第 47 卷第 1 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 47 No. 1
2024 年 3 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition) Mar,2024

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2024.01.001

一种求解线弹性问题的无闭锁低阶虚拟元方法

王晓涵,王 锋

(南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[摘要] 研究了二维区域上线弹性问题的低阶虚拟元方法. 用不连续的分段线性向量值函数增扩低阶协调虚拟元空间来构造离散空间,设计了一种离散方法,证明了能量范数下的误差是最优收敛的,和 Lamé 常数 λ 无关. 最后给出数值算例验证了理论结果.

[关键词] 线弹性问题,低阶虚拟元方法,闭锁现象

[中图分类号]O24 [文献标志码]A [文章编号]1001-4616(2024)01-0001-06

A Low-Order Locking-Free Virtual Element Method for the Linear Elasticity Problem

Wang Xiaohan, Wang Feng

(School of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210023, China)

Abstract: In this paper, we propose a low-order virtual element method for the linear elasticity problem in two dimensions. We construct a discrete space by enriching the low order conforming virtual element space with discontinuous piecewise linear vector-valued functions. A corresponding discrete problem is introduced. It is proved that the error estimation is optimal with respect to the energy norm, and the hidden constant is independent of the Lamé constant λ. Finally, some numerical examples are given to verify the theoretical results.

Key words: linear elasticity problem, low-order virtual element method, locking phenomenon

线弹性问题研究的是在一定的假设条件下,当弹性材料受到外力作用时,弹性体内的应力、应变和位移之间的关系.由文献[1]可知,当弹性体趋于不可压缩时,线性协调有限元方法的精度会下降,也就是说精度会随着 λ 增大而下降,这被称为闭锁现象. 为了克服闭锁现象,有大量的文献提出了多种行之有效的数值方法,本文只提及少部分工作. 例如,对于纯位移问题,Brenner 和 Sung[2]改变了原问题形式,并用 CR 元[3]离散,得到了无闭锁的方法. 但对于原形式,由于非协调元不满足离散的 Korn 不等式[4],是不稳定的. Hansbo 和 Larson[5]通过在双线性形式中添加稳定项,构造了一种非协调有限元方法,得到了误差估计的最优收敛阶. DG 方法[6-7]则采用分段不连续的函数空间,比传统的 CG 方法包含更广泛的函数空间. 然而,由于 DG 方法自由度较多,在效率上存在一些缺点. 文献[8]提出了一种增广 Galerkin 方法来解决线弹性问题中的闭锁现象,其思想是用一些不连续的分段线性向量值函数来增扩线性元的离散空间,并利用 DG 的离散格式. 而且与线性 CG 空间相比,这个新的函数空间在每个单元上只需要增加一个额外的局部自由度,比线性 DG 空间需要更少的自由度.

近年来,由于多边形网格能更方便地处理复杂区域上的问题,虚拟元方法受到越来越多的关注. 虚拟元方法首次在[9]中提出,由于其在网格处理方面的灵活性和形函数的不显式构造的特性,虚拟元方法也成功地应用于线弹性问题,例如,对于二维线弹性问题,在[10-11]中分别提出了大于等于 2 阶的协调虚拟元和非协调虚拟元方法,并得到了最优收敛阶. 在文献[12]中,通过在双线性形式中添加稳定项构造了一种最低阶的无闭锁的方法.

收稿日期:2023-10-27.

基金项目:国家自然科学基金项目(12071227).

通讯作者:王锋,博士,副教授,研究方向:计算数学.E-mail:fwang@ njnu.edu.cn

在本文中,我们将[8]中的思想应用到虚拟元方法中,构造出一种低阶增扩虚拟元方法,通过不连续的泡函数增扩低阶协调虚拟元空间来构造离散空间,并借助 DG 离散形式. 离散双线性形式满足离散的 Korn 不等式,在解的正则性假设下,证明了能量范数下的误差收敛速度是最优的,与 λ 无关,也就是说该方法克服了闭锁现象,最后通过数值实验验证了理论结果.

1　线弹性问题模型

定义　$\Omega\subset\mathbf{R}^2$为凸的多边形区域,边界为 $\partial\Omega$. 关于标量函数 $L^2(\Omega)$ 空间和 $H^1(\Omega)$ 空间中范数的定义[13]可以自然地拓展到向量值函数中,为方便书写,在此给出一些向量值函数空间的记号:$L^2(\Omega)=(\boldsymbol{L}^2(\Omega))^2$,$\boldsymbol{H}^1(\Omega)=(H^1(\Omega))^2$,$\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)=(H_0^1(\Omega))^2$. 令向量函数 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$,应变张量 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ 和应力张量 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})$分别定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}):=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}),$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}):=2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})+\lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{I},$$

其中 $\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\partial u_1/\partial x_1+\partial u_2/\partial x_2$,$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵,μ,λ 为 Lamé 常数,与材料的性质有关,满足 $0<\lambda<\infty$;$0<\mu_1<\mu<\mu_2$,μ_1,μ_2均为正常数.

线弹性问题模型为:给定外力$\boldsymbol{f}$,强制边界条件$\boldsymbol{g}$,求位移变量$\boldsymbol{u}$使得

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f} & \text{in } \Omega,\\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{g} & \text{on } \partial\Omega.\end{cases}\tag{1}$$

根据 Green 公式,变分形式为:求 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)$,满足 $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{g}$,使得

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}),\quad\forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega),\tag{2}$$

其中双线性形式 $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 定义为 $a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):=2\mu\tilde{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+\lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{u},\operatorname{div}\boldsymbol{v})$,$\tilde{a}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))$.

根据 Korn 不等式 $\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}\leqslant C_\Omega\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}$,知 $a(\cdot,\cdot)$ 在 $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ 空间中满足强制性. 由 Lax-Milgram 定理可知变分形式(2)存在唯一解,根据文[14]假设$\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$,存在 $\boldsymbol{u}_g|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{g}$,其中 $\boldsymbol{g}\in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)^2$,我们有

$$\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega}+\lambda\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}\leqslant C(\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}+\|\boldsymbol{u}_g\|_{2,\Omega}).\tag{3}$$

2　无闭锁的低阶增扩虚拟元方法

2.1　协调虚拟元

设 $\mathcal{T}_h$为区域 Ω 上一个满足形状正则条件[9]的多边形网格剖分. 对 $\mathcal{T}_h$中任意的单元 K,单元边界记为 ∂K,单元 K 和边 e 的直径分别记为 h_K和 h_e,网格尺寸 $h=\max\limits_{K\in T_h}h_K$. 记 ε_h为 $\mathcal{T}_h$中边的集合,ε_h^I和 ε_h^∂分别表示所有内边和边界边的集合. 对于任意的 $e\in\varepsilon_h^I$,有两个相邻单元,记为 K_1和 K_2,$\boldsymbol{n}_e$表示边上的单位法向量,并假定它的方向是从 K_1指向 K_2. 如果 $e\in\varepsilon_h^\partial$,$\boldsymbol{n}_e$的方向与 $\partial\Omega$ 的外法向一致. 如果 $e\in\varepsilon_h^I$,分别定义平均 $\{\cdot\}$ 和跳量 $[\cdot]$ 为 $\{v\}:=\frac{1}{2}(v|_{K_1}+v|_{K_2})$,$[v]:=v|_{K_1}-v|_{K_2}$. 如果 $e\in\varepsilon_h^\partial$,定义 $\{v\}=[v]:=v$.

在多边形单元 K 上,定义局部虚拟元空间为

$$V^K:=\{v\in H^1(K):\Delta v=0,v\in B_1(\partial K)\},\tag{4}$$

其中 $B_1(\partial K):=\{v\in C^0(\partial K):v|_e\in\mathbb{P}_1(e),\forall e\subset\partial K\}$.

由空间定义可以看出一次多项式 $\mathbb{P}_1(K)\subset V^K$. V^K上的自由度定义为单元 K 上所有顶点的函数值,任取 $v\in V^K$,当自由度全为 0 时,则 $v|_{\partial K}=0$. 根据局部虚拟元空间的定义 $\Delta v=0$,由分部积分直接得到 $\nabla v=0$,结合 $v|_{\partial K}=0$ 可知 $v=0$,那么自由度是唯一可解的. 记 $\boldsymbol{V}^K=(V^K)^2$,一般情况下,形函数无法显式表达.

定义以下两个投影:

L^2正交投影 Π_K^k:$\boldsymbol{L}^2(K)\to(\mathbb{P}_k(K))^2$,$k=0,1$

$$\int_K\boldsymbol{q}(\boldsymbol{v}-\Pi_K^k\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0,\ \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^2(K),\ \forall\boldsymbol{q}\in(\mathbb{P}_k(K))^2,\tag{5}$$

Galerkin 投影 Π_K^∇:$\boldsymbol{H}^1(K)\to(\mathbb{P}_1(K))^2$.

$$\begin{cases}\int_K \varepsilon(\boldsymbol{q}):\varepsilon(\boldsymbol{v}-\Pi_K^{\nabla}\boldsymbol{v})\mathrm{d}x=0,\ \forall\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(K),\ \forall\,\boldsymbol{q}\in(\mathbb{P}_1(K))^2,\\ \int_{\partial K}(\boldsymbol{v}-\Pi_K^{\nabla}\boldsymbol{v})\mathrm{d}s=0,\\ \int_K rot(\boldsymbol{v}-\Pi_K^{\nabla}\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0,\end{cases}\tag{6}$$

其中 $rot\ \boldsymbol{v}=-\partial v_1/\partial x_2+\partial v_2/\partial x_1$. 对于任意的 $\boldsymbol{q}\in(\mathbb{P}_1(K))^2$,可知 $\Pi_K^{\nabla}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}$.

根据 Green 公式,对于任意的 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}^K$,有

$$\int_K \varepsilon(\boldsymbol{q}):\varepsilon(\boldsymbol{v})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial K}(\varepsilon(\boldsymbol{q})\boldsymbol{n}_K)\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}s,\ \forall\,\boldsymbol{q}\in(\mathbb{P}_1(K))^2,$$

$$\int_K rot\ \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\partial K}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}_K\mathrm{d}s,$$

由于 $\varepsilon(\boldsymbol{q})\boldsymbol{n}_K|_e$ 在边上是常向量,$\int_{\partial K}\boldsymbol{v}\mathrm{d}s$ 可通过局部虚拟元空间上的自由度计算得出,因此上面两个等式都是可计算的. 又因为 $\boldsymbol{q},\Pi_K^{\nabla}\boldsymbol{v}\in(\mathbb{P}_1(K))^2$,由(6),可通过自由度计算出 Galerkin 投影 Π_K^{∇}.

低阶协调虚拟元空间定义如下,

$$\boldsymbol{V}:=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^1(\Omega):\boldsymbol{v}|_K\in\boldsymbol{V}^K,\quad \forall\,K\in\mathcal{T}_h\}.$$

根据[9]用局部自由度构造插值 $\Pi_h^c:\boldsymbol{H}^2(K)\to\boldsymbol{V}^K$,满足 $\chi_i(\boldsymbol{v}-\Pi_h^c\boldsymbol{v})=0,i=1,2,\cdots,\dim\ \boldsymbol{V}^K$,其中 χ_i 是 $\boldsymbol{V}^K$ 中与第 i 个自由度有关的算子. 任取 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^2(K)$,存在一个与 h 无关的正常数 C,有以下不等式成立,

$$\|\boldsymbol{v}-\Pi_h^c\boldsymbol{v}\|_{0,K}+h_K|\boldsymbol{v}-\Pi_h^c\boldsymbol{v}|_{1,K}\leqslant Ch_K^2|\boldsymbol{v}|_{2,K}.\tag{7}$$

2.2 离散问题

由于最低阶协调虚拟元方法的误差依赖于 λ,当 $\lambda\to\infty$ 时会出现闭锁现象,为了克服闭锁现象,参考[8]我们定义一个分片线性多项式空间:

$$\boldsymbol{D}_h:=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega):\boldsymbol{v}|_K=M_K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_K),\quad M_K\in\mathbf{R},\quad \forall\,K\in\mathcal{T}_h\},$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}_K$ 表示单元的重心. 则增扩协调虚拟元空间定义为:

$$\boldsymbol{V}_h:=\boldsymbol{V}\oplus\boldsymbol{D}_h,$$

定义插值算子 $\Pi_h:\boldsymbol{H}^2(K)\to\boldsymbol{V}_h^K$ 为

$$\Pi_h:=\Pi_h^c+\Pi_h^d,\tag{8}$$

其中 Π_h^d 为到 $\boldsymbol{D}_h$ 的插值,满足 $(\mathrm{div}(\Pi_h^d\boldsymbol{v}),1)_K=(\mathrm{div}(\boldsymbol{v}-\Pi_h^d\boldsymbol{v}),1)_K$. 由此式可知,在任意的多边形单元 $K\in\mathcal{T}_h$ 上,插值算子 Π_h 满足

$$(\mathrm{div}(\boldsymbol{v}-\Pi_h\boldsymbol{v}),1)_K=0.\tag{9}$$

现考虑离散问题. 设 $S^K:\boldsymbol{V}^K\times\boldsymbol{V}^K\to\mathbf{R}$ 是一个双线性形式,且定义 $S^K(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}):=\sum_{i=1}^{\dim\boldsymbol{V}^K}\chi_i(\boldsymbol{u})\chi_i(\boldsymbol{v})$. 任取 $\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h^K$,我们在离散的 $\boldsymbol{V}_h^K$ 空间上定义局部双线性形式

$$\tilde{a}_h^K(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h):=(\varepsilon(\Pi_K^{\nabla}\boldsymbol{u}_h),\varepsilon(\Pi_K^{\nabla}\boldsymbol{v}_h))_K+S^K((I-\Pi_K^{\nabla})\boldsymbol{u}_h,(I-\Pi_K^{\nabla})\boldsymbol{v}_h).\tag{10}$$

根据文献[12],双线性形式 $\tilde{a}_h^K(\cdot,\cdot)$ 满足以下稳定性和相容性,

稳定性:存在两个与 h 无关的正常数 C_1,C_2,使得

$$C_1\tilde{a}^K(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)\leqslant S^K(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)\leqslant C_2\tilde{a}^K(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h),\ \forall\,\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h^K.\tag{11}$$

相容性:

$$\tilde{a}_h^K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}_h)=\tilde{a}^K(\boldsymbol{q},\boldsymbol{v}_h),\ \forall\,\boldsymbol{q}\in(\mathbb{P}_1(K))^2.\tag{12}$$

对于任意的 $\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}_h\in\boldsymbol{V}_h$,定义

$$a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h):=2\mu\sum_K\tilde{a}_h^K(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+\lambda\sum_K(\Pi_K^0(\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h),\Pi_K^0(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_h))_K-\sum_{e\in\varepsilon_h}(\{\boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{u}_h)\boldsymbol{n}_e\},[\boldsymbol{v}_h])_e+$$

$$\sum_{e\in\varepsilon_h}([\boldsymbol{u}_h],\{\boldsymbol{\sigma}_h(\boldsymbol{v}_h)\boldsymbol{n}_e\})_e+\sum_{e\in\varepsilon_h}\frac{\alpha}{h_e}([\boldsymbol{u}_h],[\boldsymbol{v}_h])_e+\lambda^2\sum_{e\in\varepsilon_h^I}\beta h_e([\Pi_K^0(\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}_h)],[\Pi_K^0(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}_h)])_e,\tag{13}$$

其中惩罚参数 α,β 均为正常数,且 $\sigma_h(\boldsymbol{u}_h)=2\mu\varepsilon(\Pi_K^{\nabla}\boldsymbol{u}_h)+\lambda(\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_h))\boldsymbol{I}$.

由右端项 f 和边界条件 g,定义离散荷载项为

$$\langle \boldsymbol{f}_h,\boldsymbol{v}_h\rangle:=\sum_K(\boldsymbol{f},\Pi_K^0\boldsymbol{v}_h)_K+\sum_{e\in\varepsilon_h^{\partial}}(\boldsymbol{g},\sigma_h(\boldsymbol{v}_h)\boldsymbol{n}_e)_e+\sum_{e\in\varepsilon_h^{\partial}}\frac{\alpha}{h_e}(\boldsymbol{g},\boldsymbol{v}_h)_e. \tag{14}$$

那么离散问题为:求 $\boldsymbol{u}_h\in\boldsymbol{V}_h$,使得

$$a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)=\langle\boldsymbol{f}_h,\boldsymbol{v}_h\rangle,\ \forall\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h. \tag{15}$$

引理 2.1　引入文献[4]中离散的 Korn 不等式

$$\sum_K\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_{0,K}^2\leqslant C\left(\sum_K\|\varepsilon(\boldsymbol{v})\|_{0,K}^2+\sum_{e\in\varepsilon_h}\frac{1}{h_e}\|[\boldsymbol{v}]\|_{0,e}^2\right),\ \forall\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_h.$$

鉴于引理 2.1,对任意的 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}_h$,离散空间 V_h上的能量范数 $\|\cdot\|_h$定义如下,

$$\|\boldsymbol{v}\|_h:=\left(\sum_K\|\varepsilon(\boldsymbol{v})\|_{0,K}^2+\sum_{e\in\varepsilon_h}\frac{1}{h_e}\|[\boldsymbol{v}]\|_{0,e}^2\right)^{1/2}. \tag{16}$$

引理 2.2　存在一个与 h 无关的正常数 C,使

$$a_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)\geqslant C\|\boldsymbol{v}_h\|_h^2+\lambda^2\sum_{e\in\varepsilon_h^I}\beta h_e\|[\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)]\|_{0,e}^2,\ \forall\boldsymbol{v}_h\in V_h. \tag{17}$$

证明　任取 $\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h$,根据离散的 Korn 不等式,在能量范数 $\|\cdot\|_h$ (16) 的定义下,推出

$$a_h(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)\geqslant C\|\varepsilon(\boldsymbol{v}_h)\|_{0,K}^2+\lambda\sum_K\|\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)\|_{0,K}^2+\sum_{e\in\varepsilon_h}\frac{\alpha}{h_e}\|[\boldsymbol{v}_h]\|_{0,e}^2+$$
$$\lambda^2\sum_{e\in\varepsilon_h^I}\beta h_e\|[\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)]\|_{0,e}^2\geqslant C\|\boldsymbol{v}_h\|_h^2+\lambda^2\sum_{e\in\varepsilon_h^I}\beta h_e\|[\Pi_K^0(\operatorname{div}v_h)]\|_{0,e}^2.$$

这个不等式表明了离散双线性形式 $a_h(\cdot,\cdot)$ 在 $\boldsymbol{V}_h$上是强制的.

因为网格剖分 $\mathcal{T}_h$固定后,$\boldsymbol{V}_h$是一个有限维的空间,刚度矩阵为一方阵,此时证明解的存在性与唯一性是等价的. 易证得解是唯一的,从而证明出离散问题(15)存在唯一解.

3　收敛性分析

根据文[15],如果剖分 $\mathcal{T}_h$满足正则性假设,有以下迹不等式成立.

引理 3.1　存在一个与 h 无关的常数 C,使得

$$h_e^{-1}\|v\|_{0,e}^2\leqslant C(h_K^{-2}\|v\|_{0,K}^2+\|\nabla v\|_{0,K}^2),\quad\forall v\in H^1(K),\quad\forall K\in\mathcal{T}_h. \tag{18}$$

引理 3.2[8]　任取 $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{H}^2(K)$,$C$ 是一个与网格尺寸 h 无关正常数,有以下插值误差估计,

$$|\operatorname{div}(\boldsymbol{v}-\Pi_h\boldsymbol{v})|_{0,K}\leqslant Ch_K|\operatorname{div}\boldsymbol{v}|_{1,K}, \tag{19}$$

$$\|\boldsymbol{v}-\Pi_h\boldsymbol{v}\|_{0,K}+h_K|\boldsymbol{v}-\Pi_h\boldsymbol{v}|_{1,K}\leqslant Ch_K^2|\boldsymbol{v}|_{2,K}. \tag{20}$$

3.1　能量范数下的收敛性

下面先给出在误差分析过程中用到的引理并进行证明.

引理 3.3[9]　设 $\boldsymbol{f}\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$,有以下不等式成立

$$\left|\sum_K((\boldsymbol{f},\Pi_K^0\boldsymbol{v}_h)_K-(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h)_K)\right|\leqslant Ch\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\|\boldsymbol{v}_h\|_h,\quad\forall\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h. \tag{21}$$

引理 3.4　对任意的 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^2(\Omega)$,$\boldsymbol{w}_h\in\boldsymbol{V}_h$,有以下不等式

$$|a_h(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)|\leqslant\frac{1}{2}\|\boldsymbol{w}_h\|_h^2+Ch^2(\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega}+\lambda\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega})^2+\frac{\lambda^2}{2}\sum_{e\in\varepsilon_h^I}\beta h_e\|[\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h)]\|_{0,e}^2. \tag{22}$$

证明　由于$(\operatorname{div}(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}),\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h))=0$,通过 Green 公式可推出下面的等式

$$0=\sum_{e\in\varepsilon_h}([\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}],\{\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h)\boldsymbol{n}_e\})_e+\sum_{e\in\varepsilon_h^I}(\{(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_e\},[\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h)])_e. \tag{23}$$

将(23)代入离散双线性形式 $a_h(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)$展开式中,并由 Cauchy-Schwarz 不等式,迹不等式(18),引理 3.2 可得到误差估计.

现在对收敛性进行分析,对任意的向量 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^2(\Omega)$,$\boldsymbol{w}_h\in\boldsymbol{V}_h$,引入一个记号为

$$\hat{a}_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)=2\mu\sum_K\tilde{a}_h^K(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)+\lambda\sum_K(\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{u}),\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h))-\sum_{e\in\varepsilon_h}(\{\sigma_h(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}_e\},[\boldsymbol{w}])_e. \tag{24}$$

根据局部双线性形式 $\tilde{a}_h^K(\cdot,\cdot)$ 的相容性(12)可知，$\hat{a}_h(\Pi_K^1\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)=a(\Pi_K^1\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)$.

引理 3.5 若 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^2(\Omega)$，$C$ 是与 λ 和 h 无关的正常数. 则有

$$\|\boldsymbol{u}_h-\Pi_h\boldsymbol{u}\|_h\leqslant Ch(\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}+\|\boldsymbol{u}_g\|_{2,\Omega}). \tag{25}$$

证明 令 $\boldsymbol{w}_h=\boldsymbol{u}_h-\Pi_h\boldsymbol{u}$，引入 $\hat{a}_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)$，$a_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)$ 则

$$\begin{aligned}a_h(\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{w}_h)&=a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{w}_h)-a_h(\Pi_h\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)=\sum_K((\boldsymbol{f},\Pi_K^0\boldsymbol{w}_h)_K-(\boldsymbol{f},\boldsymbol{w}_h)_K)-\\&\quad a_h(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)-\hat{a}_h(\boldsymbol{u}-\Pi_K^1\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)-a(\Pi_K^1\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h).\end{aligned} \tag{26}$$

将式(26)中的项按照定义展开进行误差估计，并由引理 3.3，引理 3.4 得出以下不等式

$$a_h(\boldsymbol{w}_h,\boldsymbol{w}_h)\leqslant\|w_h\|_h^2+\frac{\lambda^2}{2}\sum_{e\in\varepsilon_h^I}\beta h_e\|[\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h)]\|_{0,e}^2+Ch^2(\|\boldsymbol{u}\|_{2,\Omega}+\lambda\|\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega})^2.$$

因为 $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}^2(\Omega)$，并由离散双线性形式 $a_h(\cdot,\cdot)$ 的强制性(17)，则有以下不等式成立，

$$\|\boldsymbol{w}_h\|_h^2+\frac{\lambda^2}{2}\sum_{e\in\varepsilon_h^I}\beta h_e\|[\Pi_K^0(\operatorname{div}\boldsymbol{w}_h)]\|_{0,e}^2\leqslant Ch^2(\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}+\|\boldsymbol{u}_g\|_{2,\Omega})^2.$$

因此 $\|\boldsymbol{u}_h-\Pi_h\boldsymbol{u}\|_h\leqslant Ch(\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}+\|\boldsymbol{u}_g\|_{2,\Omega})$，引理 3.5 成立.

由三角不等式，根据插值误差估计以及引理 3.5 即得以下定理.

定理 3.1 设 $\boldsymbol{u}$ 是线弹性问题(1)的解，$\boldsymbol{u}_h$是离散问题(15)的解，则存在一个与 h 和 λ 无关的正常数 C，使得

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h\leqslant Ch(\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}+\|\boldsymbol{u}_g\|_{2,\Omega}). \tag{27}$$

4 数值实验

我们通过数值实验来验证理论结果. 设定区域 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$，线弹性问题的真解为

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\sin(x)\sin(y)+\dfrac{1}{\lambda}x\\[2ex]\cos(x)\cos(y)+\dfrac{1}{\lambda}y\end{pmatrix}.$$

令参数 $\mu=1$，在数值实验中分别取 $\lambda=1$ 和 $\lambda=10^6$进行测试，此外，我们也用最低阶协调虚拟元方法求解线弹性问题，并比较两种方法的误差结果，证明低阶增扩虚拟元方法能够克服闭锁现象. 在表 1 和表 2 中我们列出了两种方法在不同网格尺寸 h 下的误差和误差阶.

表 1 $\lambda=1$ 时，最低阶协调虚拟元(a)和低阶增扩虚拟元(b)的误差估计

Table 1 Error estimation of the lowest-order conforming virtual element (a) and the lowest-order enriched virtual element (b) when $\lambda=1$

h	$\|\boldsymbol{u}-\Pi u_h\|_0$	order	$\|\Pi\boldsymbol{u}-\Pi u_h\|_h$	order	h	$\|\boldsymbol{u}-\Pi u_h\|_0$	order	$\|\Pi\boldsymbol{u}-\Pi u_h\|_h$	order
1/4	8.10×10^{-3}	—	7.84×10^{-2}	—	1/4	5.22×10^{-3}	—	3.98×10^{-1}	—
1/8	2.06×10^{-3}	1.97	3.94×10^{-2}	0.99	1/8	1.16×10^{-3}	2.17	1.88×10^{-1}	1.08
1/16	5.19×10^{-4}	1.99	1.98×10^{-2}	1.00	1/16	2.78×10^{-4}	2.07	9.42×10^{-2}	1.00
1/32	1.30×10^{-4}	2.00	9.88×10^{-3}	1.00	1/32	6.64×10^{-5}	2.06	4.50×10^{-2}	1.06
1/64	1.95×10^{-5}	2.00	4.94×10^{-3}	1.00	1/64	1.64×10^{-5}	2.02	2.33×10^{-2}	0.95

表 2 $\lambda=10^6$时，最低阶协调虚拟元(a)和低阶增扩虚拟元(b)的误差估计

Table 2 Error estimation of the lowest-order conforming virtual element(a) and the lowest-order enriched virtual element(b) when $\lambda=10^6$.

h	$\|\boldsymbol{u}-\Pi u_h\|_0$	order	$\|\Pi\boldsymbol{u}-\Pi u_h\|_h$	order	h	$\|\boldsymbol{u}-\Pi u_h\|_0$	order	$\|\Pi\boldsymbol{u}-\Pi u_h\|_h$	order
1/4	8.26×10^{-3}	—	7.84×10^{-2}	—	1/4	5.85×10^{-3}	—	4.22×10^{-1}	—
1/8	2.31×10^{-3}	1.84	3.96×10^{-2}	0.99	1/8	1.38×10^{-3}	2.08	2.02×10^{-1}	1.06
1/16	9.39×10^{-4}	1.30	2.01×10^{-2}	0.98	1/16	3.28×10^{-4}	2.07	9.70×10^{-2}	1.06
1/32	7.26×10^{-4}	0.37	1.06×10^{-2}	0.93	1/32	8.12×10^{-5}	2.01	4.90×10^{-3}	0.99
1/64	6.96×10^{-4}	0.06	1.06×10^{-2}	0.76	1/64	2.02×10^{-5}	2.01	2.32×10^{-2}	1.08

从表1和表2中可以看出,当 $\lambda=1$ 时,最低阶协调虚拟元方法的误差估计有最优收敛阶,但当 $\lambda=10^6$ 时,L^2 范和能量范的误差阶随着网格的加细逐渐下降. 也就是说当 λ 趋近于无穷时,低阶协调虚拟元方法出现了闭锁现象. 而我们的方法在 $\lambda=1$ 和 $\lambda=10^6$ 时,L^2 范的误差阶为 $O(h^2)$,能量范下的误差阶为 $O(h^1)$,误差收敛阶都是最优的,说明了该方法能够克服闭锁现象.

5 结论

本文提出了一种低阶增扩虚拟元方法来解决二维线弹性问题中的闭锁现象. 通过在低阶协调虚拟元空间中只增加一个局部自由度得到离散空间,并证明了能量范数下的误差收敛阶是最优的,与 λ 无关,也就是说该方法克服了闭锁现象,最后通过数值实验验证了理论结果,在数值实验中可以看出该方法在能量范和 L^2 范下的误差估计都是最优收敛的. 虽然我们已经得到了一些结果,但缺乏完整性. 本文的方法可以继续研究,证明出 L^2 范数下误差估计的理论结果,还可以推广到三维线弹性问题中.

[参考文献]

[1] BABUSKA I,SZABO B. On the rates of convergence of the finite element method[J]. International journal for numerical methods in engineering,1982,18:323-341.

[2] BRENNER S C,SUNG L Y. Linear finite element methods for planar linear elasticity[J]. Mathematics of computation,1992,59:321-338.

[3] CROUZEIX M,RAVIART P. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I[J]. ESAIM:mathmatical modelling and numerical analysis,1973,7:33-75.

[4] BRENNER S C. Korn's inequalities for piecewise H^1 vector fields[J]. Mathematics of computation,2004,73:1067-1087.

[5] HANSBO P,LARSON M G. Discontinuous Galerkin and the Crouzeix-Raviart element:application to elasticity[J]. ESAIM mathematical modelling and numerical analysis,2003,37:63-72.

[6] WIHLER T P. Locking-free DGFEM for elasticity problems in polygons[J]. IMA journal of numerical analysis,2004,24,45-75.

[7] WIHLER T P. Locking-free adaptive discontinuous Galerkin FEM for linear elasticity problems[J]. Mathematics of compution,2006,75:1087-1102.

[8] YI S Y,LEE S,ZIKATANOV L. Locking-free Enriched Galerkin Method for linear elasticity[J]. SIAM journal on numerical analysis,2002,60:52-75.

[9] BEIRÃO DA VEIGA L,BREZZI F,CANGIANI A,et al. Basic principles of virtual element methods[J]. Mathematical models and methods in applied sciences,2013,23:199-214.

[10] BEIRÃO DA VEIGA L,BREZZI F,MAREINI L D. Virtual elements for linear elasticity problems[J]. SIAM journal on numerical analysis,2013,51:794-812.

[11] ZHANG B,ZHAO J,YANG Y,et al. The nonconforming virtual element method for elasticity problems[J]. Journal of computational physics,2019,378:394-410.

[12] KWAK DO Y,PARK H. Lowest-order virtual element methods for linear elasticity problems[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering,2022,390.

[13] ADAMS R A,FOURNIER J J F. Sobolev spaces[M]. Netherland:Academic Press,2003.

[14] ARNOLD D N,DOUGLAS J,GUPTA C P. A family of higher order mixed finite element methods for plane elasticity[J]. Numerische mathematics,1984,45:1-22.

[15] BRENNER S C,GUAN Q,SUNG L Y. Some estimates for virtual element methods[J]. Computational methods in applied mathematics,2017,17:553-574.

[责任编辑:陆炳新]