybrid algorithm in this paper combines the advantages of imperial competitive algorithm and genetic algorithm, and it performs better than them.

Key words: mean-semivariance with probability distortion, portfolio optimization, ICA-GA hybrid algorithm, data driven approach

现代投资组合选择一直是当今金融领域研究的热门问题之一. 在金融市场中,如何合理地将投资者的财富分配到不同的资产中,进而实现财富的最大化并有效控制投资风险,是投资组合理论的研究内容. 随着大数据时代的到来,越来越多的研究者将理论模型与实际数据相结合,应用数据驱动的方法解决投资组合选择问题,并使用先进高效的计算机算法进行投资组合优化和有效前沿计算.

自 Markowitz^[1]的开创性工作以来,均值-方差模型已成为金融理论中的主要模型之一,方差也成为了衡量风险的一个常用标准. 均值-方差投资组合选择问题试图在一篮子证券中寻找最佳财富分配,以实现固定时间范围内的风险与预期投资回报之间的最佳平衡. 均值-方差准则也受到了学者们的青睐,见文献[2-4]. 但以方差作为风险度量工具具有一定的局限性,因为它将低于和高于资产组合期望收益的部分都看成风险,然而实际应用中,低于的部分才是真正的风险,所以 Markowitz 等^[5]后来用半方差代替方差,研究均值-半方差投资组合模型,随后众多学者在均值-半方差框架下讨论各种最优投资问题,相关文献参见[6-7].

值得注意的是,随着行为经济学和实验经济学的发展,发现以线性期望为基础的决策标准会产生一些不符合实际的悖论,这些悖论的产生表明了投资者对于客观风险的认知容易受到多种外部环境的影响,需

收稿日期:2023-04-27.

基金项目:国家自然科学基金项目(61304065).

通讯作者:米辉,博士,副教授,研究方向:金融数学. E-mail: mihui@njnu.edu.cn

要新的工具刻画决策者对于客观风险的心理认知过程.

不少学者通过引入概率扭曲函数改进传统的决策标准来研究投资组合优化问题. 比如, Quiggin^[8] 提出的秩相依效用理论已迅速发展为学术界广泛讨论的决策理论. 近年来国内外学者也进行了很多拓展, Jin 等^[9]提出了单调性假设下分位数函数的方法,以解决添加概率扭曲函数后目标函数不再呈现凹性的问题. 他们在连续时间内研究了一般的 S 型效用函数和概率扭曲特征的行为投资组合选择模型. He 等^[10]研究了一般扭曲风险度量下,完全市场和不完全市场中的一般投资组合选择问题,以期末现金流量的分位数函数作为决策变量. Bi 等^[11]尝试使用分位数方法研究概率扭曲下均值-方差问题的解决方案. Bi 等^[12]提出并研究了当概率被非线性变换扭曲时,连续时间下的均值-半方差投资组合选择问题.

近年来有人提出了数据驱动的方法^[13],在这种方法中投资者除了不断变化的资产收益观测值外,没有任何其他信息. Ban 等^[14]在均值-方差模型和均值-条件风险价值模型基础上,引进基于绩效的正则化(PBR)和机器学习算法改善 SAA 数据驱动投资组合问题的结果. Bertsimas 等^[15]提出的样本平均逼近方法是一种在不确定性下以数据为依据进行决策的流行方法. Delage 等^[16]从历史数据出发构建了均值向量和协方差矩阵的置信度集. Cetinkaya 等^[17]研究了一个迭代的、数据驱动的近似问题,投资者在给定股票收益的历史情况下寻求最大化,其受限于分位数约束的投资组合的预期收益. 基于上述讨论,本文提出数据驱动下带概率扭曲的均值-半方差投资组合模型,给出了求解该模型的混合优化算法,结合我国金融市场数据进行实证分析,得出了模型在不同参数情况下的有效前沿和运行时间.

1 数据驱动下带概率扭曲的均值-半方差模型

1.1 概率权重(扭曲)函数

期望效用理论有一个著名的“Allais 悖论”,它在促进扩展期望效用理论的形成方面作出了重要的贡献. 面对 Allais 悖论,在传统改进模式中,具有决策权重的改进模型认为,与人们会对财富产生主观反映即效用一样,人们对事件发生的可能性也存在与客观概率不等同的主观判断. 决策者对结果概率的主观判断称为决策权重,考虑一个离散情况,如果未来收益的所有可能结果为 $X = (x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$,那么基于决策权重的改进模型具有如下形式:

$$V(X) = \sum_{i=1}^n h_i u(x_i), \quad (1)$$

式中, h_i 表示决策权重, $u(\cdot)$ 表示效用函数. 决策权重是决策者对结果概率的主观判断,可以将 h_i 看成是概率 p_i 的函数,认为

$$h_i = w(p_i + \dots + p_n) - w(p_{i+1} + \dots + p_n), \text{ 且 } h_n = w(p_n).$$

式中, $w(\cdot)$ 为概率权重函数, $w(0) = 0, w(1) = 1$; 它将真实的概率进行扭曲,体现了投资者对结果的主观信念. 可以看到,如果 x_i 与 x_j 是等可能的,即 $p_i = p_j$,对于期望效用来说,它们的权重相同,然而 h_i 却未必等于 h_j ,这是因为这一权重不仅与当前事件发生的概率有关,与比它更好的事件的概率也有关.

期望效用理论是用概率作为权重对于随机变量取值的加权平均,而秩相依效用理论中对于某一结果进行赋权时的权重,不仅取决于概率本身,也与该结果在所有可能结果中的排序有关. 概率权重函数(probability weighting function, PWF)的凹凸性可以在一定程度上刻画投资者对于风险的态度.

概率权重函数最早由 Prelec^[18]在 1998 年提出,它的优点是不仅具有简约性,还有强有力的实证支撑和公理基础.

Definition 1 由 Prelec 函数得到概率权重函数 $w(\cdot): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ 定义为:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, w(1) = 1, \\ w(p) &= e^{-\beta(-\ln p)^\alpha}, 0 < p \leq 1, \alpha > 0, \beta > 0. \end{aligned}$$

注 当 $\alpha = 1$ 时, Prelec 概率权重函数的形式为 $w(p) = p^\beta$. 因此,当 $\beta < 1$ 时是严格凹的,当 $\beta > 1$ 时是严格凸的,特别的,当 $\beta = 1$ 时, $w(p) = p$,即为经典的期望效用理论.

1.2 基于 SAA 方法的带概率扭曲的均值-半方差模型

Shapiro 等^[19]详细介绍了一种称为样本平均近似(SAA)的数据驱动方法. “样本平均近似”最早是由 Kleywegt 等^[20]创造,该术语指的是用其抽样近似法取代原始问题(SP)的方法,这在文献中有时也被称为

外部抽样方法.

考虑以下随机规划问题:

$$\min_{x \in D} \{f(x) := E[F(x, \xi)]\}, \quad (2)$$

式中, D 是 \mathbf{R}^n 的非空闭合子集, ξ 是随机向量, 其概率分布 F 定义在支持集 $\Xi \subset \mathbf{R}^d$ 上, 且有 $F: D \times \Xi \rightarrow \mathbf{R}$.

在许多情况下, 对于给定的决策 x , 对前文中的期望值 $E[F(x, \xi)]$ 的精确估计要么不可能, 要么计算成本过高. 这也是涉及预期价值目标的传统随机规划问题所固有的困难. 样本平均近似 (SAA) 方法可以绕过这个难题. 这个想法是通过生成随机样本 $\{\xi^1, \dots, \xi^N\}$ 来求解确定性样本平均近似问题.

假设我们有一组样本 ξ^1, \dots, ξ^N , 随机样本可以被视为随机向量 ξ 的 N 个观测值的历史数据, 或者可以通过蒙特卡罗采样技术在计算机中生成. 对于任何 $x \in D$, 我们可以通过求 $F(x, \xi^j), j=1, \dots, N$ 的平均值来估计 $F(x)$ 的期望值. 这也就推出原问题 (2) 的所谓的样本平均近似 (SAA)

$$\min_{x \in D} \left\{ \hat{f}_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F(x, \xi^j) \right\}. \quad (3)$$

因此, 对于给定的样本, SAA 问题 (3) 可以被认为是随机规划问题, 具有 N 个情景 ξ^1, \dots, ξ^N , 且每个概率是 $\frac{1}{N}$.

根据大数定律, 我们知道, 在一定的条件下, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\hat{f}_N(x)$ 逐点收敛到 $f(x)$. 特别的, 如果样本是独立同分布的, 那么经典的大数定律就会成立. 我们还有 $E[\hat{f}_N(x)] = f(x)$, 即 $\hat{f}_N(x)$ 是 $f(x)$ 的无偏估计. 因此, 很自然地期望当 $N \rightarrow \infty$ 时, SAA 问题 (3) 的最优值和最优解收敛于它们对应的真实问题 (2) 的最优值和最优解. 我们分别用 ϑ^* 和 S 表示真实问题 (2) 的最优值和最优解集, 分别用 $\hat{\vartheta}_N^*$ 和 \hat{S}_N 表示 SAA 问题 (3) 的最优值和最优解集.

设 X 是一个随机变量, 其分布函数为 $F(x)$. 设 w 是一个概率扭曲函数, 则 Φ 定义为:

$$\Phi(x) = w(F(x)).$$

注意到, Φ 符合分布函数的定义, 因此我们可新定义一个随机变量 \tilde{X} :

$$P(\tilde{X} \leq x) = \Phi(x) = w(F(x)).$$

考虑随机事件集合 $(x_1, p_1; x_2, p_2; \dots; x_n, p_n)$, 其中 p_i 表示 $X=x_i$ 的概率. 设 h_i 是 $\tilde{X}=x_i$ 的概率, 则有:

$$h_i = \Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1}).$$

离散情形下随机变量的带概率扭曲的期望和半方差分别为

$$\begin{aligned} \tilde{E}(X) &= \sum_{j=1}^T h_j X_j, \\ \tilde{V}_-(X) &= \sum_{j=1}^T h_j [(X_j - R)^-]^2, \end{aligned}$$

式中, R 为 X 的期望, $X_j = \sum_{i=1}^n \pi_i r_{ij}, j=1, \dots, T$ 表示第 j 时期的总财富收益率, π_i 表示第 i 个证券分配的资金比例, r_{ij} 表示第 i 个证券在第 j 个时期的收益率.

假设已知有 n 个证券在 T 个时期的历史数据, 我们使用 SAA 方法, 用数据的样本半方差估计量代替目标函数, 用样本均值估计量代替约束条件, 则一般带扭曲的均值-半方差问题可以由下式表示:

$$\begin{aligned} \min \quad & \hat{\tilde{V}}_-(X) = \hat{E}\{[(X - R)^-]^2\}, \\ \text{s.t.} \quad & \hat{E}[X - R] = 0, \\ & \sum_{i=1}^n \pi_i = 1, \\ & 0 \leq \pi_i \leq 1, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

由此, 问题转化为数据驱动的非线性优化问题.

2 求解算法

上一节中已经将带扭曲的均值-半方差问题转化为非线性规划模型, 有关其最优解的存在性和解的

讨论已由相关理论给出,在此不再赘述. 因为传统的优化算法很难找到全局最优解,所以人们一直在寻找更好的方法来获得最优解. 遗传算法(GA)是一种基于生物进化的自然原理,通过模拟种群遗传和进化解优化问题的方法. 帝国竞争算法(ICA)是一种受帝国竞争行为启发,通过模拟殖民地同化机制和帝国竞争机制而形成的一种优化方法. 它们都已被成功应用于解决各类实际的优化问题. Mehdinejad 等^[21]在 ICA 算法中引入了一种称为“独立”国家的新型国家,并且将遗传算法中的交叉和变异算子应用于这些独立国家. 因此受其思想的启发,本文使用类似的 ICA-GA 混合优化算法.

首先定义适应度函数,适应度函数是衡量解决方案质量的一个因素. 在优化问题中,适应性通常取决于其目标函数的值. 因此,对于最大化问题,具有较高适应性的个体将有更多的机会产生后代. 在本节中,我们将上文模型的目标函数作为适应度函数. 此外,我们知道,在基本 ICA 中,国家的力量与成本函数的值成反比. 因此,对于本文所提出的混合算法,成本函数定义为适应度函数的倒数:

$$Cost = \frac{1}{fit(country)},$$

式中, $fit(country)$ 指国家的适应度,即目标函数值.

然后定义独立国家,独立国家是反帝国主义的国家,正在与帝国主义国家竞争. 独立国家的目标是使殖民地脱离帝国,让它们加入独立国家,导致所有帝国瓦解. 更具体地说,在初始群落中,最初的 N_{pop} 个国家中最强大的 N_{imp} 个国家被选为帝国,其余国家(即剩余的 $N_{pop} - N_{imp}$ 个国家)中最强大的 N_{ind} 个国家被选为独立国家,其余 N_{col} ($N_{col} = N_{pop} - N_{imp} - N_{ind}$) 个国家组成殖民地. 然后在每一次迭代中加入执行 3 个遗传算法中的算子:

(1) 变异算子

在 ICA 的进化进程中,种群多样性可能会丢失,并且总是会发生早熟收敛. 在这里,我们设计了一种新的变异策略来执行变异算子. 具体而言,根据以下等式产生一个新的独立国家 Ind'_i :

$$Ind'_i = Ind_i + \varphi_i \times rand(N_{var}, N_{var}) \times (Cou_{best} - Ind_i),$$

$$\varphi_i = 1 - \frac{fit(Ind_i)}{\sum_{i=1}^{N_{pop}} fit(Cou_i)},$$

式中, Ind_i 代表第 i 个独立国家, $rand(N_{var}, N_{var})$ 代表一个 $N_{var} \times N_{var}$ 的随机矩阵,其元素都是 0 到 1 的随机数, Cou_{best} 代表具有最佳适应性的国家, φ_i 代表第 i 个独立国家的变异概率, $fit(Ind_i)$ 代表第 i 个独立国家的适应度. 由 φ 的表达式可知,国家的适应度越高,其变异概率越低. 当执行变异算子之后得到的新国家的适应度低于旧国家,则 $Ind'_i = Ind_i$.

(2) 交叉算子

本文采用单点交叉运算的方法. 在单点交叉中,在 $[1, 2, \dots, N_{var}]$ 中随机选择一个交叉位置 k , 然后两个“独立国家”在这点上的变量进行交换. 由此,可以产生两个新的“独立国家”.

(3) 选择算子

我们从新国家(包括帝国、独立国家和殖民地)中选择最好的前 N_{imp} 个国家作为新帝国,而其余国家将成为新殖民地. 然后定义动态切换革命策略. 像许多元启发式方法一样,参数选择对算法性能也有很大影响. 革命算子是对应遗传算法中的变异算子. 较大的革命概率值可以加强“勘探”,而较小的革命概率值则可以加强“开采”. Hosseini 等^[22]表明,革命概率值高度依赖于解空间的大小,一般而言,取值为 0.2 可能是一个合适的选择. 此外, Sadeghi 等^[23]提出 0.1 是更好的革命概率值设置. 但是,对于任何通用算法,我们都知道应该从一开始就进行更多的全局搜索,因为它将倾向于更好地探索搜索空间,而当完成足够的探索后,算法应将重心转变为本地搜索即“开采”. 因此,本文采用动态切换革命概率的策略使算法在“勘探”和“开采”解空间时更加高效可靠. 革命概率有如下定义:

$$P_{t,i} = p_0 \left(1 - \frac{fit(Col_i)}{fit(Cou_{best})} \cdot e^\lambda \right), i = 1, 2, \dots, N_{col},$$

$$\lambda = \frac{rand[0, N_{var}]}{N_{var}},$$

式中, $\text{fit}(Col_i)$ 是第 i 个殖民地的适应度, Cou_{best} 是适应度最好的国家, $\text{rand}[0, N_{\text{var}}]$ 是 0 到 N_{var} 之间的随机数. 由上式可知, 国家的适应度越高, 革命概率越小. 此外, 革命概率还与优化问题的维数相关, 随着维数 N_{var} 的增加, 执行革命操作的可能性也增加. 最后定义终止条件. 我们考虑两种终止条件: (1) 当帝国数量为 1 (即 $N_{\text{imp}} = 1$) 时终止; (2) 当达到设定的最高迭代次数时终止.

3 实证分析

我们将提供一个数值例子来说明提出算法的可行性与有效性. 利用上海证券市场的历史数据进行实证分析. 选取的数据为 2014 年—2019 年 6 月的上证股票数据: 600000 浦发银行、600004 白云机场、600006 东风汽车、600007 中国国贸、600008 首创股份、600009 上海机场、600010 宝钢股份、600011 华能国际等八只股票, 我们假设各股票的收益率用 r_{it} 表示 ($i = 1, 2, \dots, 8; t = 1, 2, \dots, 100$).

3.1 模型建立

已知有 $n = 8$ 个证券在 $T = 100$ 个时期的历史数据 r_{it} , 假设投资组合分配策略为 (π_1, \dots, π_8) , 总财富收益率用变量 X 表示, 则在任意时刻 t 的总财富收益率可以表示为 $X_t = \sum_{i=1}^n \pi_i r_{it}$. 由期望和方差的一般定义, 我们假设每个样本的初始概率权重均相等, 在本案例中设 $p_m = \frac{1}{T}, m = 1, 2, \dots, T$. 根据 1.2 节中介绍的离散情况下带扭曲的随机变量期望和半方差的定义, 可得:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(X) &= \sum_{t=1}^T h_t X_t = \sum_{t=1}^T \left[w\left(\frac{t}{T}\right) - w\left(\frac{t-1}{T}\right) \right] X_t, \\ \tilde{V}_-(X) &= \sum_{t=1}^T h_t [(X_t - R)^-]^2 = \sum_{t=1}^T \left\{ \left[w\left(\frac{t}{T}\right) - w\left(\frac{t-1}{T}\right) \right] \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n \pi_i r_{it} - R \right)^- \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

类似于问题(4), 新的带扭曲的均值-半方差问题化为:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{V}_-(X), \\ \text{s.t.} \quad & \tilde{E}[X - R] = 0, \\ & \sum_{i=1}^n \pi_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^n z_i = m, \quad z_i \in \{0, 1\}, \\ & \varepsilon_i z_i \leq \pi_i \leq \delta_i z_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{5}$$

式中, π_i 表示第 i 个证券分配的资金比例, z_i 表示是否投资第 i 个证券, ε_i 表示第 i 个证券投资比例的下界, δ_i 表示第 i 个证券投资比例的上界.

3.2 模型求解

注意到, 在上一小节中我们给出了离散化后的带扭曲的均值-半方差模型, 在使用 SAA 方法后, 这就转化为数据驱动的非线性优化问题. 为了简化计算而又不失一般性, 假设 $m = 8, \varepsilon_i = 0, \delta_i = 1$. 对于此投资组合模型, 分别应用 Matlab 工具箱自带的 fmincon 算法、遗传算法和前文介绍的 ICA-GA 混合算法进行求解, 算法均使用 Matlab 语言编写. 我们将从最优投资策略、有效前沿和运行时间等方面来比较这些算法.

在实际求解过程中, 我们需要先确定概率权重函数 $w(\cdot)$ 的形式, 根据第 2 节介绍, 选取 5 种最具代表性的形式, 分别是: $w(x) = x; w(x) = x^2; w(x) = \sqrt{x}; w(x) = e^{-(\ln x)^2}; w(x) = e^{-(\ln x)^{1/2}}$. 这 5 个函数表达式分别对应无概率扭曲、严格凹、严格凸、S 型、反 S 型这 5 种类型的概率权重函数. 我们将从以下 3 个方面验证模型可行性, 并且对上述 3 种算法进行比较, 因篇幅问题, 我们只展示当概率权重函数为 $w(x) = x^2$ 时的结果.

(1) 最优投资策略

我们考虑期望收益约束设置为 $R = 0.1, 0.15, 0.2$ 这 3 种情况, 分别使用前文提出的算法求解. 表 1、表 2、表 3 分别展示了当 $w(x) = x^2$ 时 3 种优化算法得到的最优投资组合策略以及 SV 的最优值. 从表中数据可以发现这 3 种优化算法都可以求解出本文提出的带扭曲的均值-半方差投资组合优化模型.

表 1 优化工具包求解结果

Table 1 Results based on the optimization toolbox

		投资组合 1	投资组合 2	投资组合 3
证券	1	0.187 064 012	0.320 327 378	0.398 478 290
证券	2	0.015 092 481	0.008 559 128	0.026 721 245
证券	3	0.000 129 297	0.001 312 244	0.000 106 581
证券	4	0.388 001 809	0.379 532 083	0.376 288 482
证券	5	0.013 924 555	0.000 798 657	5 829 356 949e-05
证券	6	0.051 716 238	0.062 164 764	0.073 288 879
证券	7	0.000 994 083	0.000 683 740	8 007 063 448e-05
证券	8	0.342 168 484	0.225 628 947	0.124 074 142
R		0.1	0.15	0.20
SV		0.632 538 301 645 081	0.561 008 087 119 134	0.561 749 674 226 755

表 2 遗传算法求解结果

Table 2 Results based on the genetic algorithm

		投资组合 1	投资组合 2	投资组合 3
证券	1	0.240 016 443	0.340 908 51	0.412 623 441
证券	2	3.679 550 116e-07	2.721 006e-05	0.023 307 715
证券	3	1 924 581 689e-07	0 000 196 822 164	1 86 831e-05
证券	4	0.425 812 428	0.399 589 446	0.376 467 723
证券	5	8 022 609 382e-07	0 00 010 112 328	0.000 463 906 8
证券	6	0.011 415 848	0.046 178 506	0.064 807 627
证券	7	4 583 870 264e-07	0 00 011 837 621	0.000 298 025 7
证券	8	0.322 753 458	0.212 880 006	0.122 012 878
R		0.1	0.15	0.20
SV		0.611 319 735 320 237	0.556 124 023 029 28	0.562 182 751 882 163

表 3 ICA-GA 混合算法求解结果

Table 3 Results based on the ICA-GA hybrid algorithm

		投资组合 1	投资组合 2	投资组合 3
证券	1	0.238 955 674	0.340 588 055	0.413 203 974
证券	2	0.000 519 672 045	1.289 942 725e-06	0.023 978 728
证券	3	0 000 170 679 542	5 091 635 103e-07	9.116 787 343
证券	4	0.422 633 145	0.400 246 236	0.376 157 573
证券	5	0 001 210 961 261	1 754 721 488e-06	1 606 779 293e-05
证券	6	0.010 583 77	0.045 020 784	0.065 068 839
证券	7	0 000 984 000 613	1 362 209 751e-06	3 338 231 353e-05
证券	8	0.324 942 098	0.214 140 006	0.121 532 317
R		0.1	0.15	0.20
SV		0.613 840 307 206 868	0.556 254 952 748 782	0.562 363 101 814 667

观察上述 3 张表格中的数据,我们发现,遗传算法解得的最优解表现最好,在预设相同目标收益率的情况下带有概率扭曲的半方差最小.虽然优化工具包使用的内点法和 ICA-GA 混合算法得到的结果普遍略差于遗传算法的结果,但 ICA-GA 混合算法还是要明显优于内点法.ICA-GA 混合算法与遗传算法相比,差异不大,详细对比策略可以发现两者差异通常出现在小数点第三位之后.可以预见,如果增加 ICA-GA 混合算法的迭代次数或者使用更严格的算法终止条件,其也有能力得到与遗传算法精度相当的最优解.

(2)有效前沿

前一段中我们通过计算单点的最优投资策略来验证模型和算法,这里将通过绘制各种情况的有效前沿来观察模型和算法的效果.观察图 1 可以发现,MATLAB 优化工具箱内点法求得的有效前沿存在锯齿状,位于另两种算法的内侧.这反映出内点法在求解某些情况时陷入了局部最优,没有得到全局最优解,

并且有时偏差较大. 遗传算法和 ICA-GA 混合算法求得的有效前沿非常接近,几乎重合. 这与求解单点最优投资策略的结论相似,遗传算法和 ICA-GA 混合算法有着同样优异的求解精度.

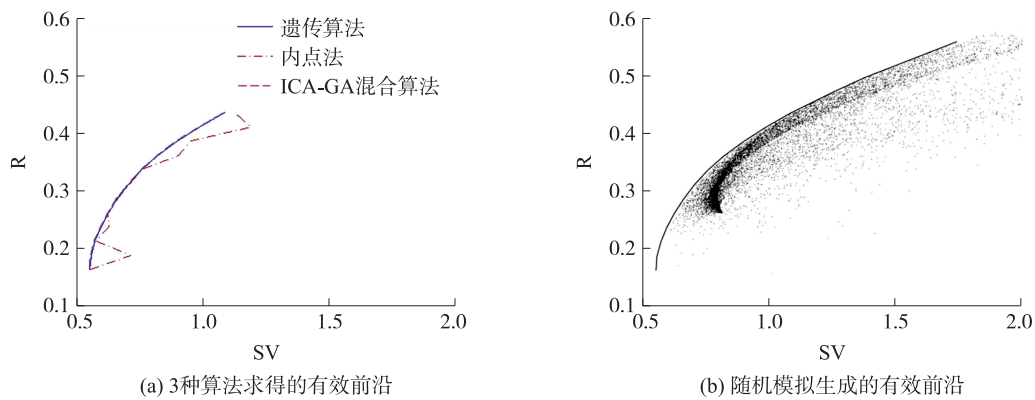


图 1 $w(x)=x^2$ 情况下有效前沿的对比

Fig. 1 Comparisons of the efficient frontier with $w(x)=x^2$

(3) 运行时间

前文从两个角度比较了算法的求解精度,这里通过比较运行时间来考察算法的运行收敛速度. 在求解各类模型中 3 种算法所需要的时间如下表所示. 可以发现,内点法运行时间最短,遗传算法运行时间最长. 结合 3 种算法求解的结果精度,内点法速度最快,但是搜索范围不广容易陷入局部最优,结果不佳. 遗传算法求解得到的结果精度最高,但是代价是迭代次数多求解时间长. 而本文创新使用的 ICA-GA 混合算法较好地平衡了这两点,既可以得到与遗传算法相似的结果(精度略低),也可以大幅降低运行时间.

表 4 求解有效前沿的运行时间

Table 4 Running time of solving the efficient frontier

概率扭曲函数	算法	运行时间/s	概率扭曲函数	算法	运行时间/s
无	内点法	9	$w(x)=e^{-(\ln x)^2}$	内点法	12
	遗传算法	2 527		遗传算法	4 780
	ICA-GA 混合算法	1 386		ICA-GA 混合算法	2 832
$w(x)=x^2$	内点法	10	$w(x)=e^{-(\ln x)^{1/2}}$	内点法	13
	遗传算法	2 824		遗传算法	5 070
	ICA-GA 混合算法	1 733		ICA-GA 混合算法	3 351
$w(x)=\sqrt{x}$	内点法	12			
	遗传算法	18 360			
	ICA-GA 混合算法	6 981			

实证分析的结果显示,ICA-GA 混合算法取得了不错的效果,程序运行的迭代次数和运行时间都比单独的内点法和遗传算法有大幅减少,同时最优解的精度与遗传算法几乎相同.

4 结论

本文考虑在模型中引入概率扭曲函数来刻画不同投资者的风险偏好,并使用数据驱动方法处理带扭曲的单周期均值-半方差模型,进而运用 ICA-GA 混合算法求解该投资组合模型并给出了最优投资策略和有效前沿. 利用金融市场数据进行数值模拟,分析比较了不同算法的运行时间,表明了该混合算法的可行性.

与现有的方法相比,本文算法的主要创新点在于使用数据驱动的方法将模型转化为离散的非线性优化问题,并使用多种优化算法进行求解,从而本方法可以直接求解出最优策略,并且在求解过程中使用了历史数据,考虑了历史数据的影响. 根据实证分析结果,我们发现数据驱动方法可以将带扭曲的均值-半方差模型转化为基于历史数据的非线性优化问题,快速求取最优解. 观察求得的最优投资策略和有效前沿,可以验证模型和算法的有效性,并将求出的有效前沿与随机模拟生成的有效前沿对比,结果完全吻合,说明使用 SAA 方法处理带有概率扭曲的均值-半方差模型可以获得可行有效的最优解.

使用数据驱动方法处理投资组合优化问题已经越来越受到研究者的关注,本文只是使用了较为基础的数据驱动方法处理,依然有很多的改进空间. 另外,本文在前人理论的基础上融合创新了求解算法,并

尝试应用于求解投资组合优化问题,达到了本文实证分析的预期目标,但后续仍有很大的提升空间。

[参考文献]

- [1] MARKOWITZ H. Portfolio selection[J]. Journal of finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [2] ZHOU X Y, LI D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework[J]. Applied mathematics & optimization, 2000, 42: 19-33.
- [3] LIOUI A, PONCET P. Understanding dynamic mean variance asset allocation[J]. European journal of operational research, 2016, 254(1): 320-337.
- [4] RAY P, JENAMANI M. Mean-variance analysis of sourcing decision under disruption risk[J]. European journal of operational research, 2016, 250(2): 679-689.
- [5] MARKOWITZ H, TODD P, XU G, et al. Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm[J]. Annals of operations research, 1993, 45(1): 307-317.
- [6] BALLESTERO E. Mean-semivariance efficient frontier: a downside risk model for portfolio selection[J]. Applied mathematical finance, 2005, 12(1): 1-15.
- [7] ESTRADA J. Mean-semivariance behavior: downside risk and capital asset pricing. [J]. International review of economics & finance, 2007, 16(2): 169-185.
- [8] QUIGGIN J. A theory of anticipated utility[J]. Journal of economic behavior and organization, 1982, 3(4): 323-343.
- [9] JIN H, ZHOU X Y. Behavioral portfolio selection in continuous time[J]. Mathematical finance, 2008, 18(3): 385-426.
- [10] HE X D, ZHOU X Y. Portfolio choice via quantiles[J]. Mathematical finance, 2011, 21(2): 203-231.
- [11] BI J, JIN H, MENG Q. Behavioral mean-variance portfolio selection[J]. European journal of operational research, 2018, 271(2): 644-663.
- [12] BI J, ZHONG Y, ZHOU X Y. Mean-semivariance portfolio selection under probability distortion[J]. Stochastics, 2013, 85(4): 604-619.
- [13] KANG Z, LI X, LI Z, et al. Data-driven robust mean-CVaR portfolio selection under distribution ambiguity[J]. Quantitative finance, 2019, 19(1): 105-121.
- [14] BAN G Y, EL KAROUÏ N, LIM A E. Machine learning and portfolio optimization[J]. Management science, 2016, 64(3): 1136-1154.
- [15] BERTSIMAS D, GUPTA V, KALLUS N. Robust sample average approximation[J]. Mathematical programming, 2018, 171(1/2): 217-282.
- [16] DELAGE E, YE Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems[J]. Operations research, 2010, 58(3): 595-612.
- [17] CETINKAYA E, THIELE A. Data-driven portfolio management with quantile constraints[J]. OR spectrum, 2015, 37(3): 761-786.
- [18] PRELEC D. The probability weighting function[J]. Econometrica, 1998, 66(3): 497-527.
- [19] SHAPIRO A, DENTCHEVA D, RUSZCZYŃSKI A. Lectures on Stochastic Programming: modeling and theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [20] KLEYWEGT A J, SHAPIRO A, HOMEM-DE-MELLO T. The sample average approximation method for stochastic discrete optimization[J]. SIAM journal on optimization, 2001, 12(2): 479-502.
- [21] MEHDINEJAD M, MOHAMMADI-IVATLOO B, DADASHZADEH-BONAB R, et al. Solution of optimal reactive power dispatch of power systems using hybrid particle swarm optimization and imperialist competitive algorithms[J]. International journal of electrical power and energy systems, 2016, 83: 104-116.
- [22] HOSSEINI S, AL KHALED A. A survey on the imperialist competitive algorithm metaheuristic: implementation in engineering domain and directions for future research[J]. Applied soft computing, 2014, 24: 1078-1094.
- [23] SADEGHI J, MOUSAVI S M, NIAKI S T A. Optimizing an inventory model with fuzzy demand, backordering, and discount using a hybrid imperialist competitive algorithm[J]. Applied mathematical modelling, 2016, 40(15/16): 7318-7335.

[责任编辑:陆炳新]