doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2023.04.002

基于双圈图 GA_2 指标的分析

刘晚乔,赵　飚

(1.中国国际航空股份有限公司新疆分公司,新疆 乌鲁木齐 830026)
(2.新疆大学数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐 830046)

[**摘要**]　设 G 是一个具有 n 个顶点的简单图,则图 G 的 GA_2 指标定义为:$\sum 2\sqrt{n_u n_v}/(n_u+n_v)$,其中 $n(u)(n(v))$ 表示图 G 中的点到顶点 $u(v)$ 的距离小于到顶点 $v(u)$ 的距离的点数. 在本文中,对 3 类双圈图进行图形的变换,进而分析确定了具有最小 GA_2 指标的图.

[**关键词**]　GA_2 指标,双圈图,连通图,悬挂边

[**中图分类号**]O175　[**文献标志码**]A　[**文章编号**]1001-4616(2023)04-0005-06

Based on Bicyclic Graphs Analysis of Second Geometric-Arithmetic Index

Liu Wanqiao,Zhao Biao

(1.Air China Limited Xinjiang Branch,Urumqi 830046,China)
(2.College of Mathematics and System Sciences,Xinjiang University,Urumqi 830046,China)

Abstract: Let $G=(V,E)$ be a simple graph, the second geometric-arithmetic indices defined as $\sum 2\sqrt{n_u n_v}/(n_u+n_v)$, where $n(u)(n(v))$ of vertices of G lying closer to the vertex $u(v)$ than to the vertex $v(u)$ for the edge uv. In this paper, we transformed three kinds of bicyclic graphs, analyzed and determined the bicyclic graphs with the minimum GA_2.

Key words: second geometric-arithmetic index, bicyclic graphs, connected graphs, pendant edges

对于分子的描述,在化学、物理和药理学等方面起着重要的作用[1]. 其中,一个能描述分子图的一些性质的数被称为拓扑指标,对于分子图的拓扑指标能反应分子的一些物理和化学性质,所以通过计算分子图的某种拓扑指标的数值,可以统计出分子的某些物理化学性质. 特别是在 QSPR/QSAR 研究中,发现了许多拓扑指标在化学中应用广泛[2-5].

设 G 是一个简单图,对于没有说明的术语和概念可参考文献[6-7]. 记图 G 的点集为 $V(G)$,边集为 $E(G)$,$d_G(u)(d_G(v))$为图 G 中点 $u(v)$ 的度数. 则图 G 的 GA 指标定义如下[8-9]:

$$GA(G)=\sum\frac{2\sqrt{d_u d_v}}{d_u+d_v}.$$

令 $e=uv$ 是图 G 的一条边,连接点 uv,则定义:

$$N(e,u,G)=\{x\in V(G)\mid d_G(x,u)<d_G(x,v)\},$$

$$N(e,v,G)=\{x\in V(G)\mid d_G(x,u)>d_G(x,v)\},$$

u 的邻点记为 $N_G(u)$,v 的邻点记为 $N_G(v)$[10]. 同时

$$n_u(e)=n_u(e,G)=|N(e,u,G)|,$$

$$n_v(e)=n_v(e,G)=|N(e,v,G)|,$$

式中,$n(u)$表示图 G 中的点到顶点 u 的距离小于到顶点 v 的距离的数目,$n(v)$同理.

2010 年,文[11]定义了第二类拓扑指标 GA_2 指标,定义如下:

$$GA_2(G)=\sum\frac{2\sqrt{n_u n_v}}{n_u+n_v},$$

收稿日期:2022-04-19.

通讯作者:赵飚,博士,教授,研究方向:图论及其应用. E-mail:zhb_xj@163.com

同时,确定了完全图中的 GA_2指标上下界,以及树图中具有最小和最大 GA_2指标的树图,分别是星图和路. Tang 等[12]在 2011 年巧妙采用了图变换的方法,进一步确定了树图中具有 GA_2指标第二大及第二小的图,同时得出了具有最大 GA_2指标和最小 GA_2指标的单圈图. 本文主要描述了在 n 个顶点的双圈图中,利用图形的变换,进而确定具有最小 GA_2指标的图.

1　引理

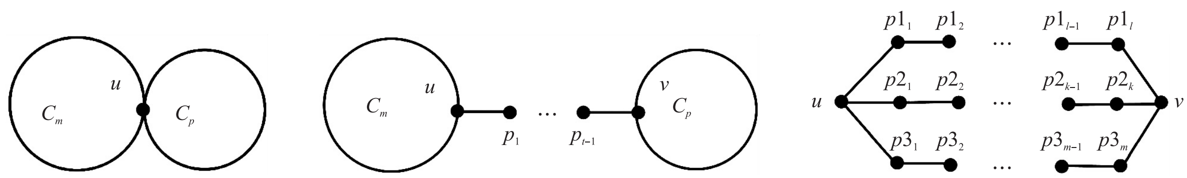
图 G 是一个连通双圈图,且有 n 个顶点,$n+1$ 条边,下面将双圈图进行了 3 种分类:

(1)当 $n\geqslant 5$ 时,圈 C_m,C_p共享一个公共点,见图(a).

(2)当 $n\geqslant 6$ 时,圈 C_m,C_p中间连接一条长度大于等于 1 的路,见图(b).

(3)当 $n\geqslant 4$ 时,3 条内部不相交的路 P_1,P_2和 P_3 具有公共的端点 u,v,见图(c).

令 $G=(V,E)$是一个双圈图,其中圈 C_m 和圈 C_p 的长度分别为 q 和 p,且 $T_1,T_2,\cdots,T_k(0\leqslant k\leqslant p+m)$表示圈上悬挂的树,$T_1,T_2,\cdots,T_k$为 $G-E(C_m,C_p)$的非平凡分支. 令 $N(T_i)=l_i$,$i=1,2,\cdots,k$,且 $l=l_1+l_2+\cdots+l_k=n-p-q+1$,其中 $N(T_i)$表示为树 T_i点的个数,记双圈图为 $G=C_G(T_1,T_2,\cdots,T_k)$,则有下面的引理.



(a) $C_{m,p}$　　(b) $C_{m,t,p}$　　(c) $u,p1,p2,p3,v$

图 1　双圈图主要分类

Fig. 1　Main subgraphs of bicyclic graphs

引理 1　若图 G 是一个有 n 个顶点,且 $n\geqslant 4$ 的双圈图,则

$$G_1=C_G(S_1,S_2,\cdots,S_k),$$
$$G_2=C_G(P_1,P_2,\cdots,P_k),$$

双圈图 G_1中,$u_1,u_2,\cdots,u_k$ 是圈 C_m,C_p 上的点,且 $S_1,S_2,\cdots,S_k$是点 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 的悬挂边.

双圈图 G_2中,$u_1,u_2,\cdots,u_k$是圈 C_m,C_p 上的点,且 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 是点 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 的悬挂路,

则可以得到

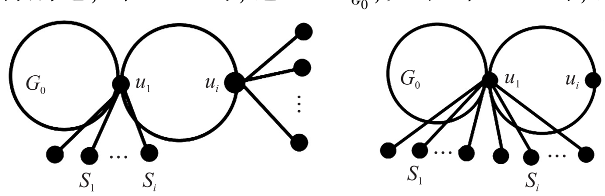
$$GA_2(G_1)\leqslant GA_2(G)\leqslant GA_2(G_2),$$

式中,$G=C_G(T_1,T_2,\cdots,T_k)$,$N(T_i)=l_i(i=1,2,\cdots,k)$.

为了找到双圈图中具有最小 GA_2 指标的图,只需要考虑有悬挂边的双圈图.

2　结果与分析

令 G_0是一个连通图,且 $N(G_0)=q$,$C_p=u_1u_2\cdots u_pu_1$是圈长为 p 的单圈图,$N(C_p)=p$,且 $S_1,S_2,\cdots,S_k(0\geqslant k\geqslant p)$表示单圈图上的悬挂边,其中 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 是 $G-E(G_0,C_p)$ 的非平凡分支,点 u_1是连通图 G_0和单圈图 C_p的公共点,将这类连通图记作 $C_{G_0}^{C_p}(S_1,S_2,\cdots,S_k)$. 特别地,当 $k=0$ 时,记 $G=C_{G_0}^{C_p}$,如果当 $k=1$ 时,记 $C_{G_0}^{C_p}(S_1)$. 其中记 $N(S_i)=l_i$,$i=1,2,\cdots,k$ 且 $l=l_1+l_2+\cdots+l_k=n-p-q+1$. 接下来,令 $G_1=C_{G_0}^{C_p}(S_1,S_2,\cdots,S_k)$,点 $u_1,u_i\in C_p$,且 $d_{G_1}(u_1)\geqslant 3$,$d_{G_1}(u_i)\geqslant 3$ $(2\leqslant i\leqslant k)$ 单圈图 C_p 上的点 u_i有悬挂边 S_i,现将点 u_i 的悬挂边 S_i,移到公共点 u_1上,则得到图 G_i,称图 G_i是由 G_1变换而得的,见图 2.



(a) G_1　　(b) G_2

图 2　图 G_1 变换到图 G_i

Fig. 2　G_i transform of G_1

定理 1　若图 $G_1=C_{G_0}^{C_p}(S_1,S_2,\cdots,S_k)$是一个连通图,且 $d_{G_1}(u_1)\geqslant 3+S_1$,$d_{G_1}(u_i)=2+S_i$,$G_i$ 是由 G_1变换而得的图,则得 $GA_2(G_1)\geqslant GA_2(G_i)$.

证明　将 $E(G_1)$里的边分成七部分,其表示为:

(1)$E_1=\{e=uv\in G_i\mid deg_{G_i}(v)=1,deg_{G_i}(u)\geqslant 3\}$;

(2) $E_2=\{e=uv\in C_p \mid d(u,u_1)<d(v,u_1),d(u,u_i)<d(v,u_i)\}$;

(3) $E_3=\{e=uv\in C_p \mid d(u,u_1)>d(v,u_1),d(u,u_i)>d(v,u_i)\}$;

(4) $E_4=\{e=uv\in C_p \mid d(u,u_1)<d(v,u_1),d(u,u_i)>d(v,u_i)\}$;

(5) $E_5=\{e=uv\in C_p \mid d(u,u_1)>d(v,u_1),d(u,u_i)<d(v,u_i)\}$;

(6) $E_6=\{e=uv\in C_p \mid d(u,u_1)>d(v,u_1),d(u,u_i)=d(v,u_i),d(u,u_1)=d(v,u_1),d(u,u_i)>d(v,u_i)\}$;

(7) $E_7=\{e=uv\in C_p \mid d(u,u_1)<d(v,u_1),d(u,u_i)=d(v,u_i),d(u,u_1)=d(v,u_1),d(u,u_i)<d(v,u_i)\}$;

根据 GA_2 的定义,可以得到

$$GA_2(G_1)=\sum_{i=1}^{7}\sum_{uv\in E_i}\frac{\sqrt{n_u(e,G_1)\cdot n_v(e,G_1)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G_1)+n_v(e,G_1))}.$$

将点 $u_i(i=2,3,\cdots,k)$ 上的悬挂边移到点 u_1 上,图 G_i 是由图 $G_1(2\leqslant i\leqslant k)$ 变换而得的,其中 $n'_u(e)(n'_v(e))$ 是变换图 G_i 的点到边 $e=uv$ 的顶点 $u(v)$ 距离比到顶点 $v(u)$ 距离小的顶点数,则有 当边 $uv\in E_j$ 时

$$\frac{\sqrt{n_u(e,G_1)\cdot n_v(e,G_1)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G_1)+n_v(e,G_1))}=\frac{\sqrt{n_u(e,G_i)\cdot n_v(e,G_i)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G_i)+n_v(e,G_i))}. \tag{1}$$

当边 $uv\in E_4$ 时

$$n'_u(e)=n_u(e)+S_i,n'_v(e)=n_v(e)-S_i.$$

所以,当边 $e\in E_4$,可以得到,

$$\frac{\sqrt{n_u(e,G_1)\cdot n_v(e,G_1)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G_1)+n_v(e,G_1))}\geqslant\frac{\sqrt{n'_u(e,G_i)\cdot n'_v(e',G_i)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G_i)+n'_v(e,G_i))}. \tag{2}$$

同样对于边 $uv\in E_5$ 可以得到在图 G_i 中,

$$n'_u(e)=n_u(e)-S_i,n'_v(e)=n_v(e)+S_i.$$

当边 $e\in E_5$,则有

$$\frac{\sqrt{n_u(e,G_1)\cdot n_v(e,G_1)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G_1)+n_v(e,G_1))}\geqslant\frac{\sqrt{n'_u(e,G_i)\cdot n'_v(e',G_i)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G_i)+n'_v(e,G_i))}. \tag{3}$$

对于连通图 G_i,单圈图 C_p 的圈长 p 为奇数时,所有的边 $e\in E_j(1\leqslant j\leqslant 5)$. 由式(1-3)可得,

$$GA_2(G_1)\geqslant GA_2(G_i).$$

当圈 C_p 的长度为偶数时,接下来考虑,当边 $uv\in E_6$ 时,则有

$$n'_v(e)=n_v(e)+S_i.$$

所以,当边 $e\in E_6$,则有

$$\frac{\sqrt{n_u(e,G_1)\cdot n_v(e,G_1)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G_1)+n_v(e,G_1))}\geqslant\frac{\sqrt{n'_u(e,G_i)\cdot n'_v(e,G_i)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G_i)+n'_v(e,G_i))}. \tag{4}$$

当边 $uv\in E_7$ 时,则有

$$n'_u(e)=n_u(e)-S_i.$$

所以,当边 $e\in E_7$,则有

$$\frac{\sqrt{n_u(e,G_1)\cdot n_v(e,G_1)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G_1)+n_v(e,G_1))}\leqslant\frac{\sqrt{n'_u(e,G_i)\cdot n'_v(e,G_i)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G_i)+n'_v(e,G_i))}. \tag{5}$$

由式(1)-(5)可得

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{uv\in E_i}\frac{\sqrt{n'_u(e,G_1)\cdot n'_v(e,G_1)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G_1)+n'_v(e,G_1))}\geqslant\sum_{uv\in E_7}\frac{\sqrt{n'_u(e,G_1)\cdot n'_v(e,G_1)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G_1)+n'_v(e,G_1))}.$$

综上所述,在连通图 $G_1=C_{G_0}^{C_p}(S_1,S_2,\cdots,S_k)$ 中,$d_{G_1}(u_1)\geqslant 3+S_1$,$d_{G_1}(u_i)=2+S_i(2\leqslant i\leqslant k)$.

由图 G_1 转换的图 G_i 可以得到 $GA_2(G_1)\geqslant GA_2(G_i)$.

定理 2　若图 $G_k=C_{G_0}^{C_p}(S_{n-p-q+1})$ 是有 n 个顶点,且 $n\geqslant 4$ 的连通图(图 3),则 $GA_2(G)\geqslant GA_2(C_{G_0}^{C_3}(S_{n-q-2}))$.

证明　由定理 1 可以得一系列图 $G_i(1\leqslant i\leqslant k)$,并且有 $GA_2(G_k)\leqslant\cdots\leqslant GA_2(G_2)\leqslant GA_2(G_1)$,其 $G_k=C_{G_0}^{C_p}(S_{n-p-q+1})$.

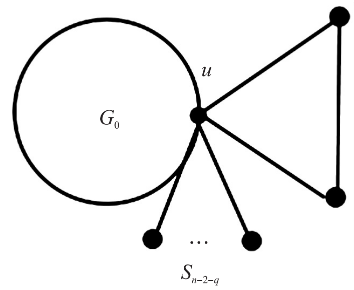


图 3　图 $C_{G_0}^{C_3}(S_{n-2-q})$

Fig. 3　The graph of $C_{G_0}^{C_3}(S_{n-2-q})$

通过计算:

$$GA_2(G)=GA_2(C_{G_0}^{C_p}(S_{n-p-q+1}))=GA_2(C_{G_0})+\frac{4t\sqrt{(q+t+d-1)\cdot t}}{2t+q+d-1}+\frac{2d\sqrt{n-1}}{n}+k.$$

式中,$t=[p/2]$,$k=p-2t$,$d=n-q-p+1$.

当 $p=2t$ $(t\geqslant 2)$ 时,

$$GA_2(C_{G_0}^{C_p}(S_{n-p-q+1}))-GA_2(C_{G_0}^{C_{p-2}}(S_{n-p-q+3}))=GA_2(C_{G_0})+\frac{4t\sqrt{(q+t+d-1)\cdot t}}{2t+q+d-1}+\frac{2d\sqrt{n-1}}{n}-\left(GA_2(C_{G_0})+\frac{4(t-1)\sqrt{(q+t+d)\cdot(t-1)}}{2t+q+d-1}+\frac{2(d+2)\sqrt{n-1}}{n}\right)>0.\tag{6}$$

当 $p=2t+1$ $(t\geqslant 1)$ 时,

$$GA_2(C_{G_0}^{C_p}(S_{n-p-q+1}))-GA_2(C_{G_0}^{C_{p-2}}(S_{n-p-q+3}))=GA_2(C_{G_0})+\frac{4t\sqrt{(q+t+d-1)\cdot t}}{2t+q+d-1}+\frac{2d\sqrt{n-1}}{n}+k-\left(GA_2(C_{G_0})+\frac{4(t-1)\sqrt{(q+t+d)\cdot(t-1)}}{2t+q+d-1}+\frac{2(d+2)\sqrt{n-1}}{n}+k\right)>0.\tag{7}$$

根据式(6)-(7)可得,当 p 为偶数时,则 $p=4$ 图 $C_{G_0}^{C_p}(S_{n-p-q+1})$ 为最小,当 p 为奇数时,则 $p=3$ 图 $C_{G_0}^{C_p}(S_{n-p-q+1})$ 为最小,继续研究图 $C_{G_0}^{C_p}(S_{n-p-q+1})$ 的最小.

当 $p=4$ 和 $p=3$ 时

$$GA_2(C_{G_0}^{C_4}(S_{n-3-q}))-GA_2(C_{G_0}^{C_3}(S_{n-2-q}))=\left(GA_2(C_{G_0})+\frac{8\sqrt{2(n-2)}}{n}+\frac{2(n-q-3)\sqrt{n-1}}{n}\right)-\left(GA_2(C_{G_0})+\frac{4\sqrt{n-2}}{n-1}+\frac{2(n-q-2)\sqrt{n-1}}{n}+1\right)=\frac{8\sqrt{2(n-2)}}{n}-\frac{2\sqrt{n-1}}{n}-\frac{4\sqrt{n-2}}{n-1}-1>0.\tag{8}$$

由式(8),得出连通图 G 中具有最小 GA_2 指标的图是 $C_{G_0}^{C_3}(S_{n-q-2})$.

2.1　双圈图类型 I

若连通图 $G_0=C_m(S'_1,S'_2\cdots S'_l)$ 是一个单圈图,其中 $C_m=v_1v_2\cdots v_mv_1$ 圈长为 m,$S'_i(0\leqslant i\leqslant m)$ 是 v_i 的悬挂边,$C_p=u_1u_2\cdots u_pu_1$ 圈长为 p,$S_i(0\leqslant i\leqslant p)$ 是 u_i 的悬挂边. $u_1(v_1)$ 是圈 C_p 与 C_m 的公共点,则记这类双圈图为 $G=C_{S_1,S_2\cdots S_k}^{S'_1,S'_2\cdots S'_l}(u_1)$,针对这类双圈图得到下面定理.

定理 3　图 $G=C_{S_1,S_2\cdots S_k}^{S'_1,S'_2\cdots S'_l}(u_1)$ 是有 n 个顶点,且 $n\geqslant 5$ 的双圈图(图[4]),则得到 $GA_2(G)\geqslant GA_2(C_{S_{n-5},0,0}^{S_{n-5},0,0}(u_1))$.

证明　将圈 C_m 和圈 C_p 上的悬挂边移动到公共点 u_1,则由定理 1 可得,$GA_2(G)\geqslant GA_2(C_{S_{n-5},0,\cdots,0}^{S_{n-5},0,\cdots,0}(u_1))$. 再将圈 C_m 和圈 C_p 上的边移到公共点 u_1,变成悬挂边,当圈 C_m 和圈 C_p 的长度一直变小,则由定理 2 可得,当圈长 $p=3$ 和 $m=3$ 时,图 $G=C_{S_{n-5},0,0}^{S_{n-5},0,0}(u_1)$ 的 GA_2 指标达到最小,则

$$GA_2(C_{S_{n-5},0,0}^{S_{n-5},0,0}(u_1))=\frac{8\sqrt{n-2}}{n-1}+\frac{2(n-5)\sqrt{n-1}}{n}+2.$$

2.2 双圈图类型Ⅱ

将 $P_t=p_1p_2\cdots p_t$ 长度为 $t+1$ 的路连接圈 C_m 和 C_p 的路,且连接点为 v_1 和 u_1. 其中 $T_i(0\leqslant i\leqslant t)$ 是点 p_i 的悬挂边,则记这类双圈图为 $G=C_{S_1,S_2\cdots S_k}^{S'_1,S'_2\cdots S'_l}(T_1,T_2\cdots T_l)$. 将这类双圈图圈 C_m 和圈 C_p 上的悬挂边移动到连接点为 v_1 和 u_1 上,再缩短圈 C_m 和圈 C_p 的圈长,则圈 C_m 上的边和圈 C_p 的边变为 v_1 和 u_1 上的悬挂边,同样由定理 1 和定理 2 可以得到

$$GA_2(G)\geqslant GA_2(C_{d_1,0,0}^{d_2,0,0}(T_1,T_2\cdots T_l)),$$

式中,$d_1=\sum_{i=1}^{k}S_i$,$d_2=\sum_{i=1}^{l}S'_i$.

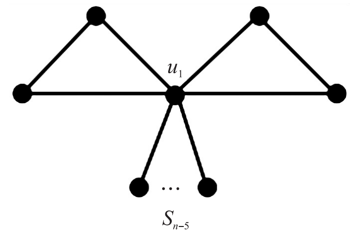


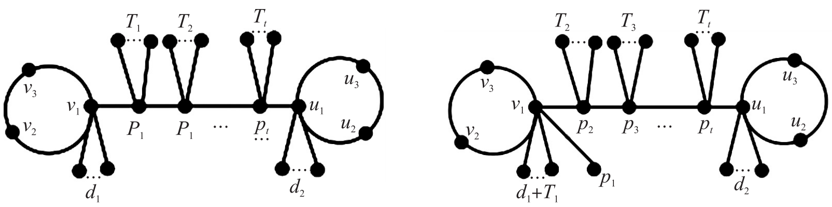
图 4 双圈图类型 I 图 $C_{S_{n-5};0;0}^{S_{n-5};0;0}(u_1)$

Fig. 4 The main subgraphs of bicyclic graphs is of type I $C_{S_{n-5};0;0}^{S_{n-5};0;0}(u_1)$

定理 4 若图 $G'_0=C_{d_1,0,0}^{d_2,0,0}(T_1,T_2,\cdots,T_t)$ 是 有 n 个顶点,且 $n\geqslant 6$ 的双圈图(见图 5),则

$$GA_2(G'_0)\geqslant GA_2(C_{d_1+l,0,0}^{d_2,0,0}(u_1,v_1)),$$

式中,$l=\sum_{i=1}^{t}T_i$.



(a) G'_0 (b) G'_1

图 5 图 G'_0 变换到图 G'_1

Fig. 5 G'_0 transform of G'_1

证明 先将悬挂边 T_1 以及边 $e(v_1,p_1)$ 移动到端点 v_1,则 $n'_v(e)=n_v(e)+n$,$n'_{p_1}(e)=n_{p_1}(e)-n=1$,即

$$\frac{\sqrt{n_u(e,G'_0)\cdot n_v(e,G'_0)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G'_0)+n_v(e,G'_0))}\geqslant\frac{\sqrt{n'_u(e,G'_1)\cdot n'_v(e,G'_1)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G'_1)+n'_v(e,G'_1))}. \tag{9}$$

对于边 $uv\in E(G'_0-e(v_1,p_1))$,$u'v'\in E(G'_1-e(v_1,p_1))$,可得

$$\frac{\sqrt{n_u(e,G'_0)\cdot n_v(e,G'_0)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G'_0)+n_v(e,G'_0))}=\frac{\sqrt{n'_u(e,G'_1)\cdot n'_v(e,G'_1)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G'_1)+n'_v(e,G'_1))}. \tag{10}$$

则

$$\sum_{uv\in G'_0}\frac{\sqrt{n_u(e,G'_0)\cdot n_v(e,G'_0)}}{\frac{1}{2}(n_u(e,G'_0)+n_v(e,G'_0))}\geqslant\sum_{uv\in G'_1}\frac{\sqrt{n'_u(e,G'_1)\cdot n'_v(e,G'_1)}}{\frac{1}{2}(n'_u(e,G'_1)+n'_v(e,G'_1))}.$$

由式(9)-(10)可得:$GA_2(G'_0)\geqslant GA_2(G'_1)$.

同理可依次将路 P_t 上的悬挂边 T_i 及边 $e(p_{i-1},p_i)$ 移动到端点 v_1,可得出一系列图 G'_i,$2\leqslant i\leqslant t$,图 G'_i 是由 G'_0 变换得到,则

$$GA_2(G'_0)\geqslant GA_2(G'_1)\cdots\geqslant GA_2(G'_t)=GA_2(C_{d_1+l,0,0}^{d_2,0,0}(u_1,v_1)).$$

最后,将连接点 u_1 上的悬挂边 d_2 移动到点 v_1,则得到双圈图类型Ⅱ中具有最小 GA_2 指标的图 $C_{S,0,0}^{C_3}(u_1,v_1)$,其 GA_2 指标为

$$GA_2(C_{S,0,0}^{C_3}(u_1,v_1))=\frac{8\sqrt{n-2}}{n-1}+\frac{2\sqrt{3(n-3)}}{n}+\frac{2(n-6)\sqrt{n-1}}{n}+2.$$

式中,$S=d_1+d_2+l+t$.

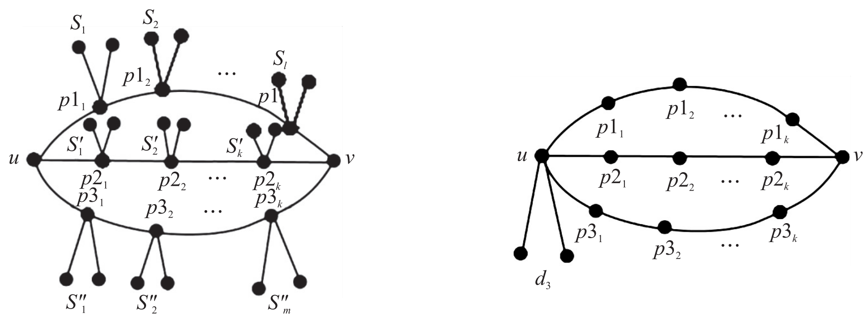
2.3　双圈图类型Ⅲ

图 $G=(V,E)$ 中有两个点 u 和 v,且以这两个点作为路 $P_1=up_{1_1}p_{1_2}\cdots p_{1_l}v$,$P_2=up_{2_1}p_{2_2}\cdots p_{2_k}v$,和 $P_3=up_{3_1}p_{3_2}\cdots p_{3_m}v$ 的公共端点,$N(P_i)$ $(i\leqslant 3)$表示路 P_i 上的顶点数,其中 $N(P_i)\geqslant 1$. S_j 是 $p_{1_j}(1\leqslant l)$ 的悬挂边,S'_j 是 $p_{2_j}(1\leqslant k)$ 的悬挂边,以及 S''_j 是 $p_{3_j}(1\leqslant m)$ 的悬挂边,这类双圈图记作 $G''_1=C^{S''_1,S''_2,\cdots,S''_m}_{S_1,S_2,\cdots,S_l}(S'_1,S'_2,\cdots,S'_k)$. 将所有的悬挂边依次移动到点 u,则得到一系列的图 $G''_2,G''_3,\cdots,G''_m$.

定理 5　若图 $G''_1=C^{S''_1,S''_2,\cdots,S''_m}_{S_1,S_2,\cdots,S_l}(S'_1,S'_2,\cdots,S'_k)$ 是有 n 个顶点,且 $n\geqslant 4$ 的双圈图,其中 G''_i 是由 G''_1 变化而得的,则

$$G''_1\geqslant G''_2\geqslant\cdots\geqslant G''_m,$$

式中,$d_3=\sum_{i=1}^{l}S_i+\sum_{i=1}^{k}S'_i+\sum_{i=1}^{m}S''_i$.



(a) G''_1　　　　(b) G''_m

图 6　图 G''_1 变换到图 G''_m

Fig. 6　G''_1 transform of G''_m

证明　由定理 1 可得,将 $G''_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 的边 $E(G''_i)$ 进行 7 个分类,则经过相同的证明,得到相应的结论,即 $G''_1\geqslant G''_2\geqslant\cdots G''_m$,记图 $G''_m=C^u_m(d_3)$,其中 m 表示 3 条路上所有点的个数,并且有 d_3 条悬挂边在点 u 上.

定理 6　若图 $G''_m=C^u_m(d_2)$ 是有 n 个顶点,且 $n\geqslant 4$ 的双圈图(见图 7),则

$$GA_2(G)\geqslant GA_2(C^u_4(S_{n-4})).$$

证明　将图 $G''_m=C^u_m(d_2)$ 路上的边,依次移动到点 u 上,变成点 u 的悬挂边,最后将图 G''_m 变成有 4 个点的双圈图,且点 u 上有 S_{n-4} 条悬挂边的图 $C^u_4(S_{n-4})$,则双圈图类型Ⅲ中具有最小 GA_2 指标的图 $C^u_4(S_{n-4})$,其 GA_2 指标为

$$GA_2(C^u_4(S_{n-4}))=\frac{4\sqrt{n-2}}{n-1}+\frac{2\sqrt{n-3}}{n-2}+\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{2(n-4)\sqrt{n-1}}{n}.$$

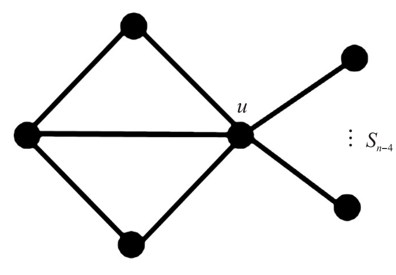


图 7　双圈图类型Ⅲ 图 $C^u_4(S_{n-4})$

Fig. 7　The main subgraphs of bicyclic graphs is of type Ⅲ $C^u_4(S_{n-4})$

3　结论

本文研究连通图 $C^{C_p}_{G_0}(S_1,S_2,\cdots,S_k)$,先经过移动悬挂边,再缩圈,得到一类连通图 $C^{C_3}_{G_0}(S_{n-q-2})$. 依照相同做法,对 3 种类型的双圈图经过边的移动,得到双圈图类型Ⅰ中具有最小 GA_2 指标的图为 $C_{S_{n-5},0,0}$,双圈图类型Ⅱ中具有最小 GA_2 指标的图 $C^{C_3}_{S,0,0}(u_1,v_1)$,双圈图类型Ⅲ中具有最小 GA_2 指标的图 $C^u_4(S_{n-4})$,

最后对 3 种类型的双圈图进行对比分析,得到具有最小 GA_2 的双圈图为($C^u_4(S_{n-4})$).

[参考文献]

[1]　TODESCHIHI R C V,NONE. Handbook of molecular descriptors[M]. New York:Wiley-vch Verlag GmbH,2000.

[2]　WIENER H. Structural determination of paraffin boiling points[J]. Journal of the American Chemical Society,1947,69:17-20.

(下转第 16 页)

$$\mathrm{sun}(L-X)=2r-1>2|X|-\varepsilon_2(X)=2r-2.$$

通过引理 2,L 不是 $P_{\geqslant 3}$-因子覆盖的. 因此 G 不是 $(P_{\geqslant 3},k)$-因子临界覆盖的.

[参考文献]

[1] BONDY J A,MURTY U S R. Graph Theory[M]. Graduate Texts in Mathematics,London:Springer-Verlag,2008.

[2] ZHOU S Z,SUN Z R. Some existence theorems on path factors with given properties in graphs[J]. Acta mathematica sinica,English series,2020,36(8):917-928.

[3] AKIYAMA J,AVIS D,ERA H. On $a\{1,2\}$-factor of a graph[J]. Tru mathematics,1980,16:97-102.

[4] KANEKO A. A necessary and sufficient condition for the existence of a path factor every component of which is a path of length at least two[J]. Journal of combinatorial theory,series B,2003,88:195-218.

[5] ZHANG H P,ZHOU S. Characterizations for $P_{\geqslant 2}$-factor and $P_{\geqslant 3}$-factor covered graphs[J]. Discrete mathematics,2009,309:2067-2076.

[6] ZHOU S Z. Binding numbers and restricted fractional (g,f)-factors in graphs[J]. Discrete applied mathematics,2021,305:350-356.

[7] ZHOU S Z,BIAN Q X,PAN Q R. Path factors in subgraphs[J]. Discrete applied mathematics,2022,319:183-191.

[8] ZHOU S Z,LIU H X,XU Y. A note on fractional ID-$[a,b]$-factor-critical covered graphs[J]. Discrete applied mathematics,2022,319:511-516.

[9] ZHOU S Z,WU J C,BIAN Q X. On path-factor critical deleted(or covered)graphs[J]. Aequationes mathematicae,2022,96:795-802.

[10] GAO W,WANG W F. Tight binding number bound for $P_{\geqslant 3}$-factor uniform graphs[J]. Information processing letters,2021,172,106162.

[责任编辑:陆炳新]

(上接第 10 页)

[3] HOSOYA H,TOPOLOGICAL I. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons[J]. Bulletin of the Chemical Society of Japan,1971,4:2332-2339.

[4] DAS C,GUTMAN I. Estimating the Szeged index[J]. Applied mathematics letters,2009,16:1680-1684.

[5] LIU B,GUTMAN I. On a conjecture on Randic′ indices[J]. Match communications in mathematical in computer chemistry,2009,62:143-154.

[6] WU B Y D R,MENG J X. Basic properties of total transformation graphs[J]. Journal of mathematical study,2001,34:109-116.

[7] BONDY J A,MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York:The Macmillan Press,1976.

[8] VUKICˇEVIC′ D,FURTULA B. Topological index based on the ratios of geometrical and arithmetical means of end-vertex degrees of edges[J]. Journal of mathematical chemistry,2009,46(4):1369-1376.

[9] YUAN Y,ZHOU B,NENAD T. On geometric-arithmetic index[J]. Journal of mathematical chemistry,2010,47(2):833-841.

[10] LI Y P,WU B Y D R. Total Transformation Graphs G(xyz)[J]. Journal of Xinjiang University(natural science edition),2021(1):1-24.

[11] FATH-TABAR G,FURTULA B,GUTMAN I. A new geometric-arithmetic index[J]. Journal of mathematical chemistry,2010,47:477-486.

[12] TANG Z,HOU Y. Note on the second geometric-arithmetic index[J]. Match communications in mathematical in computer chemistry,2011,65(3):705-712.

[责任编辑:陆炳新]