第 47 卷第 2 期　　南京师大学报(自然科学版)　　Vol. 47 No. 2
2024 年 6 月　　JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science Edition)　　June,2024

doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2024.02.001

Gorenstein 稳定范畴的粘合和等价不变量

高　楠,陈浩标

(上海大学理学院数学系,上海 200444)

[摘要]　引入了 Gorenstein 投射刚性维数,以 Gorenstein 投射模的稳定范畴的粘合为主要工具,证明了 Gorenstein 投射刚性维数是 Morita 等价、Gorenstein 稳定等价和导出等价的不变量,刻画了某些代数类的 Gorenstein 投射刚性维数.

[关键词]　Gorenstein 投射模,Gorenstein 投射刚性维数,Gorenstein 稳定等价,三角范畴的粘合

[中图分类号]O154.2　[文献标志码]A　[文章编号]1001-4616(2024)02-0001-07

Invariants Along the Recollements and Equivalences of Gorenstein Stable Categories

Gao Nan,Chen Haobiao

(Department of Mathematics,Shanghai University,Shanghai 200444,China)

Abstract:We introduce the Gorenstein projective rigidity dimension,and show that the Gorenstein projective rigidity dimension is invariant with respect to Morita equivalences,Gorenstein stable equivalences and derived equivalences, where the recollements of the stable categories of Gorenstein projective modules are the main tool. Furthermore,we characterize the Gorenstein projective rigidity dimension of some classes of algebras.

Key words:Gorenstein projective modules,Gorenstein projecitve rigidity dimension,Gorenstein stable equivalences, recollements of triangulated categories

同调不变量的研究是代数表示论的重要研究课题. 例如 Dennis 和 Igusa,Loday[1-2],Hochschild(上)同调在 Morita 等价的不变量,Happel,Keller,Pan 和 Xi[3-7],Hochschild(上)同调、整体维数的有限性和有限维数的有限性是导出等价的不变量,Krause,Liu 和 Xi,Pan 和 Zhou,Xi[8-11],有限维代数的表示型、表示维数和 Hochschild(上)同调是 Morita 型的稳定等价的不变量.

Gorenstein 同调代数的主要思想是用 Gorenstein 投射模代替投射模. Gorenstein 投射模是由 Enochs 和 Jenda[12]引入,它是 Auslander 和 Bridger[13]定义的双边诺特环上 G-维数为 0 的有限生成模的推广,参见[12,14-16]. 回顾 Rickard[17]的经典结果:两个自入射代数之间的导出等价可诱导出 Morita 型的稳定等价. 近年来,Hu 和 Pan[18]通过定义阿贝尔范畴的导出范畴之间的非负函子和一致有界函子证明了导出等价可以诱导出 Gorenstein 投射对象的稳定等价(文中统称为 Gorenstein 稳定等价). 自然地,确定 Gorenstein 稳定等价下的同调不变量成为代数表示论、Gorenstein 同调代数和奇点范畴理论中的基本课题.

三角范畴的粘合由 Beilinson 等[19]引入,它是 3 个三角范畴和满足良好性质的 6 个三角函子构成的图表.

在本文中,我们引入了 Gorenstein 投射刚性维数的概念,并描述了其同调性质. 我们以三角范畴的粘合和 Gorenstein 稳定等价为技巧和工具,证明了 Gorenstein 投射刚性维数是 Gorenstein 稳定等价的不变量,在此基础上,刻画了几类代数的 Gorenstein 投射刚性维数. 以上结果表明了 Gorenstein 投射刚性维数在 Gorenstein 同调代数的研究中具有一定的优势.

具体来说,设 A,B 和 C 是阿廷代数. 若 Gorenstein 投射模的稳定范畴 A-$\underline{\mathrm{Gproj}}$,$B$-$\underline{\mathrm{Gproj}}$ 和 C-$\underline{\mathrm{Gproj}}$ 位

收稿日期:2023-02-23.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11771272、11871326、12271333).
通讯作者:高楠,博士,教授,博士生导师,研究方向:代数表示论. E-mail:nangao@ shu.edu.cn

于一粘合中,我们证明了 A 的 Gorenstein 投射刚性维数大于 B 和 C 的. 特别地,Gorenstein 投射刚性维数为 Morita 等价和 Gorenstein 稳定等价的不变量.

1 Gorenstein 投射刚性维数

本节中,我们引入了 Gorenstein 投射刚性维数. 接着,我们阐明了 Gorenstein 投射刚性维数的一些同调性质. 在此基础上,我们主要证明了它是 Morita 等价、Gorenstein 稳定等价和导出等价下的同调不变量.

1.1 Gorenstein 投射刚性维数

在引入 Gorenstein 刚性维数的概念之前,我们先解释本节中使用的一些符号和术语.

假设 A 是阿廷代数. 我们分别用 A-Mod 和 A-mod 表示左 A-模构成的范畴和有限生成左 A-模构成的范畴,用 A-proj 表示有限生成投射左 A-模形成的满子范畴. 令 $\mathrm{D}:A\text{-mod}\to A^{\mathrm{op}}\text{-mod}$ 表示对偶函子.

称模 $G\in A$-mod 是 Gorenstein 投射的,若存在 A-proj 中的正合列

$$\cdots\to P^{-1}\to P^0\xrightarrow{d^0}P^1\to\cdots,$$

使得其在函子 $\mathrm{Hom}_A(-,P)$ 作用下仍保持正合,并且 $G\cong\ker d^0$[12,14],其中 $P\in A$-proj.

称 A 模 M 为生成子,若 $A\in\mathrm{add}M$,其中 $\mathrm{add}M$ 是指 A-mod 的包含 M 且对有限直和和直和项封闭的满子范畴. 称 M 是 Gorenstein 投射生成子是指 M 既是生成子又是 Goresntein 投射 A-模.

控制维数的思想来源于 Nakayama 的对域上的有限维代数分类的工作[20].之后,Tachikawa 具体定义了控制维数[21-22],Müller 和 Yamagata 对其进行了系统研究[23-24]. 我们特别指出,Chen 和 Xi 研究了导出等价下的控制维数[25].

定义 1.1[22] 设 A 是阿廷代数,$M,T\in A$-mod. M 的 T-控制维数记为 T-domdim$M$,定义如下:

$$T\text{-domdim}M=\sup\{n\mid 0\to M\to T^0\to T^1\to\cdots\to T^{n-1}\text{是一个正合列,使得对}\forall\,0\leqslant i\leqslant n-1,T^i\in\mathrm{add}\ T\}.$$

定义 1.2 设 A 是阿廷代数,定义 A 的 Gorenstein 投射刚性维数如下:

$$\mathrm{Grigdim}A=\sup\{\mathrm{D}M\text{-domdim}\Gamma\mid M\text{是}A\text{-mod 中的 Gorenstein 投射生成子},\Gamma=\mathrm{End}_A(M)\}.$$

为了计算自同态代数的控制维数,Chen 等[26]引入了 A-模 M 的刚性次数,记为 rd_AM,定义为:

$$\mathrm{rd}_AM=\sup\{n\mid \mathrm{Ext}_A^i(M,M)=0,\forall\,1\leqslant i\leqslant n\}.$$

我们揭示了 Gorenstein 投射刚性维数和刚性次数之间的联系.

引理 1.3 设 A 为阿廷代数,M 是 A-mod 中的 Gorenstein 投射生成子. 令 $\Gamma:=\mathrm{End}_A(M)$,则

$$\mathrm{D}M\text{-domdim}\Gamma=\mathrm{rd}_AM+2.$$

证明 设

$$0\to M\to I_0\to I_1\to\cdots\to I_n\to\cdots$$

是 M 的极小内射分解. 应用函子 $\mathrm{Hom}_A(M,-)$,我们可得如下复形

$$0\to\Gamma\to\mathrm{Hom}_A(M,I_0)\to\cdots\to\mathrm{Hom}_A(M,I_n)\to\cdots.$$

由于 $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ 是满忠实函子,并且 $\mathrm{Hom}_A(M,I_i)\in\mathrm{add}\mathrm{D}M$,所以可得

$$\mathrm{D}M\text{-domdim}\Gamma=\mathrm{rd}_AM+2.$$

由引理 1.3,上述定义可重新表述为:

$$\mathrm{Grigdim}A=\sup\{\mathrm{rd}_AM\mid M\text{是}A\text{-mod 中的 Gorenstein 投射生成子}\}+2.$$

因此,对于任何代数 A,$\mathrm{Grigdim}A\geqslant 2$.

接下来我们计算 gendo-Goresntein 代数和 CM-有限的非-CM-自由的 Gorenstein 代数的 Gorenstein 投射刚性维数. 为读者方便,我们先回顾上述代数的概念.

(1)若 $\mathrm{inj.dim}_AA<\infty$ 和 $\mathrm{inj.dim}\ A_A<\infty$,则称阿廷代数 A 是 Gorenstein 代数[16].

(2)若阿廷代数 A 同构于 Gorenstein 代数的 Gorenstein 投射生成子的自同态代数,则称 A 是 gendo-Gorenstein 代数. 等价地说,若存在 A 的幂等元 e,满足 eAe 是 Gorenstein 代数和 Ae 是 Gorenstein 投射生成子,使得 $A\cong\mathrm{End}_{eAe}(Ae)$[27].

(3)若阿廷代数 A 只有有限多的不可分解的有限生成的 Gorenstein 投射模的同构类,则称 A 是有限 Cohen-Macaulay 型的代数(简称为有限 CM 类型).

(4)若 $A-\mathrm{Gproj}=A-\mathrm{proj}$,即其所有的有限生成的 Gorenstein 投射模都是投射模,则称阿廷代数 A 是 CM-自由的.

例 1　设(A,e)为 gendo-d-Gorenstein 代数,其中 d 为非负整数. 若有正整数 $n\geqslant 2$, $\mathrm{rd}_{eAe}eA\geqslant n-2$,则

$$\mathrm{GrigdimeAe}\geqslant n.$$

证明　由(A,e)为 gendo-Gorenstein 代数,根据引理 1.3 我们有

$$\mathrm{D}(eA)-\mathrm{domdim}A=\mathrm{rd}_{eAe}eA+2.$$

由假设 $\mathrm{rd}_{eAe}eA\geqslant n-2$,因此 $\mathrm{D}(eA)-\mathrm{domdim}\ A\geqslant n$. 根据 Gorenstein 投射刚性维数的定义,我们可得 $\mathrm{Grigdime}Ae\geqslant n$.

例 2　设 A 为 CM-有限的非-CM-自由的 Gorenstein 代数,G 为 A 的 Gorenstein 投射生成子. 则

$$\mathrm{Grigdim}A\leqslant \mathrm{id}G+1.$$

证明　令 $m:=\mathrm{id}G$,如果 $m=0$,则 G 是内射的,由于 G 是 Gorenstein 投射的,故有正合列 $0\to G\to P\to C\to 0$,其中 P 是投射的. 这意味着 G 是投射的,所以 A 为 CM-自由代数. 因此 $m\geqslant 1$.

当 m 为无穷大时,无需证明. 故假设 m 是有限的,则 $\mathrm{Ext}_A^m(G,G)\neq 0$,所以 $\mathrm{rd}_AG\leqslant m-1$. 因此,

$$\mathrm{Grigdim}A\leqslant \mathrm{id}G-1+2=\mathrm{id}G+1.$$

证毕.

1.2　Gorenstein 投射刚性维数的一些同调性质

定理 1.4　设 A 和 B 为阿廷代数,则:

(1) $\mathrm{Grigdim}(A\times B)=\min\{\mathrm{Grigdim}\ A,\mathrm{Grigdim}B\}$.

(2)如果 k 是完备域. 则 $\mathrm{Grigdim}(A\otimes_k B)\geqslant\min\{\mathrm{Grigdim}\ A,\mathrm{Grigdim}B\}$.

(3)如果 A 和 B 是 Morita 等价,则 $\mathrm{Grigdim}\ A=\mathrm{Grigdim}B$.

(4)如果 $A-\underline{\mathrm{Gproj}}$ 和 $B-\underline{\mathrm{Gproj}}$ 作为加法范畴是稳定等价的,则

$$\mathrm{Grigdim}A=\mathrm{Grigdim}B.$$

(5)如果 A 和 B 导出等价,则 $\mathrm{Grigdim}A=\mathrm{Grigdim}B$.

证明　设 M 和 N 分别是 A-mod 和 B-mod 中的 Gorenstein 投射生成子. 取 M 的极小内射分解

$$0\to M\to I^0\to I^1\to\cdots\to I^n\to\cdots,$$

应用函子 $\mathrm{Hom}_A(M,-)$,我们可得如下复形

$$0\to\mathrm{End}_A(M)\to\mathrm{Hom}_A(M,I^0)\to\cdots\to\mathrm{Hom}_A(M,I^n)\to\cdots(*),$$

其中 $\mathrm{Hom}_A(M,I^i)\in\mathrm{addD}M$.

同样地,取 N 的极小内射分解

$$0\to N\to J^0\to J^1\to\cdots\to J^n\to\cdots,$$

运用函子 $\mathrm{Hom}_B(N,-)$,我们可得如下复形

$$0\to\mathrm{End}_B(N)\to\mathrm{Hom}_B(N,J^0)\to\cdots\to\mathrm{Hom}_B(N,J^n)\to\cdots(**),$$

其中 $\mathrm{Hom}_B(N,J^i)\in\mathrm{addD}N$.

(1)由 $\mathrm{End}_{A\times B}(M\times N)\cong\mathrm{End}_A(M)\times\mathrm{End}_B(N)$ 和 $\mathrm{D}(M\times N)\cong\mathrm{D}M\times\mathrm{D}N$,我们可得 $\mathrm{D}(M\times N)-\mathrm{domdimEnd}_{A\times B}(M\times N)=\min\{\mathrm{D}M-\mathrm{domdimEnd}_A(M),\mathrm{D}N-\mathrm{domdimEnd}_B(N)\}$.

因此

$$\mathrm{Grigdim}(A\times B)=\min\{\mathrm{Grigdim}\ A,\mathrm{Grigdim}B\}.$$

(2)根据[28,命题 2.6]可知,$M\otimes_k N$ 是 $A\otimes_k B$-mod 中的 Gorenstein 投射模. 由于 $A\in\mathrm{add}M$ 和 $B\in\mathrm{add}N$,我们可得 $A\otimes_k B\in\mathrm{add}(M\otimes_k N)$. 这意味着 $M\otimes_k N$ 是 $A\otimes_k B$-mod 中的 Gorenstein 投射生成子.

由于域 k 作为 k-代数是完备的,我们有

$$\mathrm{End}_{A\otimes_k B}(M\otimes_k N)\cong\mathrm{End}_A(M)\otimes_k\mathrm{End}_B(N),$$

考虑复形$(*)$和$(**)$的张量积. 则根据

$$\mathrm{Hom}_A(M,I^i)\in\mathrm{addD}M,\mathrm{Hom}_B(N,J^i)\in\mathrm{addD}N.$$

我们有

$$(\mathrm{Hom}_A(M,I^t)\otimes_k \mathrm{End}_B(N))\oplus(\mathrm{End}_A(M)\otimes_k \mathrm{Hom}_B(N,J^t))\oplus$$
$$(\oplus_{i=0}^{t-1}(\mathrm{Hom}_A(M,I^i)\otimes_k \mathrm{Hom}_B(N,J^{t-1-i})))\in \mathrm{addD}(M\otimes_k N).$$

因此

$$\mathrm{D}(M\otimes_k N)\text{-domdimEnd}_{A\otimes_k B}(M\otimes_k N)=\min\{\mathrm{D}M\text{-domdimEnd}_A(M),\mathrm{D}N\text{-domdimEnd}_B(N)\}.$$

从而,我们可得

$$\mathrm{Grigdim}(A\otimes_k B)\geqslant\min\{\mathrm{Grigdim}\,A,\mathrm{Grigdim}B\}.$$

(3)用 F:A-mod→B-mod 表示 Morita 等价函子. 我们首先证明 $F(M)$是 B-mod 中的投射生成子. 设

$$(P^{\cdot},d)=\cdots\to P^{-1}\xrightarrow{d^{-1}}P^0\xrightarrow{d^0}P^1\xrightarrow{d^1}P^2\to\cdots$$

是投射 A-模的完备投射分解,满足 $M\cong\mathrm{Im}\,d^0$. 应用函子 F,我们可得 B-模的正合列 $F(P^{\cdot})$

$$\cdots\to F(P^{-1})\xrightarrow{F(d^{-1})}F(P^0)\xrightarrow{F(d^0)}F(P^1)\xrightarrow{F(d^1)}F(P^2)\to\cdots$$

使得 $F(M)\cong\mathrm{Im}\,F(d^0)$. 而且对于任意投射 B-模 Q,由

$$\mathrm{Hom}_B(F(P^{\cdot}),Q)\cong\mathrm{Hom}_A(P^{\cdot},F^{-1}(Q))$$

我们可得 $F(P^{\cdot})$是投射 B-模的完备投射分解. 因此,$F(M)$是 Gorenstein 投射 B-模. 此外,由 $A\in\mathrm{add}M$ 可知 $B\in\mathrm{add}\,F(M)$. 故 $F(M)$是 B-mod 中的 Gorenstein 投射生成子.

因为 F 是 Morita 等价函子,所以有同构

$$\mathrm{Ext}_B^i(F(M),F(M))\cong\mathrm{Ext}_A^i(M,M),$$

由引理 1.3,我们可得 $\mathrm{Grigdim}A=\mathrm{Grigdim}B$.

(4)设 G:A-$\underline{\mathrm{Gproj}}$→$B$-$\underline{\mathrm{Gproj}}$ 是稳定等价. 则我们有:$G(M)\oplus B$ 是 B-mod 中的 Gorenstein 投射生成子. 由

$$\mathrm{Ext}_B^i(G(M)\oplus B,G(M)\oplus B)\cong\mathrm{Ext}_B^i(G(M),G(M))\cong\mathrm{Ext}_A^i(M,M),$$

可知 $\mathrm{rd}_A M=\mathrm{rd}_B(G(M)\oplus B)$. 根据引理 1.3,我们可得 $\mathrm{Grigdim}A=\mathrm{Grigdim}B$.

(5)如果 A 和 B 导出等价,根据[18,推论 5.5],可知 A-$\underline{\mathrm{Gproj}}$ 和 B-$\underline{\mathrm{Gproj}}$ 是稳定等价的. 因此由(4)可得 $\mathrm{Grigdim}A=\mathrm{Grigdim}B$.

1.3 粘合的不变量

在本小节中,我们以粘合为主要工具,比较代数的 Gorenstein 投射刚性维数.

给定三角范畴 $\mathcal{D}$,$\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$. 若存在如下三角函子的图:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[r, "\mathrm{i}"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right=60, "\mathrm{q}"'] \arrow[l, bend left=60, "\mathrm{p}"] \arrow[r, "\mathrm{e}"] & \mathcal{X} \arrow[l, bend right=60, "\mathrm{l}"'] \arrow[l, bend left=60, "\mathrm{r}"]
\end{tikzcd}$$

使得

(1)(q,i),(i,p),(l,e)和(e,r)都是伴随对.

(2)i,l 和 r 是满忠实的.

(3)ei=0.

(4)对任意的 $Z\in\mathcal{D}$,单位和余单位生成好三角:$\mathrm{le}(Z)\to Z\to\mathrm{iq}(Z)\to$和 $\mathrm{ip}(Z)\to Z\to\mathrm{re}(Z)\to$.

则称 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的一个粘合[19].

由[29-30]可得($\mathcal{Y}$,$\mathcal{D}$,$\mathcal{X}$)的阶梯是三角范畴和三角函子构成的有限或无限图,见下页.

使得任意 3 个连续的行构成一个三角范畴的粘合(粘合可以重复).阶梯($\mathcal{Y}$,$\mathcal{D}$,$\mathcal{X}$)的高度是其中粘合的个数.

定理 1.5　假设有代数 A,B 和 C 的粘合:

则以下叙述成立.

(1)若(*)左高度为 2,则

$$\mathrm{Grigdim}A\geqslant\max\{\mathrm{Grigdim}C,\mathrm{Grigdim}B\}.$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\vdots & & \vdots \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "\mathrm{i}"] \arrow[r, bend left=80, "\mathrm{q}^{!}"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend right=40, "\mathrm{q}"'] \arrow[l, bend left=40, "\mathrm{p}"] \arrow[r, "\mathrm{e}"] \arrow[r, bend left=80, "\mathrm{l}^{!}"] \arrow[r, bend right=80, "\mathrm{r}^{!}"'] & \mathcal{X} \arrow[l, bend right=40, "\mathrm{l}"'] \arrow[l, bend left=40, "\mathrm{r}"] \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\underline{B\text{-Gproj}} \arrow[r, "\mathrm{i}"] & \underline{A\text{-Gproj}} \arrow[l, bend right=40, "\mathrm{q}"'] \arrow[l, bend left=40, "\mathrm{p}"] \arrow[r, "\mathrm{e}"] & \underline{C\text{-Gproj}} \arrow[l, bend right=40, "\mathrm{l}"'] \arrow[l, bend left=40, "\mathrm{r}"]
\end{tikzcd}
\quad (*).
$$

(2)若(*)右高度为 2,则

$$\mathrm{Grigdim}A \geqslant \max\{\mathrm{Grigdim}C, \mathrm{Grigdim}B\}.$$

证明　首先证明(1). 令 G 为 C-mod 中 Gorenstein 投射生成子,使得 $\mathrm{rd}_C G = n-2$. 由于 l 是满忠实且正合的,对于 $1 \leqslant i \leqslant n-2$,存在同构

$$\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{l}(G), \mathrm{l}(G)) \cong \mathrm{Ext}_C^i(G, \mathrm{el}(G)) \cong \mathrm{Ext}_C^i(G, G) = 0.$$

这意味着 $\mathrm{l}(G) \oplus A$ 是 A-mod 的 Gorenstein 投射生成子,使得 $\mathrm{rd}_A(\mathrm{l}(G) \oplus A) \geqslant n-2$,故

$$\mathrm{Grigdim}A \geqslant n.$$

令 E 为 B-mod 中的 Gorenstein 投射生成子,使得 $\mathrm{rd}_B E = n-2$. 由于 i 是满忠实且正合的,对于 $1 \leqslant i \leqslant n-2$,存在同构

$$\mathrm{Ext}_A^i(\mathrm{i}(E), \mathrm{i}(E)) \cong \mathrm{Ext}_B^i(\mathrm{qi}(E), E) \cong \mathrm{Ext}_B^i(E, E) = 0.$$

这意味着 $\mathrm{i}(E) \oplus A$ 是 A-mod 的 Gorenstein 投射生成子,使得 $\mathrm{rd}_A(\mathrm{i}(E) \oplus A) \geqslant n-2$,故

$$\mathrm{Grigdim}A \geqslant n.$$

(2)同理可证.

用 $D(A\text{-Mod})$ 和 $D^b(A\text{-Mod})$ 分别表示 A-Mod 的无界导出范畴和有界导出范畴.

例 3　设 Gorenstein 代数 A, e 和 f 是 A 的幂等元,满足 $fAe = 0$. 令 $N := Ae \otimes_A fA$, $\Lambda_{(0,0)} = \begin{pmatrix} A & N \\ N & A \end{pmatrix}$ 为 Morita context 代数. 则 $\mathrm{Grigdim}\Lambda_{(0,0)} \geqslant \mathrm{Grigdim}A$.

证明　根据[31,例 3.1],存在无界阶梯,则由定理 1.5,结论成立.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\underline{A\text{-Gproj}} \arrow[r, "\mathrm{i}"] & \underline{\Lambda_{(0,0)}\text{-Gproj}} \arrow[l, bend right=40, "\mathrm{q}"'] \arrow[l, bend left=40, "\mathrm{p}"] \arrow[r, "\mathrm{e}"] & \underline{A\text{-Gproj}}. \arrow[l, bend right=40, "\mathrm{l}"'] \arrow[l, bend left=40, "\mathrm{r}"]
\end{tikzcd}
$$

例 4　设 A 为 Gorenstein 代数,$\lambda: A \to B$ 为同调满同态,且诱导出如下粘合:
使得 $j_!$ 可限制到 $D^b(C\text{-Mod})$ 上. 若 $\mathrm{pd}_A B < \infty$,则

$$\mathrm{Grigdim}A \geqslant \max\{\mathrm{Grigdim}C, \mathrm{Grigdim}B\}.$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
D(B\text{-Mod}) \arrow[r, "i_*"] & D(A\text{-Mod}) \arrow[l, bend right=40, "i^*"'] \arrow[l, bend left=40, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & D(C\text{-Mod}), \arrow[l, bend right=40, "j_!"'] \arrow[l, bend left=40, "j_*"]
\end{tikzcd}
$$

证明　根据[31,定理 3.1],有无界阶梯.

$$\begin{tikzcd}
\underline{B\text{-Gproj}} \arrow[r, "i"] & \underline{A\text{-Gproj}} \arrow[l, bend right, "q"'] \arrow[l, bend left, "p"] \arrow[r, "e"] & \underline{C\text{-Gproj}}. \arrow[l, bend right, "l"'] \arrow[l, bend left, "r"]
\end{tikzcd}$$

则由定理 1.5 可得此结论.

[参考文献]

[1] DENNIS R K, IGUSA K. Hochschild homology and the second obstruction for pseudoisotopy[C]//Algebraic K-Theory: Proceedings of a Conference Held at Oberwolfach. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006: 7-58.

[2] LODAY J L. Jean-louis cyclic homology[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[3] HAPPEL D. Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[4] HAPPEL D. Reduction techniques for homological conjectures[J]. Tsukuba journal of mathematics, 1993, 17(1): 115-130.

[5] KELLER B. Invariance of cyclic homology under derived equivalence, Representation theory of algebras[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996.

[6] KELLER B. Derived categories and their uses[J]. Handbook of algebra, 1996, 1: 671-701.

[7] PAN S, XI C. Finiteness of finitistic dimension is invariant under derived equivalences[J]. Journal of algebra, 2009, 322(1): 21-24.

[8] KRAUSE H. Representation type and stable equivalence of Morita type for finite dimensional algebras[J]. Mathematische zeitschrift, 1998, 229: 601-606.

[9] LIU Y, XI C. Constructions of stable equivalences of Morita type for finite dimensional algebras II[J]. Mathematische zeitschrift, 2005, 251: 21-39.

[10] PAN S, ZHOU G. Stable equivalences of Morita type and stable Hochschild cohomology rings[J]. Archiv der mathematik, 2010, 94(6): 511-518.

[11] XI C. Representation dimension and quasi-hereditary algebras[J]. Advances in mathematics, 2002, 168(2): 193-212.

[12] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Mathematische zeitschrift, 1995, 220(1): 611-633.

[13] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable module theory[M]. Providence: American Mathematical Society, 1969.

[14] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative homological algebra: Volume 1[M]. Berlin: Walter de Gruyter, GmbH and CO.KG, 2011.

[15] GAO N, ZHANG P. Gorenstein derived categories[J]. Journal of algebra, 2010, 323(7): 2041-2057.

[16] HAPPEL D. On gorenstein algebras[C]//Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras: Proceedings of the Conference at the University of Bielefeld from May 15-17, 1991, and 7 Survey Articles on Topics of Representation Theory. Birkhäuser Basel, 1991: 389-404.

[17] RICKARD J. Derived equivalence as derived functors[J]. Journal of London mathematics, 1991, 43(2): 37-48.

[18] HU W, PAN S. Stable functors of derived equivalences and Gorenstein projective modules[J]. Mathematische Nachrichten, 2017, 290(10): 1512-1530.

[19] BEILINSON A A, DELIGNE P. Faisceaux pervers, analysis and topology on singular spaces[M]. Paris: France Mathematical Society, 1982.

[20] TADASI NAKAYAMA. On algebras with complete homology[J]. Abhandlungen aus dem mathematischen seminar der universität hamburg, 1958(22): 300-307.

[21] TACHIKAWA H. On dominant dimensions of QF-3 algebras[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1964, 112(2): 249-266.

[22] TACHIKAWA H. Quasi-Frobenius Rings and Generalizations[M]. Springer Lecture Notes in Mathematics. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1973.

[23] MÜLLER B J. The classification of algebras by dominant dimension[J]. Canadian journal of mathematics, 1968, 20: 398-409.

[24] YAMAGATA K. Frobenius algebras[M]. North-Holland, Amsterdam: Elsevier, 1996: 841-887.

[25] CHEN H,XI C. Dominant dimensions,derived equivalences and tilting modules[J]. Israel journal of mathematics,2016,215:349-395.

[26] CHEN H,FANG M,KERNER O,et al. Rigidity dimension of algebras[C]//Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge:Cambridge University Press,2021,170(2):417-443.

[27] GAO N,KOENIG S. Grade,dominant dimension and Gorenstein algebras[J]. Journal of algebra,2015,427:118-141.

[28] HU W,LUO X H,XIONG B L,et al. Gorenstein projective bimodules via monomorphism categories and filtration categories[J]. Journal of pure and applied algebra,2019,223(3):1014-1039.

[29] BEILINSON A A,GINSBURG V A,SCHECHTMAN V V. Koszul duality[J]. Journal of geometry and physics,1988,5(3):317-350.

[30] HÜGEL L A,KOENIG S,LIU Q,et al. Ladders and simplicity of derived module categories[J]. Journal of algebra,2017,472:15-66.

[31] GAO N,XU X. Homological epimorphisms,compactly generated t-structures and Gorenstein-projective modules[J]. Chinese annals of mathematics(Series B),2018,39:47-58.

[责任编辑:陆炳新]