doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.03.004

信道分配与二部图的非正常边染色

张 昊[1],赵 燕[2,3]

(1.南京工程学院数理学院,江苏 南京 211167)
(2.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)
(3.泰州学院数理学院,江苏 泰州 225300)

[**摘要**] 确定二部图的边染色数和极小边染色是计算机领域的一个经典算法问题. 该问题在信道分配和计算机科学的众多方面有广泛应用,并且是NP完全的. 本文首先从二部图结构入手,利用非正常边染色定义,采用构造方法得到亏格为1和2时部分完全二部图的非正常边染色数,给出相应算法和复杂性分析,然后将其转化为网络中的信道数量.

[**关键词**] 信道分配,二部图,非正常边染色,NP完全

[**中图分类号**]O157.6 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2023)03-0020-06

Channel Allocation and Improper Edge Colorings of Bipartite Graphs

Zhang Hao[1],Zhao Yan[2,3]

(1.School of Mathematics and Physics,Nanjing Institute of Technology,Nanjing 211167,China)
(2.School of Mathematical Science,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)
(3.Department of Mathematics,Taizhou University,Taizhou 225300,China)

Abstract:Finding the edge chromatic number and minimal edge chromatic in bipartite graphs is a well-known algorithm problem in the computer field. It has wide application in channel allocation and many aspects of computer science and it is NP complete. From the structure of bipartite graphs and the definition of improper edge colorings,this paper presents some chromatic index of bipartite graphs when the deficiency is 1 or 2 and the algorithm and complexity analysis are also given.What's more,transforms it to the numbers of channel in a network.

Key words:channel allocation,bipartite graphs,improper edge colorings,NP complete

在未来移动通信系统[1]中,系统不仅提供语音业务还将提供视频媒体[2]等数据业务. 随着需求的不断增加,在固定带宽的无线网络中如何进行合理的信道分配及使用是十分重要的课题. 无线网络目前采用的GPRS无线数据通信标准,一个信道可以被多个用户共享,同时一个用户又可以占用多个信道. 例如早先的MIMO/OFDM(多入多出/正交频分复用)系统自适应跨层空间子信道分配算法对于高突发性的数据业务不但提高信道资源的利用率,而且向用户提供灵活的数据传输速率数[3]. 信道资源的分配方式可分为固定信道分配、动态信道分配和混合信道分配. 固定信道分配指根据预先估计的覆盖区域内的负荷将信道资源分给若干个小区,相同的信道集合在间隔一定距离的小区内可以再次得到利用. 优点是实现简单,缺点是频带利用率低,不能很好地根据负载变化及时改变信道规划.特别是信道数量不易确定. 因此下一代通信网络中采用固定信道分配与动态信道分配结合的混合信道分配方法.

边染色问题是数学和理论计算机科学方向非常重要的课题. 正常边染色是指图中相邻边染不同颜色时需要的最少色数. 将无线网络中用户看成结点,用户之间的传输信道看成边,同一小区的用户不能使用相邻信道传输数据. 这样信道数量确定的问题就是正常边染色问题.

1 预备知识

本文只考虑无向有限简单图. 凡本文未定义的概念与记号均见文献[4]. 图 G 称为二部图是指顶点集

收稿日期:2022-07-27.
基金项目:国家自然科学基金项目(11901426)、江苏省高校“青蓝工程”资助项目.
通讯作者:赵燕,博士,副教授,研究方向:图论与组合优化. E-mail:zhaoyan81.2008@163.com

$V(G)$是两两互不相交的独立集 X 和 Y 的并集. 完全二部图是指 G 具有二分类(X,Y)的二部图且 X 的每个顶点都与 Y 的每个顶点存在边相连. 若$|X|=m$,$|Y|=n$,这样的二部图记为 $K_{m,n}$. 设 M 是 E 的一个子集,M 的元素是 G 中的边并且任意两条边在 G 中均不相邻,则称 M 为 G 的匹配. 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的每行、每列都是 $1,2,\cdots,n$ 的全排列,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶拉丁方. 图的非正常染色是由 Cowen 等[5]引入. 给定整数 $k,d\geqslant 0$,若图 G 的边可以用 k 种颜色进行染色,并且每条边至多和 d 条与它染同种颜色的边相邻,则称图 G 是$(k,d)^*$-边可染的. 任意一个满足上述条件的边染色称为图的一个$(k,d)^*$-边染色. 其中 d 称为亏格,指任意一条边与同颜色最多 d 条边相邻. 值得注意的是,非正常染色中定义的亏格不同于拓扑中亏格的含义. 给定正整数 d,图 G 的非正常边色数定义为:$\chi'_d(G)=\min\{k|图 G 是(k,d)^*-边可染\}$. 事实上,图 G 的一个$(k,d)^*$-边染色就把图 G 的边集 E 分成 k 个(可能为空集)子集 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 使得每个子集在图 G 中的边中最多与不超过 d 条同颜色的边相邻.每种颜色的边集合称为同色类. 图 G 的$(k,0)^*$-边染色也就是正常边染色. 正常边染色记为$\chi'(G)$. 1916 年 Konig 得到:若 G 是二部图,则$\chi'(G)=\Delta(G)$. 将 n 阶拉丁方中每个元素分别看成 $K_{n,n}$的每条边染的色数,那么每个同色类就是匹配. 因此每一个 n 阶拉丁方给出 $K_{n,n}$的一个正常边染色. 1981 年 Holyer[6]得到:多重图边染色问题是 NP 完全问题. 2001 年 Cole 等[7]得到:二部图的极小边染色可以在 $O(|E|\log\Delta)$时间内找到;正则二部图匹配可以在 $O(|E|)$内找到. 二部图的正常边染色问题在现实生活中有一系列应用:班级-教师排课表问题[8],Clos 网络[9]等等. 国内学者[10]研究的是点可区别正常边染色,特别是星图、完全图和完全四部图的点可区别正常边染色. 由于在调度和分配问题具有应用价值,在一定程度可接受的情况下,有学者[11]考虑了区间图非正常边染色问题. 至今为止关于二部图非正常边染色的结论很少.

下一代通信网络中采用混合信道分配方法,用户之间传输的业务都可以同时用多个信道传输,同时一个信道也可以被多个用户共享. 因此将用户看成结点,传输信道看成边,信道分配问题就变成非正常边染色问题. 本文主要研究二部图的非正常边染色,转化为无线网络中就是当两个用户群传输信号时内部没有信号传输,并且相互之间每对用户有信号传输时信道数量的确定.

为了讨论方便再给出一些定义. 设图 G 是$(k,1)^*$-边可染,$f:E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$为 G 的一个$(k,1)^*$-边染色. $E_i^f=\{e|f(e)=i,e\in E(G)\}$为取定 f 时染第 i 种颜色的边集合. $S_G^f=\max\{|E_i||i=1,2,\cdots,k\}$为取定 f 时所有边色类中包含边数的最大值. $S_G^k=\max\{S_G^f|f$ 取遍 G 的所有$(k,1)^*$-边染色$\}$表示取遍 G 的所有$(k,1)^*$-边染色得到的边色类中边数的最大值. $S_G=\max\{S_G^k|G$ 是$(k,1)^*$-边可染的$\}$表示 G 是$(k,1)^*$-边可染时任意的$(k,1)^*$-边染色中所有边色类中边数的最大值. 若 E_i 所含的边数等于 S_G,则称 E_i 为最大饱和.

令二部图 $K_{n,m}$ 中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$. 针对二部图 $K_{n,m}$的某个边染色 f,定义边标号矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times m}$,其中 $a_{ij}=\{f(x_iy_j)|x_i\in X,y_j\in Y,1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m\}$.

例如 $K_{2,2}$的某个边染色为 $f(x_1y_1)=f(x_2y_2)=1$,$f(x_1y_2)=f(x_2y_1)=2$,则相应的边标号矩阵为$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

由非正常边染色定义得到如下结论:

引理 1 当 $d=0$ 时二部图 $K_{n,n}$ 中同色类为匹配,相应的边标号矩阵为 n 阶拉丁方.

引理 2 当 $d=1$ 时二部图 $K_{n,n}$ 中同色类为不相邻的若干条边和 2 长路的并.

2 主要结果

首先讨论亏格为 1 时 $K_{n,n}$的非正常边染色数,也就是两个用户数量相同(记为 n)的用户群传输信号时内部没有信号传输,只有相互之间有信号传输,并且任一信号最多被两个用户共用时所需要的信道数量.

定理 1 在二部图 $K_{n,n}$ 中,$S_{K_{n,n}}=\begin{cases}4k & n=3k;\\ 4k+1 & n=3k+1;\\ 4k+2 & n=3k+2.\end{cases}$

证明 不妨设亏格为 1 时某个边染色 f 下染第 i 种颜色的边集合 E_i 为最大饱和,它由顶点不交的边

和 2 长路构成. 其中 X 有 l_1 个 E_i 中 2 长路的 1 度点,l_2 个 E_i 中 2 长路的 2 度点,l_3 个 E_i 中边的端点;Y 有 m_1 个 E_i 中 2 长路的 1 度点,m_2 个 E_i 中 2 长路的 2 度点,m_3 个 E_i 中边的端点. 首先 $0\leqslant l_3, m_3\leqslant 2$,否则 l_3,$m_3\geqslant 3$ 时任意三条边的边导出子图可以找到两个互不相交的 2 长路饱和所有顶点,这与 E_i 为最大饱和矛盾! 并且在 $K_{2,2}$ 中两条不相邻的边换成 2 长路不改变 $|E_i|$,因此 $0\leqslant l_3, m_3\leqslant 2$. 其次当 $l_3=m_3=0$ 时 E_i 全由 2 长路构成. 此时 $n=l_1+l_2=m_1+m_2$,$l_1=2m_2$,$m_1=2l_2$,因此 $3|n$. 不妨设 $n=3k$,$l_1=m_1=\frac{2}{3}n=2k$,$l_2=m_2=\frac{1}{3}n=k$,则 $S_{K_{3k,3k}}=4k$. 同理当 $l_3=m_3=1$ 时,$n=3k+1$,$S_{K_{3k+1,3k+1}}=4k+1$;当 $l_3=m_3=2$ 时,$n=3k+2$,$S_{K_{3k+1,3k+1}}=4k+2$. 结论成立.

由 $S_{K_{n,n}}$ 的定义可以得到如下 $\chi_1'(K_{n,n})$ 的下界.

定理 2　$\left\lceil\frac{|E|}{S_{K_{n,n}}}\right\rceil\leqslant\chi_1'(K_{n,n})\leqslant n$,当 $\chi_1'(K_{n,n})=\chi_0'(K_{n,n})=n$ 时,n 阶拉丁方可以作为此时亏格为 1 要求下的边标号矩阵.

由定理 1 和定理 2 容易得到 $n\leqslant 8$ 时 $K_{n,n}$ 在亏格为 1 时的非正常边染色数.

定理 3　$\chi_1'(K_{n,n})=n(n=1,2,3,4,5)$.

定理 4　$\chi_1'(K_{n,n})=n-1(n=6,7,8)$.

证明　一方面由定理 1 得 $S_{K_{6,6}}=8$,$S_{K_{7,7}}=9$,$S_{K_{8,8}}=10$,$\chi_1'(K_{6,6})\geqslant\left\lceil\frac{6\times 6}{8}\right\rceil=5$,$\chi_1'(K_{7,7})\geqslant\left\lceil\frac{7\times 7}{9}\right\rceil=6$,$\chi_1'(K_{8,8})\geqslant\left\lceil\frac{8\times 8}{10}\right\rceil=7$. 另一方面,以下 3 个矩阵 $\boldsymbol{B}_6$,$\boldsymbol{B}_7$,$\boldsymbol{B}_8$ 给出 $n=6,7,8$ 时 $K_{n,n}$ 的一个 $(n-1,1)^*$-边染色,因此可以得到结论.

$$\boldsymbol{B}_6=\begin{pmatrix}1&1&3&4&5&2\\2&2&1&4&5&3\\3&3&1&5&4&2\\4&5&2&1&1&3\\4&5&3&2&2&1\\5&4&2&3&3&1\end{pmatrix};\boldsymbol{B}_7=\begin{pmatrix}6&3&3&4&5&2&1\\6&2&1&4&5&3&2\\3&6&1&5&4&2&3\\4&6&2&1&1&3&5\\4&5&6&6&2&5&1\\5&4&2&3&6&1&4\\1&1&5&2&3&4&6\end{pmatrix};\boldsymbol{B}_8=\begin{pmatrix}6&6&7&7&5&2&2&1\\7&7&6&6&5&3&3&4\\1&1&3&4&7&6&5&2\\2&2&1&4&7&6&5&3\\3&3&1&5&6&7&4&2\\4&5&2&1&6&7&1&3\\4&5&3&2&2&1&6&6\\5&4&2&3&3&1&7&7\end{pmatrix}.$$

定理 5　$\left\lceil\frac{9}{2}n\right\rceil\leqslant\chi_1'(K_{6n,6n})\leqslant 5n$.

证明　由定理 1 得 $S_{K_{6n,6n}}=8n$,所以有 $\chi_1'(K_{6n,6n})\geqslant\left\lceil\frac{6n\times 6n}{8n}\right\rceil=\left\lceil\frac{9}{2}n\right\rceil$. 存在 $K_{6n,6n}$ 的一个 $(5n,1)^*$-边染色,如 $\boldsymbol{B}_{K_{6n,6n}}=\begin{pmatrix}A_0&A_1&A_2&\cdots&A_{n-1}\\A_1&A_2&A_3&\cdots&A_0\\A_2&A_3&A_4&\cdots&A_1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{n-1}&A_0&A_1&\cdots&A_{n-2}\end{pmatrix}$ 所示,其中 $\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix}1+5i&1+5i&3+5i&4+5i&5+5i&2+5i\\2+5i&2+5i&1+5i&4+5i&5+5i&3+5i\\3+5i&3+5i&1+5i&5+5i&4+5i&2+5i\\4+5i&5+5i&2+5i&1+5i&1+5i&3+5i\\4+5i&5+5i&3+5i&2+5i&2+5i&1+5i\\5+5i&4+5i&2+5i&3+5i&3+5i&1+5i\end{pmatrix}$ $(i=0,\cdots,n-1)$,$\boldsymbol{A}_0$ 就是定理 4 中的 $\boldsymbol{B}_6$.

将 $E_{K_{6n,6n}}$ 划分成 n^2 个子集 $E_{i,j}(1\leqslant i,j\leqslant n)$,$E_{i,j}=\{x_{6(i-1)+k}y_{6(j-1)+l}\mid 1\leqslant k,l\leqslant 6\}$,且每个 $E_{i,j}$ 在 $K_{6n,6n}$ 中导出一个 $K_{6,6}$. $E_{i,j}$ 中边 $x_{6(i-1)+k}y_{6(j-1)+l}$ 用 $A_{(i+j-2)\bmod n}$ 中相应元素 $(A_{(i+j-2)\bmod n})_{k,l}$ 标号. 而 $A_{(i+j-2)\bmod n}$ 给出了 $K_{6,6}$ 的一个 $(5,1)^*$-边染色. 任取 $k\in\{1,2,\cdots,5n\}$,第 k 种颜色只在矩阵 $\boldsymbol{A}_{\lfloor\frac{k-1}{5}\rfloor}$ 中出现,而 $\boldsymbol{A}_{\lfloor\frac{k-1}{5}\rfloor}$ 在每行、每列都只出现一次. 因此 $\boldsymbol{B}_{K_{6n,6n}}$ 给出了 $K_{6n,6n}$ 的一个 $(5n,1)^*$-边染色,表明 $K_{6n,6n}$ 是 $(5n,1)^*$-边可染的,因此 $\chi_1'(K_{6n,6n})\leqslant 5n$.

定理 6　$\lceil \frac{9}{2}n+\frac{18n+9}{8n+4}\rceil \leqslant \chi_1'(K_{6n+3,6n+3}) \leqslant 5n+3$.

证明　由定理 1 易得下界成立. 由 $\boldsymbol{B}_{K_{6n,6n}}$ 的构造方法不难得到 $\boldsymbol{B}_{K_{6n+3,6n+3}}$ 是 $K_{6n+3,6n+3}$ 的一个 $(5n+3,1)^*$-边标号矩阵,因此 $K_{6n+3,6n+3}$ 是 $(5n+3,1)^*$-边可染的. 其中 $\boldsymbol{B}_{K_{6n+3,6n+3}}=\begin{pmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_{2n} \\ B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_0 \\ B_2 & B_3 & B_4 & \cdots & B_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{2n} & B_0 & B_1 & \cdots & B_{2n-1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}_{2i}=\begin{pmatrix} 1+5i & 1+5i & 3+5i \\ 2+5i & 2+5i & 1+5i \\ 3+5i & 3+5i & 1+5i \end{pmatrix}_{i=0,1,\cdots,n}$, $\boldsymbol{B}_{2i+1}=\begin{pmatrix} 4+5i & 5+5i & 2+5i \\ 4+5i & 5+5i & 3+5i \\ 5+5i & 4+5i & 2+5i \end{pmatrix}_{i=0,1,\cdots,n-1}$.

$\boldsymbol{B}_{2i}$, $\boldsymbol{B}_{2i+1}$ 在 $K_{6n+3,6n+3}$ 中分别给出了 $K_{3,3}$ 的一个 $(3,1)^*$-边染色. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_0 \end{pmatrix}$ 就是定理 4 中的 B_6.

定理 7　$K_{6n,6n}$(或 $K_{6n+3,6n+3}$)的一个 $(5n,1)^*$-边染色(或 $(5n+3,1)^*$-边染色)都可以在 $O(n^2)$ 内找到.

证明　由定理 5 可以按以下步骤得到 $K_{6n,6n}$ 的 $(5n,1)^*$-边标号矩阵,步骤如下:

第 1 步:令 $X=\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\}$, $Y=\{y_0,y_1,\cdots,y_{n-1}\}$. $x_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i6}\}$, $y_i=\{y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{i6}\}$,就是把部集 X 和 Y 中任意 6 个点构成子集.

第 2 步:在二部图 (X,Y) 中寻找 x_i 到 y_j 的最大匹配. 这相当于在一个 $K_{n,n}$ 中寻找最大匹配. 这一步运行时间为 $O(n^2)$[4].

第 3 步:在每个匹配 (x_i,y_j) 组成的 $K_{6,6}$ 中进行边染色. 染颜色 1,2,3 的边相当于在 $K_{4,4}$ 中寻找最大匹配后将边复制为 2 长路,染颜色 4,5 的边相当于在 $K_{4,4}$ 中寻找最大匹配后只将其中两条边复制为 2 长路. 运行时间为常数. 总运行时间仍为 $O(n^2)$.

同理,由定理 6 得到 $K_{6n+3,6n+3}$ 的 $(5n+3,1)^*$-边标号矩阵,但开始寻找的是部集 X 和 Y 以任意 3 个点构成子集再构成匹配. 运行时间为 $O((2n+1)^2)=O(n^2)$.

综上 $K_{6n,6n}$(或 $K_{6n+3,6n+3}$)的一个 $(5n,1)^*$-边染色(或 $(5n+3,1)^*$-边染色)都可以在 $O(n^2)$ 内找到.

由以上方法可以类似得到:

定理 8　$\lceil \frac{9}{2}n+\frac{15n+2}{2(8n+1)}\rceil \leqslant \chi_1'(K_{6n+1,6n+1}) \leqslant 5n+1$.

定理 9　n 为奇数或 $n=2$ 时, $\lceil \frac{(6n+2)^2}{8n+2}\rceil \leqslant \chi_1'(K_{6n+2,6n+2}) \leqslant 5n+2$; n 为偶数时, $\lceil \frac{(6n+2)^2}{8n+2}\rceil \leqslant \chi_1'(K_{6n+2,6n+2}) \leqslant 5n+3 (n\geqslant 4)$.

定理 10　$\lceil \frac{9n}{2}+3+\frac{3n+2}{2(8n+5)}\rceil \leqslant \chi_1'(K_{6n+4,6n+4}) \leqslant 5n+4$.

证明　不等式左边由定理 1 容易得到. 由矩阵 $\boldsymbol{B}_{K_{6n+4,6n+4}}$ 得到 $\chi_1'(K_{6n+4,6n+4}) \leqslant 5n+4$. $\boldsymbol{B}_{K_{6n+4,6n+4}}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1' & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \cdots & \boldsymbol{B}_{2n+1} & \boldsymbol{B}_1''' \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3' & \boldsymbol{B}_4 & \cdots & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_3''' \\ \boldsymbol{B}_3 & \boldsymbol{B}_4 & \boldsymbol{B}_5' & \cdots & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_5''' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{B}_{2n+1} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_{2n}' & \boldsymbol{B}_{2n}''' \\ \boldsymbol{B}_1'' & \boldsymbol{B}_3'' & \boldsymbol{B}_5'' & \cdots & \boldsymbol{B}_{2n}'' & 5n+4 \end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{B}_{2i}=\begin{pmatrix} 4+5i & 5+5i & 2+5i \\ 4+5i & 5+5i & 3+5i \\ 5+5i & 4+5i & 2+5i \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}_{2i+1}=\begin{pmatrix} 1+5i & 1+5i & 3+5i \\ 2+5i & 2+5i & 1+5i \\ 3+5i & 3+5i & 1+5i \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}_{2i}'=\begin{pmatrix} 4+5n & 5+5i & 2+5i \\ 4+5i & 4+5n & 4+5n \\ 4+5n & 4+5i & 2+5i \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}_{2i+1}'=\begin{pmatrix} 1+5i & 1+5i & 4+5n \\ 4+5n & 4+5n & 1+5i \\ 3+5i & 3+5i & 4+5n \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}_{2i}''=(4+5i,5+5i,3+5i)$; $\boldsymbol{B}_{2i+1}''=(2+5i,2+5i,1+5i)$;

$\boldsymbol{B}_{2i}''' = (4+5i,3+5i,5+5i)$;$\boldsymbol{B}_{2i+1}''' = (3+5i,2+5i,1+5i)$.

定理 11　$\left\lceil \frac{9n}{2}+4+\frac{n+1}{8n+6} \right\rceil \leqslant \chi_1'(K_{6n+5,6n+5}) \leqslant 5n+5$.

以上是二部图中等部情形,下面讨论一部点个数至少是另一部点个数两倍以上情形.

定理 12　当 $n\geqslant 2m$ 时,$S_{K_{m,n}}=2m$.

证明　令 $K_{m,n}=(X,Y)$,不妨设在亏格为 1 的某个边染色 f 下边色类 E_i 为最大饱和. 它由顶点不交的边和 2 长路构成. 其中 X 有 l_1 个 E_i 中 2 长路的 1 度点,l_2 个 E_i 中 2 长路的 2 度点,l_3 个 E_i 中边的端点;Y 有 m_1 个 E_i 中 2 长路的 1 度点,m_2 个 E_i 中 2 长路的 2 度点,m_3 个 E_i 中某条边的端点. 则

$$\max\ S_{K_{m,n}} = l_1+2l_2+l_3,$$

$$s.t.\begin{cases} l_1+l_2+l_3\leqslant m \\ m_1+m_2+m_3\leqslant n \\ l_3=m_3 \\ l_1=2m_2 \\ m_1=2l_2 \\ n\geqslant 2m,l_1,l_2,l_3,m_1,m_2,m_3\geqslant 0 \end{cases}$$

容易得到 $S_{K_{m,n}}=2m$. 此时 $l_1=m_2=l_3=m_3=0$.

定理 13　当 $n=2m$ 时,$\chi_1'(K_{m,n})=m$.

证明　由定理 12 知 $S_{K_{m,n}}=n$. 因此 $\chi_1'(K_{m,n})\geqslant\left\lceil \frac{m\times n}{n}\right\rceil=m$. 而矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & m & m \\ 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m & m & 1 & 1 & \cdots & m-1 & m-1 \end{pmatrix}$

给出了一个 $K_{m,n}$ 的 $(m,1)^*$-边染色. 所以结论得证.

定理 14　若 $n=(2m)\cdot k+i(k\geqslant 1,0\leqslant i\leqslant 2m-1)$,则 $\chi_1'(K_{m,n})=mk+\left\lceil \frac{i}{2}\right\rceil$.

可以看出亏格为 1 时 $\chi_1'(K_{m,n})$ 的确定最难把握的是点个数比较均衡即 $n+1\leqslant m\leqslant 2n-1$ 的情况,但可以得到一个上、下界:

定理 15　$\left\lceil \frac{3}{4}n\right\rceil\leqslant\chi_1'(K_{m,n})\leqslant n$,其中 $n+1\leqslant m\leqslant 2n-1$.

接下来讨论亏格为 2 的情形.

定理 16　亏格为 2 时非正常边染色的同色类为 $K_{1,3}$ 或者圈 C 及其导出子图.

证明　首先 $K_{1,3}$ 或者圈 C 的所有边染同一种颜色时每条边都与它同色的两条边相邻,满足亏格为 2 的要求. 其次亏格为 2 时二部图的同色类只能为 $K_{1,3}$ 或者圈 C 及其导出子图. 因为亏格为 2 时同一颜色的边只能加在亏格为 1 的同色类 2 长路基础上. 边加在 2 长路中 2 度点基础上就形成 $K_{1,3}$;边加在 2 长路中 1 度点基础上就形成 3 长路,逐次加边后是圈 C 及其导出子图.

由定理 16 可以得到一些简单结论:

定理 17　$\chi_2'(K_{1,n})=\left\lceil \frac{n}{3}\right\rceil$.

定理 18　当 $2\leqslant m\leqslant n$ 时,$\chi_2'(K_{m,n})\geqslant\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil$.

证明　$2\leqslant m\leqslant n$ 时,$K_{m,n}$ 中最大圈为 C_{2m},$S_{K_{m,n}}\geqslant 2m$. $\chi_2'(K_{m,n})\geqslant\left\lceil \frac{m\cdot n}{2m}\right\rceil=\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil$.

如果图 G 是一个 n-正则二部图,则 G 可以分解为若干个 r-因子当且仅当 $r\mid n$[7]. 圈是特殊的 2-因子,因此可以得到亏格为 2 时 n-正则二部图的非正常边染色数的结论.

定理 19　$\chi_2'(K_{n,n})=\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil$.

证明　当 $n=2k$ 时，$E(K_{2k,2k})$ 可以分解为 k 组圈，它们染不同的颜色. 因此 $\chi'_2(K_{2k,2k})=k$. 当 $n=2k+1$ 时，$E(K_{2k+1,2k+1})$ 可以分解为 k 组圈加上一个匹配，$\chi'_2(K_{2k+1,2k+1})\geqslant\lceil\frac{2k+1}{2}\rceil=k+1$，而 $\chi'_2(K_{2k+1,2k+1})\leqslant\chi'_2(K_{2k+2,2k+2})=k+1$，因此 $\chi'_2(K_{2k+1,2k+1})=k+1$. 综上 $\chi'_2(K_{n,n})=\lceil\frac{n}{2}\rceil$.

3　结论

从二部图的非正常边染色与无线网络的信道分配关系可以发现：由定理 5 至定理 11 得到当两个用户群数量相同（记为 n）的用户群传输信号时，如果内部没有信号传输，只有相互之间有信号传输，并且任一信号最多被两个用户共用需要 $0.75n\sim0.83n$ 个信道，信道寻找复杂度为 $O(n^2)$；由定理 13 得到相同情况下用户群数量成两倍（n 和 $2n$）时恰好需要 n 条信道；由定理 15 得到介于一倍和两倍之间时需要 $0.75n\sim n$ 个信道. 由定理 16 至定理 19 得到当两个用户群数量相同（记为 n）的用户群传输信号时，如果内部没有信号传输，只有相互之间有信号传输，并且任一信号最多被 3 个用户共用需要 $0.5n$ 个信道；相同情况下用户群数量不同时（分别为 m 和 n，其中 $2\leqslant m<n$）至少需要 $0.5n$ 个信道，$m=1$ 时需要 $0.33n$ 个信道.

［参考文献］

［1］ 王家恒，乐煜炜，张博文，等. 区块链无线接入网：面向未来移动通信的新架构［J］. 西安电子科技大学学报，2020，47(5)：3-10.

［2］ 张文军，管云峰，何大治，等. 新一代融合媒体网络架构［J］. 通信学报，2019，40(8)：13-21.

［3］ 卢小峰，朱光喜，宁国勤，等. 一种自适应跨层空间子信道分配算法——基于多用户 MIMO/OFDM 系统［J］. 计算机科学，2006(11)：10-13.

［4］ BONDY J A，MURTY U S R. Graph theory with application［M］. London：Macmillan Press Ltd，1976.

［5］ COWEN L J，COWEN R H，WOODALL D R. Defective colorings of graphs in surfaces：partitions into subgraphs of bounded valency［J］. Journal of graph theory，1986，10(3)：187-195.

［6］ HOLYER I. The NP-completeness of edge-coloring［J］. SIAM journal on computing，1981，10：718-720.

［7］ COLE R，OST K，SCHIRRA S. Edge-coloring bipartite multigraphs in O(ElogD) time［J］. Combinatorica，2001，21(1)：5-12.

［8］ GOTLIEB C C. The construction of class-teacher time-tables［C］//Proceedings of IFIP congress 62，North-Holland，Amsterdam，1963：73-77.

［9］ CHAO H J，JING Z G，LIEW S Y. Matching algorithms for three-stage bufferless Clos network switches［J］. IEEE communications magazine，2003，41(10)：46-54.

［10］ 陈祥恩，姚兵. K4VKn 的 Smarandachely 邻点可区别正常边染色（英文）［J］. 数学季刊（英文版），2014，29(1)：76-87.

［11］ CASSELGRENA1 C J，PETROSYANB P A. Improper interval edge colorings of graphs［J］. Discrete applied mathematics，2021，305：164-178.

［责任编辑：陆炳新］