doi:10.3969/j.issn.1001-4616.2025.01.002

分数布朗运动情形下利率随机的双标的型两值期权定价

黄凤云[1],刘国祥[2],王成冬[2],章新婕[2]

(1.广西师范大学出版社,广西 桂林 541004)
(2.南京师范大学数学科学学院,江苏 南京 210023)

[**摘要**] 主要利用不同计价单位的拟鞅方法,推导随机利率服从 Vasicek 模型,两种标的资产分别服从具有一定相关性的标准分数布朗运动的双标的型两值期权的定价公式.

[**关键词**] 分数布朗运动,随机利率,拟鞅方法,改变计价单位

[**中图分类号**]F830.9 [**文献标志码**]A [**文章编号**]1001-4616(2025)01-0006-07

Pricing of Binary Options with Two Underlyings Under Stochastic Interest Rate About Fractional Brownian Motion

Huang Fengyun[1],Liu Guoxiang[2],Wang Chengdong[2],Zhang Xinjie[2]

(1.Guangxi Normal University Press,Guilin 541004,China)
(2.School of Mathematical Sciences,Nanjing Normal University,Nanjing 210023,China)

Abstract:In this paper,the quasi-martingale method with different pricing units is used to derive the pricing formulas of the two types of binary two-value options with the random interest rate obeying Vasicek model and the two types of underlying assets obeying the standard fractional Brownian motion with certain correlation.

Key words:fractional Brownian motion,random interest rate,quasi-martingale method,change valuation unit

关于期权定价的最早研究是法国数学家 Bachelier[1] 基于股票价格服从无漂移的布朗运动的假设下推导出了期权定价公式,开启了期权定价研究的先河. 然而布朗运动的性质却无法满足金融市场中股票价格非负的特点,因此 Osborne(1959)[2] 提出股票价格序列是服从对数正态分布的,由此保证了股票价格的非负性. 随后到 1973 年 Black 和 Scholes 假设股票价格服从几何布朗运动,提出了著名的 B-S[3] 模型. Merton(1973)[4] 考虑到实际金融市场中的利率不是恒定不变的,便在 B-S 公式中引入了随机利率模型,并且 Merton 还提出股票价格是存在跳跃的,并用 Possion 过程来描述这一特性.

随着期权定价模型研究过程的深入,人们渐渐发现金融市场中经典股票价格假设的不适性,于是人们提出了分形资本市场理论. 文[5-6]首次提出了分形市场假说(FMH),研究了用分数布朗运动来描述股票价格变化过程;Laurent 等[7] 和 Decreusefond[8] 研究了关于分数布朗运动的理论,给出了分数布朗运动的随机积分、随机微分、分数 Girsanov 定理以及分数伊藤公式等,为后续期权定价模型的研究做出了巨大贡献. 文[9]将分数布朗运动的相关随机分析知识应用到期权定价中,给出了股票价格服从分数布朗运动条件下的定价公式.

虽然国内外学者基于分形市场假说开展的期权定价研究已有很多,但是针对双标的型两值期权的定价却少有研究,故本文将研究分形市场上随机利率模型下双标的型的两值期权定价公式.

收稿日期:2024-05-16.
基金项目:国家社会科学基金项目(21BTJ044).
通讯作者:刘国祥,教授,研究方向:金融数学,金融统计. E-mail:gxliu63@163.com

1 预备知识

定义 1 记 $S_1(T)$,$S_2(T)$ 分别表示标的资产 1,标的资产 2 在到期日 T 的价格,K_1 和 K_2 表示标的资产 1,2 的交割价格.

双标的型现金或无看涨期权(Bivariate Cash-or-nothing call,BCNC)到期收益为:

$$BCNC_T=\begin{cases}X, & \text{if } S_1(T)>K_1, S_2(T)>K_2,\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

资产或无看涨期权(Bivariate Asset-or-nothing call,BANC)在到期日收益为:

$$BANC_T=\begin{cases}S_1(T), & \text{if } S_1(T)>K_1, S_2(T)>K_2,\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

定理 1 分数布朗运动 $W_t^{\mathrm{H}}, t\in[0,T]$,是拟鞅.

定理 2 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 是带域流概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0})$上的适随机过程,满足如下微分方程

$$\mathrm{d}X_t=\mu X(t)\mathrm{d}t+\sigma X(t)\mathrm{d}W_t^{\mathrm{H}};X(0)=x>0,$$

其中 x,μ,σ 为常数. 则 $\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=\mu X(t)+\sigma X(t)\diamond W^{\mathrm{H}}(t)$,由 Wick 积分可以解得:

$$X(t)=x\exp^{\diamond}\{\mu t+\sigma W^{\mathrm{H}}(t)\}=x\exp\left\{\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^{2H}+\sigma W^{\mathrm{H}}(t)\right\}.$$

定理 3 设$(X_t)_{t\geqslant 0}$是带域流概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0})$上的随机过程,$W^{\mathrm{H}}(t)$为该概率空间上的标准分数布朗运动,$\frac{1}{2}<H<1$,$f\in L^2([0,T])$为确定的函数,设 $\|f\|_t$ 是连续可微的函数,$t\in[0,T]$. 记

$$X(t)=X(0)+\int_0^t g(s)\mathrm{d}s+\int_0^t f(s)\mathrm{d}W^{\mathrm{H}}(s),\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

其中 $X(0)$ 是常数,g 为确定的函数且满足 $\int_0^T|g(s)|\mathrm{d}s<\infty$. 设函数 $F(t,x)$关于 t 连续可微,关于 x 二次连续可微,则

$$F(t,X_t)=F(0,X_0)+\int_0^t\frac{\partial F(s,X_s)}{\partial s}\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\partial F(s,X_s)}{\partial x}\mathrm{d}X_s+\frac{1}{2}\int_0^t\frac{\partial^2F(s,X_s)}{\partial x^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\|f\|_s^2\right]\mathrm{d}s,$$

其中 $\|f\|_t^2=\langle f,f\rangle_t=\int_0^t\int_0^t\phi(u,v)f_uf_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,$\phi(s,t)=2H(2H-1)|t-s|^{2H-2}$.

注:当 $f_t=\sigma$ 时,$\|\sigma\|_t^2=\sigma^2t^{2H}$.

引理 1 $\forall\, 0<t<T,\lambda\in C$,有

$$\tilde{E}_t[\mathrm{e}^{\lambda W^{\mathrm{H}}(T)}]=\mathrm{e}^{\lambda W^{\mathrm{H}}(t)+\frac{\lambda^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}.$$

定理 4(计价单位转换定理) 设 $X(t)$ 是未定权益,$N(t)$ 是计价单位,Q 是相应于 $N(t)$ 的等价鞅测度,即价格体系$\frac{X(t)}{N(t)}$在 Q 下是鞅,即$\frac{X(t)}{N(t)}=\tilde{E}_t^Q\left[\frac{X(T)}{N(T)}\right]$.

对任意计价单位 $U(t)>0$,存在与 Q 等价的鞅测度 Q^U,使得新的价格体系$\frac{X(t)}{N(t)}$在测度 Q^U 下是鞅,即

$$\frac{X(t)}{U(t)}=\tilde{E}_t^{Q^U}\left[\frac{X(T)}{U(T)}\right],$$

且 Radon-Nikodym 导数为:

$$\frac{\mathrm{d}Q^U}{\mathrm{d}Q}=\frac{U_TN_0}{U_0N_T}.$$

2 随机利率下双标的型两值期权定价

2.1 模型假设与建立

我们考虑连续时间的金融市场,且存在两种可连续交易的资产,一种是无风险资产(如债券),其价格

过程 $M(t)$ 满足如下微分方程:

$$dM(t)= e^{-\int_t^T r(u)du} M(t)dt.$$

另一种是风险资产(如股票),在风险中性概率测度 P 下,t 时刻,双标的资产价格过程分别为 $S_1(t)$,$S_2(t)$,随机利率过程 $r(t)$ 满足如下微分方程:

$$dS_1(t)=\mu_1(t)S_1(t)dt+\sigma_1 S_1(t)dW_1^H(t), \tag{1}$$

$$dS_2(t)=\mu_2(t)S_2(t)dt+\sigma_2 S_2(t)dW_2^H(t), \tag{2}$$

$$dr(t)=a(b-r(t))dt+\sigma_r dB_r^H(t), \tag{3}$$

其中 $\{W_1^H(t),t\geqslant 0\}$,$\{W_2^H(t),t\geqslant 0\}$,$\{B^H(t),t\geqslant 0\}$ 是完备的概率空间$(\Omega,\mathcal{F}^H,P)$上的分数布朗运动,$\frac{1}{2}<H<1$,并且

$$cov(dW_1^H(t),dW_2^H(t))=\rho(dt^{2H}), \tag{4}$$

$$cov(dW_1^H(t),dB^H(t))=\rho_1(dt^{2H}), \tag{5}$$

$$cov(dW_2^H(t),dB^H(t))=\rho_2(dt^{2H}). \tag{6}$$

2.2 模型的求解

本文将分别以零息债券,风险资产价格作为计价单位来对现金或无,资产或无两值期权的定价公式进行推导,所以我们要先推导出零息债券的定价公式.

2.2.1 零息债券定价

定理 5　设到期日为 T 的零息债券在时刻 t,$t\in[0,T]$ 的价格为 $P(t,T)$,并且持有人在到期日获得的收益为 1,即 $P(T,T)=1$. 那么该零息债券在 t 时刻的定价公式为

$$P(t,T)=e^{-r(t)B(t,T)-A(t,T)}, \tag{7}$$

其中 $A(t,T)=b(T-t)-bB(T-t)-H\int_t^T \sigma_r^2 s^{2H-1}B^2(s,T)ds$;$B(t,T)=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$.

证明　根据伊藤公式求解微分方程(3)得

$$r(u)=e^{-a(u-t)}r(t)+b(1-e^{-a(u-t)})+\sigma_r\int_t^u e^{-a(u-s)}dB_r^H(s);u\in[t,T].$$

从而有

$$\int_t^T r(u)du=r(t)B(t,T)+b(T-t)-bB(t,T)+\sigma_r\int_t^T B(s,T)dB_r^H(s).$$

其中 $B(t,T)=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$,在概率空间$(\Omega,\mathcal{F}_t^H,P)$中,根据无套利原理,到期日为 T 的零息债券在 t 时刻的价格 $P(t,T)$ 为

$$P(t,T)=\tilde{E}_t\left[e^{-\int_t^T r(u)du}P(T,T)\right]=\exp\{-r(t)B(t,T)-b(T-t)+bB(t,T)\}\tilde{E}_t\left[\exp\left\{-\sigma_r\int_t^T B(s,T)dB_r^H(s)\right\}\right],$$

而 $E\left[\int_t^T B(s,T)dB_r^H(s)\right]=0$, $\mathrm{Var}\left[\int_t^T B(s,T)dB_r^H(s)\right]=\int_t^T\int_0^s B^2(v,T)\phi(s,v)dvds$, 因此 $P(t,T)=e^{-r(t)B(t,T)-A(t,T)}$,其中 $A(t,T)=b(T-t)-bB(T-t)-\frac{\sigma_r^2}{2}\int_t^T\int_0^s B^2(v,T)\phi(s,v)dvds$.

2.2.2 双标的型两值期权模型求解

定理 6　到期日为 T,t 时刻标的资产价格分别为 $S_1(t)$,$S_2(t)$,交割价格分别为 K_1,K_2 的双标的型现金或无看涨期权(BCNC)在随机利率,标的资产价格满足微分方程(1)(2)(3)的环境下,在 t 时刻的定价模型为

$$BCNC(t)=XP(t,T)N(d_1,d_2,\theta). \tag{8}$$

其中

$$D(t)= e^{\int_0^t r(u)du},\ d_1=\frac{\ln\left(\frac{Z_1(t)}{K_1}\right)-m_1}{n_1},d_2=\frac{\ln\left(\frac{Z_2(t)}{K_2}\right)-m_2}{n_2},\theta=\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2),$$

$$N(d_1,d_2,\theta)=\int_{-\infty}^{d_1}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{e}^{\frac{y_1^2-2\theta y_1y_2+y_2^2}{2(1-\theta^2)}}\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1,$$

$$m_i=-\frac{1}{2}\int_t^T\int_0^s(\sigma_rB(v,T)+\sigma_i\rho_i)^2\phi(s,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T^{2H}-t^{2H}),$$

$$n_i^2=\int_t^T\int_0^s(\sigma_rB(v,T)+\sigma_i\rho_i)^2\phi(s,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T-t)^{2H},\quad i=1,2.$$

证明 根据风险中性定价原理,到期日为 T 的双标的型现金或者无两值看涨期权(BCNC)在 $t\in[0,T]$时刻的定价公式为:

$$BCNC(t)=\tilde{E}_t^p\left[\mathrm{e}^{-\int_t^Tr(u)\mathrm{d}u}XI_{\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}}\right]=\tilde{E}_t^p\left[\frac{D(t)}{D(T)}XI_{\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}}\right].$$

其中 $D(t)=\mathrm{e}^{\int_0^tr(u)\mathrm{d}u}$.

引入一个新的概率测度 Q,使得在该概率测度下以零息债券为计价单位的资产价值 $\frac{S(t)}{P(t,T)}$,$0<t<T$ 是拟鞅,并且 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\frac{D(t)}{D(T)P(t,T)}$,那么

$$\begin{aligned}BCNC(t)&=\tilde{E}_t^P\left[\frac{D(t)}{D(T)}XI_{\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}}\right]=\\&XP(t,T)\tilde{E}_t^Q[I_{\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}}]=\\&XP(t,T)Q\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}=\\&XP(t,T)Q\left\{\frac{S_1(T)}{P(T,T)}>K_1,\frac{S_2(T)}{P(T,T)}>K_2\right\},\end{aligned}\tag{9}$$

令 $Z_i(t)=\frac{S_i(t)}{P(t,T)}$,$i=1,2$,则式(9)为

$$BCNC(t)=XP(t,T)Q\{Z_1(T)>K_1,Z_2(T)>K_2\}.\tag{10}$$

因此接下来需要确定 $Z_1(T)$,$Z_2(T)$ 的联合分布. 由伊藤乘积公式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Z_i(t)&=S_i(t)\left(-\frac{1}{P^2(t,T)}\right)\mathrm{d}P(t,T)+\frac{1}{P(t,T)}\mathrm{d}S_i(t)+[D_t^{\mathrm{H}}Z_i(t)\sigma_rB(t,T)+D_t^{\mathrm{H}}Z_i(t)\sigma_i]\mathrm{d}t=\\&(Z_i(t)[r(t)B'(t,T)+A'(t,T)-H\sigma_r^2B^2(t,T)+aB(t,T)(b-r(t))]+[D_t^{\mathrm{H}}Z_i(t)\sigma_rB(t,T)+\\&D_t^{\mathrm{H}}Z_i(t)\sigma_i])\mathrm{d}t+\sigma_rB(t,T)Z_i(t)\mathrm{d}B_r^{\mathrm{H}}(t)+Z_i(t)\sigma_i\mathrm{d}W_i^{\mathrm{H}}(t),\end{aligned}$$

又由于 $Z_1(T)$,$Z_2(T)$在概率测度 Q 下是拟鞅,因此根据 Girsanov 定理,

$$\mathrm{d}Z_i(t)=\sigma_rB(t,T)Z_i(t)\mathrm{d}B_r^{\mathrm{H}}(t)^Q+Z_i(t)\sigma_i\mathrm{d}W_i^{\mathrm{H}}(t)^Q,i=1,2\tag{11}$$

$(W^{\mathrm{H}}(t)^Q)_{t\geqslant0}$与$(B_r^{\mathrm{H}}(t)^Q)_{t\geqslant0}$是测度 Q 下的分数布朗运动. 设存在一个分数布朗运动$(W^{\mathrm{H}}(t))_{t\geqslant0}$与$(B_r^{\mathrm{H}}(t)^Q)_{t\geqslant0}$独立,则根据式(5),(6)得

$$W_i^{\mathrm{H}}(t)^Q=\rho_iB_r^{\mathrm{H}}(t)^Q+\sqrt{1-\rho_i^2}W^{\mathrm{H}}(t),i=1,2,\tag{12}$$

代入式(11)得

$$\frac{\mathrm{d}Z_i(t)}{Z_i(t)}=(\sigma_rB(t,T)+\sigma_i\rho_i)\mathrm{d}B_r^{\mathrm{H}}(t)^Q+\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}\mathrm{d}W^{\mathrm{H}}(t),\quad i=1,2\tag{13}$$

根据伊藤公式求解得 $\ln(Z_i(T))=\ln(Z_i(t))+Y_i-m_i$,其中,

$$m_i=-\frac{1}{2}\int_t^T\int_0^s(\sigma_rB(v,T)+\sigma_i\rho_i)^2\phi(s,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T^{2H}-t^{2H}),$$

$$Y_i=\int_t^T(\sigma_rB(s,T)+\sigma_i\rho_i)\mathrm{d}B_r^H(s)^Q+\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}(W^H(T)-W^H(t)),$$

并且 $E[Y_i]=0$,$Var[Y_i]=\int_t^T\int_0^s(\sigma_rB(v,T)+\sigma_i\rho_i^2)\phi(s,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T-t)^{2H}\triangleq n_i^2$,$i=1,2$. 所以

$$Q\{Z_1(T)>K_1,Z_2(T)>K_2\}=Q\{\ln(Z_1(T))>\ln(K_1),\ln(Z_2(T))>\ln(K_2)\}=$$

$$Q\left\{Y_1>\ln\left(\frac{K_1}{Z_1(t)}\right)+m_1,Y_2>\ln\left(\frac{K_2}{Z_2(t)}\right)+m_2\right\}=$$

$$Q\left\{\frac{Y_1}{n_1}>\frac{\ln\left(\frac{K_1}{Z_1(t)}\right)+m_1}{n_1},\frac{Y_2}{n_2}>\frac{\ln\left(\frac{K_2}{Z_2(t)}\right)+m_2}{n_2}\right\}=$$

$$N(d_1,d_2,\theta).\tag{14}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{Z_1(t)}{K_1}\right)-m_1}{n_1},d_2=\frac{\ln\left(\frac{Z_2(t)}{K_2}\right)-m_2}{n_2},\theta=\mathrm{Cov}(Y_1,Y_2),$$

$$N(d_1,d_2,\theta)=\int_{-\infty}^{d_1}\int_{-\infty}^{d_2}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}}\mathrm{e}^{\frac{y_1^2-2\theta y_1y_2+y_2^2}{2(1-\theta^2)}}\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_1.$$

定理7 到期日为 T,t 时刻标的资产价格分别为 $S_1(t),S_2(t)$,交割价格分别为 K_1,K_2 的双标的型资产或无看涨期权(BANC)在随机利率、标的资产价格满足微分方程(1)、(2)、(3)的环境下,在 t 时刻的定价模型为

$$BANC(t)=S_1(t)N\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1},\frac{\alpha_2}{\beta_2},\theta'\right),\tag{15}$$

其中

$$\xi_i=\frac{\int_t^T[\sigma_rB(s,T)+\rho_i\sigma_i]\mathrm{d}B_r^H(s)^{Q'}+\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}(\hat{W}_i^H(T)^{Q'}-\hat{W}^H(t)^{Q'})}{\beta_i}.$$

$$\alpha_i=\ln\frac{1}{Z_i(t)}-\ln\frac{1}{K_i}-\int_t^T\int_0^s(\sigma_rB(v,T)+\sigma_i\rho_i)^2\phi(s,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s-\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T^{2H}-t^{2H}),$$

$$\beta_i^2=\int_t^T\int_0^s(\sigma_rB(v,T)+\rho_i\sigma_i)^2\phi(s,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T-t)^{2H},\quad i=1,2,\theta'=\mathrm{Cov}(\xi_1,\xi_2).$$

证明 由分数风险中性定价原理知,到期日为 T 的双标的型资产或无两值看涨期权(BANC)在 $t\in[0,T]$ 时刻的定价公式为

$$BANC(t)=\tilde{E}_t\left[\mathrm{e}^{\int_t^Tr(u)\mathrm{d}u}S_1(T)I_{\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}}\right]=\tilde{E}_t\left[\frac{D(t)}{D(T)}S_1(T)I_{\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}}\right],\tag{16}$$

其中 $D(t)=\mathrm{e}^{\int_0^tr(u)\mathrm{d}u}$. 现在我们将以标的资产价格 $S_1(t)$ 作为计价单位,定义一个新的概率测度 Q':

$$\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}P}=\frac{S_1(T)D(t)}{S_1(t)D(T)},$$

并且可以证明 $\frac{P(t,T)}{S_1(t)},\frac{P(t,T)}{S_2(t)}$ 是关于测度 Q' 的拟鞅. 因此由测度变换,式(16)可写为

$$BANC(t)=\tilde{E}_t^{Q'}[S_1(t)I_{\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}}]=S_1(t)\tilde{E}_t^{Q'}[I_{\{S_1(T)>K_1,S_2(T)>K_2\}}].$$

注意到 $\{S_i(T)>K_i\}\Leftrightarrow\left\{\frac{1}{S_i(T)}<\frac{1}{K_i}\right\}\Leftrightarrow\left\{\frac{P(T,T)}{S_i(T)}<\frac{1}{K_i}\right\},i=1,2$,因此我们有

$$BANC(t)=S_1(t)\tilde{E}_t^{Q'}[I_{\left\{\frac{P(T,T)}{S_1(T)}<\frac{1}{K_1},\frac{P(T,T)}{S_2(T)}<\frac{1}{K_2}\right\}}]=S_1(t)Q'\left\{\frac{P(T,T)}{S_1(T)}<\frac{1}{K_1},\frac{P(T,T)}{S_2(T)}<\frac{1}{K_2}\right\}.$$

现只需要确定 $\frac{P(T,T)}{S_i(T)}$ 在测度 Q' 下的分布即可. 令 $\frac{1}{Z_i(t)}=\frac{P(t,T)}{S_i(t)}$,则

$$\mathrm{d}\frac{1}{Z_i(t)}=-\frac{1}{Z_i(t)^2}\mathrm{d}Z_i(t)+\frac{1}{Z_i(t)^3}(\mathrm{d}Z_i(t))^2=-\frac{1}{Z_i(t)}[\sigma_rB(t,T)\mathrm{d}B_r^{\mathrm{H}}(t)+\sigma_i\mathrm{d}W_i^{\mathrm{H}}(t)]+[\cdots]\mathrm{d}t,$$

由于 $\frac{1}{Z_i(t)}$ 在概率测度 Q' 下是拟鞅,由 Girsanov 定理,

$$\mathrm{d}\frac{1}{Z_i(t)}=-\frac{1}{Z_i(t)}[\sigma_r B(t,T)\mathrm{d}B_r^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}+\sigma_i \mathrm{d}W_i^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}],$$

其中 $B^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}$，$W_i^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}$ 是测度 Q' 下的标准分数布朗运动.

设 $\hat{W}_i^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}$ 是关于 Q' 的与 $B_r^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}$ 独立的分数布朗运动，那么

$$W_i^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}=\rho_i B_r^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}+\sqrt{1-\rho_i^2}\,\hat{W}_i^{\mathrm{H}}(t)^{Q'},$$

从而 $\mathrm{d}\frac{1}{Z_i(t)}=-\frac{1}{Z_i(t)}[(\sigma_r B(s,T)+\sigma_i\rho_i)\mathrm{d}B_r^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}+\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}\,\mathrm{d}\hat{W}^{\mathrm{H}}(t)^{Q'}]$，因此

$$\ln\frac{1}{Z_i(T)}=\ln\frac{1}{Z_i(t)}-\int_t^T(\sigma_r B(s,T)+\sigma_i\rho_i)\mathrm{d}B_r^H(s)^{Q'}-\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}(\hat{W}^H(T)-\hat{W}^H(t))-$$
$$\int_t^T\int_0^s(\sigma_r B(v,T)+\sigma_i\rho_i)^2\mathrm{d}v\mathrm{d}s-\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T^{2H}-t^{2H}),$$

所以 $\left\{\frac{P(T,T)}{S_i(T)}<\frac{1}{K_i}\right\}\Leftrightarrow\left\{\ln\frac{P(T,T)}{S_i(T)}<\ln\frac{1}{K_i}\right\}\Leftrightarrow\left\{\ln\frac{1}{Z_i(T)}<\ln\frac{1}{K_i}\right\}\Leftrightarrow$

$$\left\{\ln\frac{1}{Z_i(t)}-\int_t^T(\sigma_r B(s,T)+\sigma_i\rho_i)\mathrm{d}B_r^H(s)^{Q'}-\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}(\hat{W}^H(T)-\hat{W}^H(t))-\right.$$
$$\left.\int_t^T\int_0^s(\sigma_r B(v,T)+\sigma_i\rho_i)^2\mathrm{d}v\mathrm{d}s-\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T^{2H}-t^{2H})<\ln\frac{1}{K_i}\right\}\Leftrightarrow$$
$$\left\{\int_t^T[\sigma_r B(s,T)+\rho_i\sigma_i]\mathrm{d}B_r^H(s)^{Q'}+\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}(\hat{W}_i^H(T)^{Q'}-\hat{W}^H(t)^{Q'})>\alpha_i\right\},$$

其中

$$\alpha_i=\ln\frac{1}{Z_i(t)}-\ln\frac{1}{K_i}-\int_t^T\int_0^s(\sigma_r B(v,T)+\sigma_i\rho_i)^2\phi(s,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s-\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T^{2H}-t^{2H}).$$

注意到

$$\int_t^T[\sigma_r B(s,T)+\rho_i\sigma_i]\mathrm{d}B_r^H(s)^{Q'}+\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}(\hat{W}_i^H(T)^{Q'}-\hat{W}^H(t)^{Q'})\sim N(0,\beta_i^2),$$

其中 $\beta_i^2=\int_t^T\int_0^s(\sigma_r B(v,T)^2+\rho_i\sigma_i)^2\phi(s,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s+\sigma_i^2(1-\rho_i^2)(T-t)^{2H}$，令

$$\xi_i=\frac{\int_t^T[\sigma_r B(s,T)+\rho_i\sigma_i]\mathrm{d}B_r^H(s)^{Q'}+\sigma_i\sqrt{1-\rho_i^2}(\hat{W}_i^H(T)^{Q'}-\hat{W}^H(t)^{Q'})}{\beta_i},$$

因此 $\xi_i\sim N(0,1)$，所以

$$BANC(t)=S_1(t)Q'\left\{\frac{P(T,T)}{S_1(T)}<\frac{1}{K_1},\frac{P(T,T)}{S_2(T)}<\frac{1}{K_2}\right\}=S_1(t)Q'\left\{\xi_1<\frac{\alpha_1}{\beta_1},\xi_2<\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}=S_1(t)N\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1},\frac{\alpha_2}{\beta_2},\theta'\right),$$

其中 $\theta'=\mathrm{Cov}(\xi_1,\xi_2)$.

3 结论

本文结合实际金融市场规律，在分形理论基础上，引入随机利率模型，在已有单个标的资产的研究基础上，我们增加了一个与之具有一定相关性的标的资产，构成双标的资产的两值期权模型. 假设两种标的资产价格分别服从具有相关性的分数布朗运动，并且采用拟鞅，改变计价单位的方法研究推导了具有相关性的双标的型两值期权的定价公式.

［参考文献］

[1] BACHELIER L. Theory of Speculation(translation of 1900 French edition), in Cootner[M]. The Random Character of Stock Market Price. Cambridge: MIT Press, 1964: 17-78.

[2] OSBORNE M F M. Brownian motion in the stock market[J]. Operations research, 1959, 7(2): 145-173.

[3] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of political economy, 1973, 81(3): 637-654.

[4] MERTON R C. Theory of rational option pricing[J]. The bell journal of economics and management science,1973,4(1):141-183.
[5] EDGAR E P. A chaotic attractor for the S&p 500[J]. Financial analysts journal,1991,47(2):55-81.
[6] PETERS E E. Fractal market analysis:applying chaos theory to investment and economics[J]. Chaos theory,1994,34(2):343-345.
[7] LAURENT D,ALI S Ü. Fractional brownian motion:theory and applications[J]. ESAIM:proceedings,1998,5:75-86.
[8] DECREUSEFOND L,ÜSTÜNEL A S. Stochastic analysis of the fractional brownian motion[J]. Potential analysis,1999,10(2):177-214.
[9] HU Y Z,ΦKSENDAL B. Fractional white noise calculus and applications to finance[J]. Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics,2003,6(1):1-32.

[责任编辑:陆炳新]