第 46 卷第 3 期　　南京师大学报(自然科学版)　　Vol. 46 No. 3
2023 年 9 月　　JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)　　Sept,2023

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.03.001

(2n-4,2n-1)-扩充 m-准 Skolem 序列的构造

王彦乐[1],曹海涛[2]

(1.南京师范大学强化培养学院,江苏 南京 210023)
(2.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[**摘要**]　设 n 为正整数,$m\in\{1,2,\cdots,n\}$,$p,q\in\{1,2,\cdots,2n\}$,$p<q$. n 阶(p,q)-扩充 m-准 Skolem 序列是一个由集合 $M=\{0,1,2,\cdots,n\}\setminus\{m\}$ 中元素组成的序列 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_{2n})$,满足性质:(1)$s_p=s_q=0$;(2)对任意正整数 $k\in M$,恰好存在两个正整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant 2n$,使得 $s_i=s_j=k$,且 $j-i=k$. 本文用序列拼接和直接构造等方法证明$(2n-4,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列存在的必要条件也是充分的.

[**关键词**]　Skolem 序列,Langford 序列,(p,q)-扩充 m-准 Skolem 序列

[**中图分类号**]O157.2　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2023)03-0001-05

The Existence of $(2n-4,2n-1)$-extended m-near-Skolem Sequences

Wang Yanle[1],Cao Haitao[2]

(1.Honor College,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)
(2.School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:Let n be a positive integer,$m\in\{1,2,\cdots,n\}$,$p,q\in\{1,2,\cdots,2n\}$,$p<q$. A (p,q)-extended m-near-Skolem sequence of order n is a sequence $S=(s_1,s_2,\cdots,s_{2n})$ with elements in $M=\{0,1,2,\cdots,n\}\setminus\{m\}$,which satisfies the following property:(1)$s_p=s_q=0$;(2)for every positive interger $k\in M$,there are exactly two integers $i,j,1\leqslant i<j\leqslant 2n$, such that $s_i=s_j=k$ and $j-i=k$. In this paper,we prove that the necessary conditions for the existence of $(2n-4,2n-1)$-extended m-near-Skolem sequences are also sufficient by sequence appending method and direct construction method.

Key words:Skolem sequence,Langford sequence,(p,q)-extended m-near-Skolem sequence

Skolem 序列最早在 1957 年由 Skolem 提出[1],此后有很多相关研究,如带钩的 Skolem 序列[2],扩充 Skolem 序列[3-4]和带钩的扩充 Skolem 序列[5],m-准 Skolem 序列和带钩的 m-准 Skolem 序列[6],(p,q)-扩充 Rosa 序列[7],k-扩充 m-准 Skolem 序列[8-10]等. 2006 年,文献[11]首次提出了(p,q)-扩充 m-准 Skolem 序列的概念[11],他们给出了该序列存在的必要条件,并且提出了关于其存在性的猜想.

定义 1　设 n 为正整数,$m\in\{1,2,\cdots,n\}$,$p,q\in\{1,2,\cdots,2n\}$,$p<q$. n 阶(p,q)-扩充 m-准 Skolem 序列是一个由集合 $M=\{0,1,2,\cdots,n\}\setminus\{m\}$ 中元素组成的序列 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_{2n})$,满足性质:(1)$s_p=s_q=0$;(2)对任意正整数 $k\in M$,恰好存在两个正整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant 2n$,使得 $s_i=s_j=k$,且 $j-i=k$.

猜想 1　([11])n 阶(p,q)-扩充 m-准 Skolem 序列存在当且仅当(1) $n\equiv 0,1(\mathrm{mod}\ 4)$ 且 $m+p+q\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$;(2)$n\equiv 2,3(\mathrm{mod}\ 4)$ 且 $m+p+q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$.

n 阶(p,q)-扩充 m-准 Skolem 序列的已知结果仅有 Reid 等在文[11]中构造的$(2,3)$-扩充 m-准 Skolem 序列. 注意到将(p,q)-扩充 m-准 Skolem 序列 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_{2n-1},s_{2n})$翻转后得到的序列$(s_{2n},s_{2n-1},\cdots,s_2,s_1)$是$(2n+1-q,2n+1-p)$-扩充 m-准 Skolem 序列,所以由他们构造的$(2,3)$-扩充 m-准 Skolem 序列可得$(2n-2,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列.

本文继续考虑 p,q 奇偶性不同的情形,用序列拼接和直接构造等方法证明 n 阶$(2n-4,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列存在当且仅当:(1) $n\equiv 0,1(\mathrm{mod}\ 4)$且 m 为奇数;(2)$n\equiv 2,3(\mathrm{mod}\ 4)$ 且 m 为偶数.

收稿日期:2023-01-19.
基金项目:国家自然科学基金项目(12071226、11931006)、江苏省大学生创新创业项目(202210319025Z).
通讯作者:曹海涛,博士,教授,博士生导师. 研究方向:组合数学. E-mail:05313@njnu.edu.cn

1　主要结果

本文采用的方法主要是序列拼接法和直接构造法. 下面首先介绍序列拼接法中用到的几个序列的定义和已知结论.

定义 2　设 n,d 为正整数,$n\geqslant d$. 起点为 d 的 n 阶 Langford 序列 L_n^d 是一个由集合 $M=\{d,d+1,\cdots,n\}$ 中元素组成的序列 $(l_1,l_2,\cdots,l_{2(n-d+1)})$,满足性质:对任意正整数 $k\in M$,恰好存在两个正整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant 2(n-d+1)$,使得 $l_i=l_j=k$,且 $j-i=k$.

定义 3　设 n,d 为正整数,$n\geqslant d$. 起点为 d 的 n 阶带钩的 Langford 序列 HL_n^d 是一个由集合 $M=\{0,d,d+1,\cdots,n\}$ 中元素组成的序列 $(l_1,l_2,\cdots,l_{2(n-d+1)+1})$,满足性质:(1) $l_{2(n-d+1)}=0$;(2)对任意正整数 $k\in M$,恰好存在两个正整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant 2(n-d+1)+1$,使得 $l_i=l_j=k$,且 $j-i=k$.

定义 4　设 n 为正整数,$p,q\in\{1,2,\cdots,2n\}$,$p<q$. n 阶 (p,q)-扩充 Skolem 序列是一个由集合 $M=\{0,1,2,\cdots,n\}$ 中元素组成的序列 $S=(s_1,s_2,\cdots,s_{2n})$,满足性质:(1) $s_p=s_q=0$;(2)对任意正整数 $k\in M$,恰好存在两个正整数 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant 2n+2$,使得 $s_i=s_j=k$,且 $j-i=k$.

引理 1　([12]) L_n^d 存在当且仅当(1) $n\geqslant 3d-2$;(2) $n-d\equiv 0,3\pmod 4$ 且 d 为奇数,或 $n-d\equiv 2,3\pmod 4$ 且 d 为偶数.

引理 2　([12])设 $l=n-d+1$,HL_n^d 存在当且仅当(1) $l(l-2d+1)+2\geqslant 0$;(2) $l\equiv 2,3\pmod 4$ 且 d 为奇数,或 $l\equiv 1,2\pmod 4$ 且 d 为偶数.

引理 3　([5]) n 阶 $(p,2n+1)$-扩充 Skolem 序列存在当且仅当(1) $(p,n)\neq(2,1)$;(2) $n\equiv 0,1\pmod 4$ 且 p 为偶数,或 $n\equiv 2,3\pmod 4$ 且 p 为奇数.

下面给出得到 n 阶 $(2n-4,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列的拼接法.

引理 4　设 $n\geqslant 3m+1$. n 阶 $(2n-4,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列对下列 4 种情形都存在:

(1) $n\equiv 0,1\pmod 4$, $m\equiv 1\pmod 4$, $m\geqslant 5$;

(2) $n\equiv 2,3\pmod 4$, $m\equiv 2\pmod 4$, $m\geqslant 6$;

(3) $n\equiv 0,1\pmod 4$, $m\equiv 3\pmod 4$, $m\geqslant 11$;

(4) $n\equiv 2,3\pmod 4$, $m\equiv 0\pmod 4$, $m\geqslant 8$.

证明　对于情形(1)和(2),由引理 1 和 3 知均存在 L_n^{m+1} 和 $m-1$ 阶 $(2m-4,2m-1)$-扩充 Skolem 序列 K,容易验证 (L_n^{m+1},K) 为所求序列. 对于情形(3)和(4),由引理 1 和 2 知均存在 L_{m-1}^3 和 HL_n^{m+1},容易验证 $(1,1,L_{m-1}^3,HL_n^{m+1},2,0,2)$ 为所求序列.

引理 5　n 阶 $(2n-4,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列对下列 2 种情形都存在:

(1) $n\equiv 0,1\pmod 4$, $n\geqslant 4$, $m=1,3,5,7$;

(2) $n\equiv 2,3\pmod 4$, $n\geqslant 6$, $m=2,4,6,8$.

证明　(1)当 $m=1$ 时,$n=4,5$ 的所求序列分别为:2 4 2 0 3 4 0 3,4 2 5 2 4 0 3 5 0 3;若 $n\geqslant 8$,由引理 2 知存在 HL_n^3,容易验证 $(HL_n^3,2,0,2)$ 为所求序列. 当 $m=3$ 时,$n=4,5$ 的所求序列分别为:4 1 1 0 4 2 0 2,4 5 1 1 4 0 5 2 0 2;$n=8,9,12$ 见[13];若 $n\geqslant 13$,由引理 1 知存在 L_n^5,容易验证 $(L_n^5,4,1,1,0,4,2,0,2)$ 为所求序列. 当 $m=5$ 时,$n=5$ 的所求序列为:4 1 1 3 4 0 3 2 0 2;$n=8,9,12,13$ 见[13];若 $n\geqslant 16$,由引理 4 知所求序列存在. 当 $m=7$ 时,$n=8,9,12,13,16,17,20,21$ 见[13];若 $n\geqslant 24$,由引理 4 知所求序列存在.

(2)当 $m=2$ 时,$n=6,7$ 的所求序列分别为:6 4 1 1 5 4 6 0 3 5 0 3,7 4 6 1 1 4 5 7 6 0 3 5 0 3;$n=10,11,14,15,18$ 见[13];若 $n\geqslant 19$,由引理 1 知存在 L_n^7,容易验证 $(L_n^7,6,4,1,1,5,4,6,0,3,5,0,3)$ 为所求序列. 当 $m=4$ 时,$n=6,7$ 的所求序列分为:6 1 1 2 5 2 6 0 3 5 0 3,7 5 1 1 2 6 2 5 7 0 3 6 0 3;$n=10,11,14,15,18$ 见[13];若 $n\geqslant 19$,由引理 1 知存在 L_n^7,容易验证 $(L_n^7,6,1,1,2,5,2,6,0,3,5,0,3)$ 为所求序列. 当 $m=6$ 时,$n=6,7$ 的所求序列分别为:5 1 1 3 4 5 3 0 4 2 0 2,7 1 1 3 4 5 3 7 4 0 5 2 0 2;$n=10,11,14,15,18$,见[13];若 $n\geqslant 19$,由引理 4 知所求序列存在. 当 $m=8$ 时,$n=10,11,14,15,18,19,22,23$ 见[13];若 $n\geqslant 26$,由引理 4 知所求序列存在.

定理 6　n 阶 $(2n-4,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列存在当且仅当(1) $n\equiv 0,1\pmod 4$, $n\geqslant 4$, $m\equiv 1\pmod 2$;(2) $n\equiv 2,3\pmod 4$, $n\geqslant 6$, $m\equiv 0\pmod 2$.

证明 由 $2n-4\geqslant 1$ 知 $n\geqslant 3$. 当 $n=3$ 时,由定义和猜想 1 知 $m=2$. 此时第 2,5 位为 0,1 只能排在第 3,4 位,故 3 只能排在第 1,6 位,与定义 1 矛盾,所以不存在 3 阶(2,5)-扩充 2-准 Skolem 序列. 以下假设 $n\geqslant 4$. 当 $1\leqslant m\leqslant 8$ 时,由引理 5 知符合必要条件的序列都存在;当 $m\geqslant 9$ 时,下面分 8 种情况分别给出相应的构造,其中所用表格第一、二列的 i,j 表示第三列中元素 k 在所求序列中出现的两个位置.

1. $n=8s, m=2t+1, t\geqslant 4$. $s=2,3$ 见[13], $s\geqslant 4$ 见表 1.
2. $n=8s+1, m=2t+1, t\geqslant 4$. $s=1,2,3$ 见[13], $s\geqslant 4$ 见表 2.
3. $n=8s+2, m=2t, t\geqslant 5$. $s=1,2,3$ 见[13], $s\geqslant 4$ 见表 3.
4. $n=8s+3, m=2t, t\geqslant 5$. $s=1,2,3$ 见[13], $s\geqslant 4$ 见表 4.
5. $n=8s+4, m=2t+1, t\geqslant 4$. $s=1,2$ 见[13], $s\geqslant 3$ 见表 5.
6. $n=8s+5, m=2t+1, t\geqslant 4$. $s=1,2,3$ 见[13], $s\geqslant 4$ 见表 6.
7. $n=8s+6, m=2t, t\geqslant 5$. $s=1,2,3$ 见[13], $s\geqslant 4$ 见表 7.
8. $n=8s+7, m=2t, t\geqslant 5$. $s=1,2$ 见[13], $s\geqslant 3$ 见表 8.

表 1 $n=8s$ 的直接构造

Table 1 Direct construction of $n=8s$

i	j	k	
$1+r$	$8s-r$	$8s-2r-1$	$0\leqslant r\leqslant 4s-t-2$
$4s-t+r$	$4s+t-r-1$	$2t-2r-1$	$0\leqslant r\leqslant t-4$
$4s+r-3$	$12s-r-3$	$8s-2r$	$0\leqslant r\leqslant 5$
$8s+2r+2$	$16s-2r-10$	$8s-4r-12$	$0\leqslant r\leqslant s-4$
$8s+2r+1$	$16s-2r-13$	$8s-4r-14$	$0\leqslant r\leqslant s-3$
$10s-4+r$	$14s-r-8$	$4s-2r-4$	$0\leqslant r\leqslant 2s-6$
$12s-9$	$16s-9$	$4s$	
$16s-8$	$16s-2$	6	
$16s-5$	$16s$	5	
$16s-11$	$16s-7$	4	
$16s-6$	$16s-3$	3	
$14s-6$	$14s-4$	2	
$4s+t$	$4s+t+1$	1	

表 2 $n=8s+1$ 的直接构造

Table 2 Direct construction of $n=8s+1$

i	j	k	
$1+r$	$8s-r+2$	$8s-2r+1$	$0\leqslant r\leqslant 4s-t-1$
$4s-t+r+1$	$4s+t-r$	$2t-2r-1$	$0\leqslant r\leqslant t-4$
$4s+r-2$	$12s-r-2$	$8s-2r$	$0\leqslant r\leqslant 5$
$8s+2r+3$	$16s-2r-11$	$8s-4r-14$	$0\leqslant r\leqslant 2s-6$
$8s+2r+4$	$16s-2r-8$	$8s-4r-12$	$0\leqslant r\leqslant s-3$
$10s+2r$	$14s-2r-8$	$4s-4r-8$	$0\leqslant r\leqslant s-4$
$12s-1$	$16s-5$	$4s-4$	
$16s-7$	$16s-1$	6	
$16s-3$	$16s+2$	5	
$16s-4$	$16s$	4	
$16s-9$	$16s-6$	3	
$14s-6$	$14s-4$	2	
$4s+t+1$	$4s+t+2$	1	

表 3 $n=8s+2$ 的直接构造

Table 3 Direct construction of $n=8s+2$

i	j	k	
$1+r$	$8s-r+3$	$8s-2r+2$	$0\leqslant r\leqslant 4s-t$
$4s-t+r+2$	$4s+t-r$	$2t-2r-2$	$0\leqslant r\leqslant t-5$
$4s+r-2$	$12s-r-1$	$8s-2r+1$	$0\leqslant r\leqslant 6$
$8s+2r+5$	$16s-2r-8$	$8s-4r-13$	$0\leqslant r\leqslant s-4$
$8s+2r+4$	$16s-2r-11$	$8s-4r-15$	$0\leqslant r\leqslant s-3$
$10s-1+r$	$14s-r-6$	$4s-2r-5$	$0\leqslant r\leqslant 2s-7$
$12s$	$16s-1$	$4s-1$	
$16s-5$	$16s+2$	7	
$16s-2$	$16s+4$	6	
$16s-4$	$16s+1$	5	
$16s-7$	$16s-3$	4	
$16s-9$	$16s-6$	3	
$14s-4$	$14s-2$	2	
$4s+t+1$	$4s+t+2$	1	

表 4 $n=8s+3$ 的直接构造

Table 4 Direct construction of $n=8s+3$

i	j	k	
$1+r$	$8s-r+3$	$8s-2r+2$	$0\leqslant r\leqslant 4s-t$
$4s-t+r+2$	$4s+t-r$	$2t-2r-2$	$0\leqslant r\leqslant t-5$
$4s+r-2$	$12s-r+1$	$8s-2r+3$	$0\leqslant r\leqslant 6$
$8s+2r+5$	$16s-2r-6$	$8s-4r-11$	$0\leqslant r\leqslant s-4$
$8s+2r+4$	$16s-2r-9$	$8s-4r-13$	$0\leqslant r\leqslant s-3$
$10s-1+r$	$14s-r-4$	$4s-2r-3$	$0\leqslant r\leqslant 2s-6$
$12s-6$	$16s-5$	$4s+1$	
$16s-4$	$16s+3$	7	
$16s$	$16s+6$	6	
$16s-1$	$16s+4$	5	
$16s-7$	$16s-3$	4	
$16s-2$	$16s+1$	3	
$14s-2$	$14s$	2	
$4s+t+1$	$4s+t+2$	1	

表 5　$n=8s+4$ 的直接构造

Table 5　Direct construction of $n=8s+4$

i	j	k	
$1+r$	$8s-r+4$	$8s-2r+3$	$0\leqslant r\leqslant 4s-t$
$4s-t+r+2$	$4s+t-r+1$	$2t-2r-1$	$0\leqslant r\leqslant t-4$
$4s+r-1$	$12s-r+3$	$8s-2r+4$	$0\leqslant r\leqslant 5$
$8s+2r+6$	$16s-2r-2$	$8s-4r-8$	$0\leqslant r\leqslant s-3$
$8s+2r+5$	$16s-2r-5$	$8s-4r-10$	$0\leqslant r\leqslant s-2$
$10s+2+r$	$14s-r-2$	$4s-2r-4$	$0\leqslant r\leqslant 2s-6$
$12s-3$	$16s-3$	$4s$	
$16s$	$16s+6$	6	
$16s+3$	$16s+8$	5	
$16s+1$	$16s+5$	4	
$16s-1$	$16s+2$	3	
$14s$	$14s+2$	2	
$4s+t+2$	$4s+t+3$	1	

表 6　$n=8s+5$ 的直接构造

Table 6　Direct construction of $n=8s+5$

i	j	k	
$1+r$	$8s-r+6$	$8s-2r+5$	$0\leqslant r\leqslant 4s-t+1$
$4s-t+r+3$	$4s+t-r+2$	$2t-2r-1$	$0\leqslant r\leqslant t-4$
$4s+r$	$12s-r+4$	$8s-2r+4$	$0\leqslant r\leqslant 5$
$8s+2r+8$	$16s-2r$	$8s-4r-8$	$0\leqslant r\leqslant s-2$
$8s+2r+7$	$16s-2r-3$	$8s-4r-10$	$0\leqslant r\leqslant s-1$
$10s+6+r$	$14s-r-2$	$4s-2r-8$	$0\leqslant r\leqslant 2s-8$
$12s+5$	$16s+1$	$4s-4$	
$16s+2$	$16s+8$	6	
$16s+5$	$16s+10$	5	
$16s-1$	$16s+3$	4	
$16s+4$	$16s+7$	3	
$14s$	$14s+2$	2	
$4s+t+3$	$4s+t+4$	1	

表 7　$n=8s+6$ 的直接构造

Table 7　Direct construction of $n=8s+6$

i	j	k	
$1+r$	$8s-r+7$	$8s-2r+6$	$0\leqslant r\leqslant 4s-t+2$
$4s-t+r+4$	$4s+t-r+2$	$2t-2r-2$	$0\leqslant r\leqslant t-5$
$4s+r$	$12s-r+5$	$8s-2r+5$	$0\leqslant r\leqslant 6$
$8s+2r+9$	$16s-2r$	$8s-4r-9$	$0\leqslant r\leqslant s-3$
$8s+2r+8$	$16s-2r-3$	$8s-4r-11$	$0\leqslant r\leqslant s-2$
$10s+5+r$	$14s-r$	$4s-2r-5$	$0\leqslant r\leqslant 2s-7$
$12s+6$	$16s+5$	$4s-1$	
$16s+3$	$16s+10$	7	
$16s+1$	$16s+7$	6	
$16s-1$	$16s+4$	5	
$16s+2$	$16s+6$	4	
$16s+9$	$16s+12$	3	
$14s+2$	$14s+4$	2	
$4s+t+3$	$4s+t+4$	1	

表 8　$n=8s+7$ 的直接构造

Table 8　Direct construction of $n=8s+7$

i	j	k	
$1+r$	$8s-r+7$	$8s-2r+6$	$0\leqslant r\leqslant 4s-t+2$
$4s-t+r+4$	$4s+t-r+2$	$2t-2r-2$	$0\leqslant r\leqslant t-5$
$4s+r$	$12s-r+7$	$8s-2r+7$	$0\leqslant r\leqslant 6$
$8s+2r+9$	$16s-2r+2$	$8s-4r-7$	$0\leqslant r\leqslant s-3$
$8s+2r+8$	$16s-2r-1$	$8s-4r-9$	$0\leqslant r\leqslant s-2$
$10s+5+r$	$14s-r+2$	$4s-2r-3$	$0\leqslant r\leqslant 2s-6$
$12s$	$16s+1$	$4s+1$	
$16s+4$	$16s+11$	7	
$16s+8$	$16s+14$	6	
$16s+7$	$16s+12$	5	
$16s+5$	$16s+9$	4	
$16s+3$	$16s+6$	3	
$14s+4$	$14s+6$	2	
$4s+t+3$	$4s+t+4$	1	

2　结论

本文主要证明了 n 阶 $(2n-4,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列,即 n 阶 $(2,5)$-扩充 m-准 Skolem 序列的存在性. 同时,n 阶 $(2n-4,2n-1)$-扩充 m-准 Skolem 序列存在也等价于带钩的 $(2n-4)$-扩充 m-准 Skolem 序列存在.

[参考文献]

[1]　SKOLEM T. On certain distributions of integers in pairs with given differences[J]. Mathematics scandinavica,1957,5:57-68.

[2]　O'KEEFE E S. Verification of a conjecture of Th. Skolem[J]. Mathematics scandinavica,1961,9:80-82.

[3]　ABRHAM J,KOTZIG A. Skolem sequences and additive permutations[J]. Discrete mathematics,1981,37(2-3):143-146.

[4]　BAKER C A. Extended Skolem sequences[J]. Journal of combinatorial designs,1995,3(5):363-379.

[5]　LINEK V,JIANG Z. Hooked k-extended Skolem sequences[J]. Discrete mathematics,1999,196(1-3):229-238.

[6]　SHALABY N. The existence of near-Skolem and hooked near-Skolem sequences[J]. Discrete mathematics,1994,135(1-3):303-319.

[7] LINEK V,SHALABY N. The existence of(p,q)-extended Rosa sequences[J]. Discrete mathematics,2008,308(9):1583-1602.

[8] BAKER C A,LINEK V,SHALABY N. Extended near Skolem sequences Part I[J]. Journal of combinatorial designs,2021,29(11):765-785.

[9] BAKER C A,LINEK V,SHALABY N. Extended near Skolem sequences Part II[J]. Journal of combinatorial designs,2021,29(12):833-869.

[10] BAKER C A,LINEK V,SHALABY N. Extended near Skolem sequences Part III[J]. Journal of combinatorial designs,2022,30(10):637-652.

[11] REID C,SHALABY N. The existence of two new classes of near-Skolem type sequences[J]. International mathematical forum,2006,1(17-20):909-932.

[12] SIMPSON J E. Langford sequences:perfect and hooked[J]. Discrete mathematics,1983,44(1):97-104.

[13] https://weibo.com/u/6121464726.

[责任编辑:陆炳新]