

由二阶循环矩阵构造 Hopf-Galois 代数 与拟三角 Hopf 代数

李 安, 方云霏, 常志诚, 黄芯琪, 张良云

(南京农业大学理学院, 江苏 南京 210095)

[摘要] 本文分别由二阶循环矩阵构造了 Hopf-Galois 代数与 Hopf 代数, 最后, 由二阶循环矩阵构造拟三角 Hopf 代数.

[关键词] 循环矩阵, Hopf-Galois 代数, Hopf 代数, 拟三角 Hopf 代数

[中图分类号] O152.5 [文献标志码] A [文章编号] 1001-4616(2023)03-0006-06

Construction of Hopf-Galois Algebra and Quasitriangular Hopf Algebra from Second-Order Circulant Matrix

Li An, Fang Yunfei, Chang Zhicheng, Huang Xinqi, Zhang Liangyun

(College of Science, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)

Abstract: In this paper, we construct Hopf-Galois algebra and Hopf algebra respectively from second-order circulant matrix. Finally we construct quasitriangular Hopf algebra from second-order circulant matrix.

Key words: circulant matrix, Hopf-Galois algebra, Hopf algebra, quasitriangular Hopf algebra

美国学者 Muir 在 1885 年首次提出循环矩阵的观念. 但在 1950 年以前, 有关循环矩阵的研究甚少, 没有引起数学工作者的特别关注. 随着现代科学技术的发展, 自 1950 年以来, 人们发现循环矩阵在实际中有着许多应用, 如, 在编码理论、数理统计、结构计算、图像管理、石油勘探等方面有着广泛的应用. 自此, 众多学者开始研究循环矩阵^[1].

近年来, 众多学者和专家从代数学、组合数学、数学物理和几何学等领域方向, 研究具有附加结构的 (Hopf) 代数, 例如, Hopf-Galois 代数和拟三角 Hopf 代数等.

Hopf-Galois 对象是代数学中非常重要的研究内容. 量子挠子 (Quantum torsors) 是由 Grunspan 于文 [2] 中提出的. 由于这种量子挠子与 Hopf-Galois 对象有关, 文 [3] 称这种结构为 Hopf-Galois 代数.

Hopf 代数是一个既具有代数结构又具有余代数结构的一类特殊代数. 20 世纪 60 年代后, Hopf 代数迅速发展起来, 成为代数学中的一个重要分支, 并在众多的数学分支中都有着重要的应用, 例如, 组合理论、Galois 理论、代数群论、Lie 理论等, 并在量子逆扩散方法和超对称理论的研究中占有重要的地位^[4].

拟三角 Hopf 代数 (Quasitriangular Hopf algebra) 是由世界著名数学家 Drinfeld 于文 [5] 中提出的, 实际上它不仅是量子群, 而且也是量子 Yang-Baxter 方程的解. 因此, 拟三角 Hopf 代数的研究十分重要.

本文基于以上的研究背景, 将由二阶循环矩阵构造 Hopf-Galois 代数与 Hopf 代数, 最后, 由二阶循环矩阵构造拟三角 Hopf 代数等.

本文所有研究对象均是在实数域 \mathbb{R} 上考虑, 张量积为实数域 \mathbb{R} 上的张量积, 代数均为具有单位元的结合代数. 下面回顾一些基本概念.

收稿日期: 2023-02-21.

基金项目: 中华农业科教基金会项目 (NKJ202102009)、国家大学生实践创新训练计划资助项目 (202210307032Z).

通讯作者: 张良云, 教授, 博士生导师, 研究方向: 代数学. E-mail: zlyun@njau.edu.cn

1 准备知识

定义 1^[6] 设 A 是一个代数(单位元记为 1),如果存在一个代数映射 $\mu: A \rightarrow A \otimes A^{\text{op}} \otimes A$,使得

$$(1) (m \otimes id) \circ \mu = \eta \otimes id, (id \otimes m) \circ \mu = id \otimes \eta,$$

$$(2) (\mu \otimes id \otimes id) \circ \mu = (id \otimes id \otimes \mu) \circ \mu,$$

则称 A 是一个 Hopf-Galois 代数,其中 $m: A \otimes A \rightarrow A$ 和 $\eta: R \rightarrow A$ 分别是代数 A 的乘法和单位, A^{op} 是代数 A 的反代数.

如果对任意 $r \in A$,记

$$\mu(r) = \sum r_{(1)} \otimes r_{(2)} \otimes r_{(3)},$$

因此,有

$$r \otimes 1 = \sum r_{(1)} \otimes r_{(2)} r_{(3)}, 1 \otimes r = \sum r_{(1)} r_{(2)} \otimes r_{(3)}. \quad (1)$$

并记

$$\sum r_{(1)} \otimes r_{(2)} \otimes r_{(3)} \otimes r_{(4)} \otimes r_{(5)} : \sum = \mu(r_{(1)}) \otimes r_{(2)} \otimes r_{(3)} \sum = r_{(1)} \otimes r_{(2)} \otimes \mu(r_{(3)}). \quad (2)$$

以后,称代数映射 μ 为 Hopf-Galois 代数 A 的一个 Hopf-Galois 映射.

定义 2^[7] 设 (B, m, η) 是一个代数,如果 (B, Δ, ε) 又是一个余代数,并且 Δ 和 ε 都是代数同态(等价于 m, η 都是余代数同态),则称 $(B, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ 为一个双代数,简称 B 为双代数.

这里 m 是代数 B 的乘法映射, η 是代数 B 的单位映射, Δ 是余代数 B 的余乘法映射, ε 是余代数 B 的余单位映射.

定义 3^[7] 称 $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ 是一个双代数,如果存在一个线性映射 $S: H \rightarrow H$ 使得对任意 $h \in H$,

$$\sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h) 1 = \sum S(h_1) h_2,$$

则称 $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ 是一个 Hopf 代数(以后,简称为 Hopf 代数 H),并称映射 S 为 Hopf 代数 H 的对极.

定义 4^[8] 设 $(B, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ 是一个双代数(Hopf 代数),如果存在一个可逆元 $R = \sum R^1 \otimes R^2 \in B \otimes B$ 满足

$$(QT1) \tau \Delta(a) = R \Delta(a) R^{-1},$$

$$(QT2) (\Delta \otimes id) R = R^{13} R^{23}, \text{即, } \sum R_1^1 \otimes R_2^1 \otimes R^2 = \sum R^1 \otimes r^1 \otimes R^2 r^2,$$

$$(QT3) (id \otimes \Delta) R = R^{13} R^{12}, \text{即, } \sum R^1 \otimes R_1^2 \otimes R_2^2 = \sum R^1 r^1 \otimes r^2 \otimes R^2,$$

则称 B 是一个拟三角双代数(Hopf 代数).

这里 τ 表示 $B \otimes B$ 上的扭曲映射, $R^{13} = \sum R^1 \otimes 1 \otimes R^2, R^{23} = \sum 1 \otimes R^1 \otimes R^2, R^{12} = \sum R^1 \otimes R^2 \otimes 1, r = R$.

显然, $\sum R^1 \varepsilon(R^2) = 1 = \sum \varepsilon(R^1) R^2$.

特别地,每个双代数(Hopf 代数) B 都有拟三角双代数结构(Hopf 代数) $(B, R = 1 \otimes 1)$,以后称之为平凡的拟三角双代数结构(Hopf 代数).

定义 5^[1] 称实数域 R 上的 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

为 n 阶循环矩阵,简记为 $A = C(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$.

显然,实数域上的 n 阶矩阵的全体构成的集合关于矩阵的加法与矩阵的乘法,构成 R 上的一个代数,以后称为一个 n 阶循环矩阵代数.

取 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_0 = 0$, 则得到如下基础循环矩阵:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $A = a_0 I_n + a_1 J + a_2 J^2 + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$, 并且 $I_n, J, J^2, \cdots, J^{n-1}$ 线性无关, 故它可以看作是 n 循环矩阵代数的一组基.

2 由二阶循环矩阵构造 Hopf-Galois 代数

下面, 将在二阶循环矩阵代数 A 上构造 Hopf-Galios 映射 $\mu: A \rightarrow A \otimes A^{op} \otimes A$.

根据上述讨论, 二阶循环矩阵代数 A 上有一组基为 $E: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 并且满足 $F \cdot F = E$. 由于 μ 为代数映射, 所以 $\mu(E) = E \otimes E \otimes E$,

令 $\mu(F) = l_1 E \otimes E \otimes E + l_2 E \otimes E \otimes F + l_3 E \otimes F \otimes E + l_4 E \otimes F \otimes F + l_5 F \otimes E \otimes E + l_6 F \otimes E \otimes F + l_7 F \otimes F \otimes E + l_8 F \otimes F \otimes F$.

为了满足(1)式, 取 $r = F$, 须有

$$F \otimes E = l_1 E \otimes E + l_2 E \otimes F + l_3 E \otimes F + l_4 E \otimes E + l_5 F \otimes E + l_6 F \otimes F + l_7 F \otimes F + l_8 F \otimes E.$$

$$E \otimes F = l_1 E \otimes E + l_2 E \otimes F + l_3 F \otimes E + l_4 F \otimes F + l_5 F \otimes E + l_6 F \otimes F + l_7 E \otimes E + l_8 E \otimes F.$$

经过整理, 可得如下方程:

$$l_1 + l_4 = 0, l_2 + l_3 = 0, l_5 + l_8 = 1, l_6 + l_7 = 0,$$

$$l_1 + l_7 = 0, l_2 + l_8 = 1, l_3 + l_5 = 0, l_6 + l_4 = 0.$$

整理可得, $l_1 = -l_4 = -l_7 = l_6, l_8 - 1 = -l_2 = -l_5 = l_3$.

为了满足(2)式, 同理取 $r = F$, 须有

式(2)左边为 $l_1 \mu(E) \otimes E \otimes E + l_2 \mu(E) \otimes E \otimes F + l_3 \mu(E) \otimes F \otimes E + l_4 \mu(E) \otimes F \otimes F + l_5 \mu(F) \otimes E \otimes E + l_6 \mu(F) \otimes E \otimes F + l_7 \mu(F) \otimes F \otimes E + l_8 \mu(F) \otimes F \otimes F$.

式(2)右边为 $l_1 E \otimes E \otimes \mu(E) + l_2 E \otimes E \otimes \mu(F) + l_3 E \otimes F \otimes \mu(E) + l_4 E \otimes F \otimes \mu(F) + l_5 F \otimes E \otimes \mu(E) + l_6 F \otimes E \otimes \mu(F) + l_7 F \otimes F \otimes \mu(E) + l_8 F \otimes F \otimes \mu(F)$.

整理上述等式, 并得到如下方程:

$$l_1 + l_5 l_1 = l_1 + l_2 l_1, l_2 + l_6 l_1 = l_2 l_2, l_3 + l_7 l_1 = l_2 l_3,$$

$$l_4 + l_8 l_1 = l_2 l_4, l_5 l_3 = l_4 l_1, l_6 l_3 = l_4 l_2,$$

$$l_7 l_3 = l_4 l_3, l_5 l_5 = l_5 + l_6 l_1, l_5 l_6 = l_6 l_2,$$

$$l_5 l_7 = l_6 l_3, l_5 l_8 = l_4 l_6, l_5 l_7 = l_7 + l_7 l_1,$$

$$l_6 l_7 = l_8 l_2, l_7 l_7 = l_8 l_3, l_8 l_7 = l_8 l_4.$$

将 $l_1 = -l_4 = -l_7 = l_6, l_8 - 1 = -l_2 = -l_5 = l_3$ 代入 $l_2 + l_6 l_1 = l_2 l_2$ 和 $l_5 l_3 = l_4 l_1$, 得 $l_8 = 1, l_1 = 0$. 于是 $l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 0, l_4 = 0, l_5 = 0, l_6 = 0, l_7 = 0, l_8 = 1$.

故 $\mu(F) = F \otimes F \otimes F$, 于是得到:

命题 1 由二阶循环矩阵代数 A 构造的 Hopf-Galios 映射如下:

$$\mu(E) = E \otimes E \otimes E, \mu(F) = F \otimes F \otimes F.$$

3 由二阶循环矩阵构造 Hopf 代数

本节主要由二阶循环矩阵构造 Hopf 代数.

首先, 由二阶循环矩阵代数 A 构造双代数, 即, 构造余乘法映射 $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ 和余单位映射 $\varepsilon: A \rightarrow R$.

由于 Δ 和 ε 均为代数映射, 所以 $\Delta(F) = E \otimes E, \varepsilon(E) = 1$. 于是令

$$\Delta(F) = l_1 E \otimes E + l_2 E \otimes F + l_3 F \otimes E + l_4 F \otimes F,$$

$$\varepsilon(F) = l_5.$$

由于 ε 是代数映射,所以 $\varepsilon(FF) = \varepsilon(F)\varepsilon(F) = \varepsilon(E)$,于是

$$l_5^2 = 1. \quad (3)$$

由 (A, Δ, ε) 为余代数知: $(\varepsilon \otimes id)\Delta = (id \otimes \varepsilon)\Delta = id$, $(id \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes id)\Delta$,故两边作用元素 F ,有

$$l_1E + l_2F + l_3l_5E + l_4l_5F = F, l_1E + l_2l_5E + l_3F + l_4l_5F = F, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} l_1E \otimes (E \otimes E) + l_2E \otimes (l_1E \otimes E + l_2E \otimes F + l_3F \otimes E + l_4F \otimes F) + l_3F \otimes (E \otimes E) + F \otimes (l_1E \otimes E + l_2E \otimes F + \\ l_3F \otimes E + l_4F \otimes F) = l_1(E \otimes E) \otimes E + l_2(E \otimes E) \otimes F + l_3(l_1E \otimes E + l_2E \otimes F + l_3F \otimes E + l_4F \otimes F) \otimes E + \\ l_4(l_1E \otimes E + l_2E \otimes F + l_3F \otimes E + l_4F \otimes F) \otimes F. \end{aligned} \quad (5)$$

再由 Δ 是代数映射知, $\Delta(\alpha\beta) = \Delta(\alpha)\Delta(\beta)$,对任意 $\alpha, \beta \in A$,故

$$\begin{aligned} \Delta(F^2) = (l_1^2E \otimes E + l_1l_2E \otimes F + l_1l_3F \otimes E + l_1l_4F \otimes F) + (l_1l_2E \otimes F + l_2^2E \otimes E + l_2l_3F \otimes F + l_2l_4F \otimes E) + \\ (l_1l_3F \otimes E + l_2l_3F \otimes F + l_3^2E \otimes E + l_3l_4E \otimes F) + (l_4l_1F \otimes F + l_4l_2F \otimes E + l_4l_3E \otimes F + l_4^2E \otimes E) = \Delta(E) = E \otimes E. \end{aligned} \quad (6)$$

由式(3),得 $l_5 = \pm 1$.

由式(4),得

$$l_1 + l_3l_5 = 0, l_2 + l_4l_5 = 1, l_1 + l_2l_5 = 0, l_3 + l_4l_5 = 1. \quad (7)$$

由(5)式,得

$$l_1 + l_1l_2 = l_1 + l_1l_3, l_2^2 = l_2 + l_1l_4, l_3 + l_1l_4 = l_3^2, l_2l_4 = l_3l_4. \quad (8)$$

由(6)式,得

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = 1, l_1l_2 + l_1l_2 + l_3l_4 + l_3l_4 = 0, l_1l_3 + l_1l_3 + l_2l_4 + l_2l_4 = 0, l_1l_4 + l_1l_4 + l_2l_3 + l_2l_3 = 0. \quad (9)$$

(1) 当 $l_5 = 1$ 时,由(7)式及 $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = 1$,得 $l_1 = 0$ 或 $l_1 = -\frac{1}{2}$. 于是,当 $l_1 = 0$ 时,由式(7),得

$$l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 0, l_4 = 1, l_5 = 1.$$

当 $l_1 = -\frac{1}{2}$ 时,得

$$l_1 = -\frac{1}{2}, l_2 = \frac{1}{2}, l_3 = \frac{1}{2}, l_4 = \frac{1}{2}, l_5 = 1.$$

(2) 当 $l_5 = -1$ 时,由(7)式及 $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = 1$,得

$$l_1^2 + l_1^2 + l_1^2 + (l_1 - 1)^2 = 1.$$

解得: $l_1 = 0$ 或 $l_1 = \frac{1}{2}$. 于是当 $l_1 = 0$ 时,由(7)式,得

$$l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 0, l_4 = -1, l_5 = -1.$$

当 $l_1 = \frac{1}{2}$ 时,得

$$l_1 = \frac{1}{2}, l_2 = \frac{1}{2}, l_3 = \frac{1}{2}, l_4 = -\frac{1}{2}, l_5 = -1.$$

故有

命题 2 由二阶循环矩阵构造的双代数,有如下 4 种:

$$\Delta(E) = E \otimes E,$$

$$\Delta(F) = F \otimes F,$$

$$\varepsilon(E) = 1, \varepsilon(F) = 1.$$

或者

$$\Delta(E) = E \otimes E,$$

$$\Delta(F) = -\frac{1}{2}E \otimes E + \frac{1}{2}E \otimes F + \frac{1}{2}F \otimes E + \frac{1}{2}F \otimes F,$$

$$\varepsilon(E) = 1, \varepsilon(F) = 1.$$

或者

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= E \otimes E, \\ \Delta(F) &= -F \otimes F, \\ \varepsilon(E) &= 1, \varepsilon(F) = -1.\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= E \otimes E, \\ \Delta(F) &= \frac{1}{2}E \otimes E + \frac{1}{2}E \otimes F + \frac{1}{2}F \otimes E - \frac{1}{2}F \otimes F, \\ \varepsilon(E) &= 1, \varepsilon(F) = -1.\end{aligned}$$

下面,由二阶循环矩阵构造 Hopf 代数,即,构造对极映射 S . 根据对极映射 S 是反代数同态,令

$$S(E) = E, S(F) = l_6 E + l_7 F.$$

命题 3 由二阶循环矩阵构造的 Hopf 代数,有如下两种:

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= E \otimes E, \Delta(F) = F \otimes F, \\ \varepsilon(E) &= 1, \varepsilon(F) = 1, \\ S(E) &= E, S(F) = F.\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= E \otimes E, \Delta(F) = -F \otimes F, \\ \varepsilon(E) &= 1, \varepsilon(F) = -1, \\ S(E) &= E, S(F) = F.\end{aligned}$$

证明 由 $\sum h_1 S(h_2) = \varepsilon(h) 1 = \sum S(h_1) h_2$ 可知: $\sum F_1 S(F) = \varepsilon(F) 1$, 于是由命题 2 中的第二种双代数结构,有

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}S(E)E + \frac{1}{2}S(E)F + \frac{1}{2}S(F)E + \frac{1}{2}S(F)F &= \varepsilon(F) 1, \\ \text{即, } -\frac{1}{2}E + \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}(l_6 E + l_7 F)E + \frac{1}{2}(l_6 E + l_7 F)F &= \varepsilon(F) 1,\end{aligned}$$

于是, $l_6 + l_7 + 1 = 0, l_6 + l_7 - 1 = 2$, 矛盾, 故命题 2 中的第二种双代数没有 Hopf 代数结构. 类似可证: 命题 2 中的第四种双代数也没有 Hopf 代数结构.

针对命题 2 中的第一种双代数结构, 有 $S(F)F = \varepsilon(F)E$, 即, $l_6 F + l_7 E = E$, 故, $l_6 = 0, l_7 = 1$, 于是有第一种 Hopf 结构. 类似可证: 第二种 Hopf 结构亦成立.

4 由二阶循环矩阵构造拟三角 Hopf 代数

本节主要由二阶循环矩阵构造非平凡的拟三角 Hopf 代数.

首先,由二阶循环矩阵构造命题 2 中的第一种双代数所对应的拟三角结构,假设可逆元

$$R = l_6 E \otimes E + l_7 E \otimes F + l_8 F \otimes E + l_9 F \otimes F,$$

其逆为

$$R^{-1} = l_{10} E \otimes E + l_{11} E \otimes F + l_{12} F \otimes E + l_{13} F \otimes F.$$

由 $\sum R^1 \varepsilon(R^2) = 1 = \sum \varepsilon(R^1) R^2$ 知:

$$l_6 - 1 = -l_7 = -l_8 = l_9. \quad (10)$$

再由(QT3)知:

$$\begin{aligned}l_6 &= l_6 l_6 + l_8 l_8, \\ 0 &= l_7 l_6 + l_9 l_8, \\ l_7 &= l_7 l_7 + l_9 l_9, \\ l_8 &= l_6 l_8 + l_8 l_6, \\ 0 &= l_7 l_8 + l_9 l_6, l_9 = l_7 l_9 + l_7 l_9.\end{aligned} \quad (11)$$

由(10)式,将 $l_6 - 1 = -l_7 = -l_8 = l_9$ 代入(11)式中 $0 = l_7 l_6 + l_9 l_8, 0 = l_7 l_8 + l_9 l_6$, 易得

$$l_6=1, l_7=l_8=l_9=0 \text{ 或 } l_6=\frac{1}{2}, l_7=\frac{1}{2}, l_8=\frac{1}{2}, l_9=-\frac{1}{2}.$$

因此, $R=E \otimes E$ 或者 $R=\frac{1}{2}E \otimes E+\frac{1}{2}E \otimes F+\frac{1}{2}F \otimes E-\frac{1}{2}F \otimes F$. 不难求得 $R^{-1}=E \otimes E, R^{-1}=\frac{1}{2}E \otimes E+\frac{1}{2}E \otimes F+\frac{1}{2}F \otimes E-\frac{1}{2}F \otimes F$.

经验证 $R=\frac{1}{2}E \otimes E+\frac{1}{2}E \otimes F+\frac{1}{2}F \otimes E-\frac{1}{2}F \otimes F$ 满足 (QT1)、(QT2)、(QT3) 条件, 故命题 2 中的第一种双代数具有非平凡的拟三角双代数结构.

同理可证: 命题 2 中的其它三种双代数的拟三角结构均是平凡的, 故得到

命题 4 由二阶循环矩阵构造的非平凡的拟三角双代数结构如下:

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= E \otimes E, \Delta(F) = F \otimes F, \\ \varepsilon(E) &= 1, \varepsilon(F) = 1, \\ R &= \frac{1}{2}E \otimes E + \frac{1}{2}E \otimes F + \frac{1}{2}F \otimes E - \frac{1}{2}F \otimes F,\end{aligned}$$

式中, $R^{-1}=\frac{1}{2}E \otimes E+\frac{1}{2}E \otimes F+\frac{1}{2}F \otimes E-\frac{1}{2}F \otimes F$.

由命题 4 可得.

命题 5 由二阶循环矩阵构造的非平凡的拟三角 Hopf 代数结构如下:

$$\begin{aligned}\Delta(E) &= E \otimes E, \Delta(F) = F \otimes F, \\ \varepsilon(E) &= 1, \varepsilon(F) = 1, \\ S(E) &= E, S(F) = F, \\ R &= \frac{1}{2}E \otimes E + \frac{1}{2}E \otimes F + \frac{1}{2}F \otimes E - \frac{1}{2}F \otimes F,\end{aligned}$$

式中, $R^{-1}=\frac{1}{2}E \otimes E+\frac{1}{2}E \otimes F+\frac{1}{2}F \otimes E-\frac{1}{2}F \otimes F$.

[参考文献]

- [1] DAVIS P J. Circulant Matrices[M]. New York:Chelsea,1994.
- [2] GRUNSPAN C. Quantum torsors[J]. Journal of pure and applied algebra,2003,184:229-255.
- [3] BICHON J, IGLESIAS A G. Hopf-Galois structures on ambiskew polynomial rings[J]. Journal of noncommutative geometry, 2021,15:1 409-1431.
- [4] 乔宁, 房莹, 张良云. Sweedler 四维 Hopf 代数上的 Poisson 代数结构[J]. 山东大学学报(理学版), 2020,55(12):56-62,68.
- [5] DRINFEL'D V G. Quantum groups[J]. Journal of soviet mathematics,1988,41:898-915.
- [6] ZHENG H H, ZHANG L Y. Hopf-Galois algebras and their Poisson structures[J]. Communications in algebra,2022,50(7):3046-3063.
- [7] RADFORD D E. Hopf algebras[M]. Singapore:World Scientific,2012.
- [8] CHEN Y Y, WANG Z W, ZHANG L Y. FS-coalgebras and crossed coproducts[J]. Georgian mathematical journal,2019,26(3):381-392.

[责任编辑:陆炳新]