

整数集的一个分拆

房剑平,张静

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京 210097)

[摘要] 对给定的整数 a, b , 任取 $n \in \mathbf{Z}$. 整数集 \mathbf{Z} 是否存在分拆 A_1, A_2, A_3 , 使得 $n, n+a, n+b$ 中的任意两个都不同在一个集合 $A_i (i=1, 2, 3)$ 中? 本文给出了分拆 A_1, A_2, A_3 存在的一个充要条件.

[关键词] 自然数集, 整数集, 等价类, 分拆

[中图分类号] O144; [文献标识码] A; [文章编号] 1001-4616(2001)01-0003-03

0 引言

Alladi K., Erdős P. And Hoggatt V. E^[1], 讨论了自然数集 \mathbf{N} 的 (a, b, k) 型分拆. Evans J.^[2], Shan Zun and Zhu Ping-Tian^[3], 先后对自然数集 \mathbf{N} 的这种分拆进行了进一步的研究. 本文将对整数集 \mathbf{Z} 讨论它的一种分拆.

设 \mathbf{Z} 是整数集, $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是 \mathbf{Z} 的非空子集 $(m > 1)$. 若 $\mathbf{Z} = \bigcup_{i=1}^m A_i$, 而且 $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j, i, j=1, 2, \dots, m)$, 则称集 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是 \mathbf{Z} 的一个分拆. 对于给定的 $\alpha_i \in \mathbf{Z} (i=1, 2, \dots, m-1)$, \mathbf{Z} 是否存在分拆 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$, 对于任意的 $n \in \mathbf{Z}$, 使得 $n, n+\alpha_1, \dots, n+\alpha_{m-1}$ 中的任意两个不同在一个 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 中?

当 $m=2$ 时, 对给定的整数 a , 当且仅当 $a \neq 0$ 时, 存在 $A_i (i=1, 2)$, 使得对任取 $n \in \mathbf{Z}$, 整数 $n, n+a$ 不同在一个 $A_i (i=1, 2)$ 中. 这个命题的证明显然.

本文给出了 $m=3$ 时, 符合条件的分拆 $A_i (i=1, 2, 3)$ 存在的一个充要条件.

1 主要结果

定义 设 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 是 \mathbf{Z} 的一个分拆, 定义等价关系 \sim 如下: 如果两个整数 c, d 在同一个 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 中, 那么称这两个数等价, 记做 $c \sim d$; 否则, 称这两个数不等价, 记做 $c \not\sim d$.

引理 对于给定的 $a, b \in \mathbf{Z}$, 如果 A_1, A_2, A_3 是 \mathbf{Z} 的一个满足条件的分拆, 那么对于任意的 $n \in \mathbf{Z}$, 必定有:

- (1) $n \not\sim n+a+2b$;
- (2) $n \sim n+3ha+3kb$, 其中 h, k 是整数.

证明 我们很容易列出表1:
从而立即得出引理.

表 1 等价图表

| A_1 | A_2 | A_3 |
|---------|----------|----------|
| n | $n+a$ | $n+b$ |
| $n+a+b$ | $n+a$ | $n+2a$ |
| $n+3a$ | $n+2a+b$ | $n+2a$ |
| $n+3b$ | $n+2b$ | $n+2b+a$ |
| ... | ... | ... |

定理 对于任意给定的整数 $a \neq b$,

$$a = 3^s a_1, b = 3^t b_1 \quad (a_1, 3) = (b_1, 3) = 1$$

整数集 \mathbb{Z} 存在满足条件的分拆 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 的充要条件是:

$$s = t, a_1 + b_1 \equiv \alpha \pmod{3}.$$

证明 充分性

如果 $s = t, a_1 + b_1 \equiv \alpha \pmod{3}$. 那么将整数集 \mathbb{Z} 以 3^{s+1} 为模进行分类. 只要取:

$$A_1 = \{n : n \equiv 0, 1, \dots, 3^s - 1 \pmod{3^{s+1}}\},$$

$$A_2 = \{n : n \equiv 3^s, \dots, 2 \cdot 3^s - 1 \pmod{3^{s+1}}\},$$

$$A_3 = \{n : n \equiv 2 \cdot 3^s, 2 \cdot 3^s + 1, \dots, 3^{s+1} - 1 \pmod{3^{s+1}}\},$$

则 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 是 \mathbb{Z} 的一个分拆, 而且对于任意的整数 n , 都有 $n, n+a, n+b$ 中的任意两个都不同在一个 $A_i (i = 1, 2, 3)$ 中.

必要性

假设有符合条件的分拆 A_1, A_2, A_3 存在.

(1) 若 $s \neq t$, 不妨设 $s < t$.

设 $(a_1, b_1) = d$. 因为 $(a_1, 3) = 1$, 所以 $(a_1, 3b_1) = d$. 从而存在整数 h, k , 使得:

$$ha_1 + 3kb_1 = d.$$

在上式的两边同乘以 3^t , 从而有 $3^{t-s}ha + 3kb = 3^td$. 由引理(2), 可以得到:

$$n \sim n + 3^{t-s}ha + 3kb = n + 3^t \sim n + 3^t d \left(\frac{b_1}{d} \right) = n + b$$

矛盾, 所以 $s = t$.

(2) 若 $s = t, a_1 + b_1 \not\equiv \alpha \pmod{3}$.

因为

$$a_1 + b_1 \not\equiv \alpha \pmod{3}, \text{ 而且 } a_1, b_1 \neq 0$$

所以

$$a_1 + 2b_1 \equiv \alpha \pmod{3}.$$

设 $(a_1, b_1) = d$, 从而存在整数 h', k' 使得 $h'a_1 + k'b_1 = d$. 在等式两边同乘以 3^{t+1} , 利用引理及 $(d, 3) = 1$ 立得:

$$n \sim n + 3^{s+1}d \sim n + 3^{s+1}d \frac{a_1 + 2b_1}{3d} = n + a + 2b,$$

这与引理中的(1)矛盾, 所以假设不成立.

所以, 如果满足条件的分拆存在, 必定有:

$$s = t, a_1 + b_1 \equiv \alpha \pmod{3}.$$

2 推论及问题

推论 1 对于任意给定的 $t - 1 (t > 1)$ 个两两不等的整数:

$$a_1 = t^{s_1} b_1, a_2 = t^{s_2} b_2, \dots, a_{t-1} = t^{s_{t-1}} b_{t-1} \quad (b_i, t) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, t-1),$$

任取 $n \in \mathbb{Z}$, 如果:

(1) $s_1 = s_2 = \dots = s_{t-1}, b_1 + b_2 + \dots + b_{t-1} \equiv \alpha \pmod{t}$, 当 t 是奇数时;

(2) $s_1 = s_2 = \dots = s_{t-1}, b_1 + b_2 + \dots + b_{t-1} \equiv \frac{t}{2} \pmod{t}$, 当 t 是偶数时;

那么 \mathbf{Z} 必定存在 t 个分拆 $A_i (i = 1, 2, \dots, t)$, 使得 $n, n + a_1, \dots, n + a_{t-1}$ 中任两个不同在一个 $A_i (i = 1, 2, \dots, t)$ 中.

证明 记 $s = s_i (i = 1, 2, \dots, t-1)$. 将 \mathbf{Z} 以模 t^{s+1} 进行分类. 取:

$A_i = \{n: n \equiv (i-1)t^s, \dots, (i+1)t^s - 1 \pmod{t^{s+1}}\} (i = 1, \dots, t-1)$ 即可得证.

推论 2 如果 a, b 是两个不同的自然数, 而且 $a = 3^s a_1, b = 3^t b_1$, 那么自然数集 \mathbf{N} 存在分拆 B_1, B_2, B_3 使得对任意的 $n \in \mathbf{N}, n, n+a, n+b$ 不在同一个 $B_i (i = 1, 2, 3)$ 中, 当且仅当:

$$s = t, a_1 + b_1 \equiv 0 \pmod{3} \quad (a_1, 3) = (b_1, 3) = 1.$$

证明 只要注意如果:

$n + 3na + 3kb > 0$, 那么必定有 $n \sim n + 3ha + 3kb$, 其中 $h, k \in \mathbf{Z}$. 从而模仿定理的证明可以得出结论.

推论 3 将所有非零有理数的集合记做 \mathbf{Q}^* . 对于给定的有理数 $a, b \in \mathbf{Q}^*, a \neq b$, 而且

$$a = \frac{\gamma_1}{s_1} \cdot 3^{3^s a_1}, b = \frac{\gamma_2}{s_2} \cdot 3^{3^t b_1}, \gamma_i, a_i, b_i, s, t \in \mathbf{Z},$$

$$s_i \in N(\gamma_i, s_i) = (a_i, 3) = (b_i, 3) = 1, 3 \nmid \gamma_i s_i (i = 1, 2),$$

\mathbf{Q}^* 存在分拆 Q_1, Q_2, Q_3 , 使得对任意 $c \in \mathbf{Q}^*, c, ca, cb$ 中的任两个不同在一个 $Q_i (i = 1, 2, 3)$ 中的充要条件是:

$$s = t, a_1 + b_1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

证明 因为对于任意的 $q \in \mathbf{Q}^*, q$ 可以唯一地表示为:

$$q = \frac{\gamma}{p} \cdot 3^k, \gamma, k \in \mathbf{Z}, p \in N(\gamma, p) = 1, 3 \nmid \gamma p.$$

对指数 k 用定理可以立得推论 3.

问题 推论 1 中如果 $t > 3$, 它的逆命题是否成立?

致谢 感谢单莺教授的指导帮助!

[参考文献]

- [1] Alladi K, Erdős P, Hoggatt V E. On Additive Partitions of Integers[J]. Discrete Math, 1978, 22: 201—211.
- [2] Evans J. On Additive Partitions of Sets of Positive Integers[J]. Discrete Math, 1981, 36: 239—245.
- [3] Shan Zun, Zhu Pingtian. On (a, b, k) -Partitions of Positive Integers[J]. Sea Bull. Math, 1993, 17(1): 51—58.
- [4] 熊全淹. 近世代数[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1984.

A Partition of the Set of Integers

Fang Jianping, Zhang Jing

(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, PRC)

Abstract For given integers a, b , whether there exists such a partition A_1, A_2, A_3 of the set of integers such that any two of $n, n+a, n+b$ are never in the same $A_i (i = 1, 2, 3)$ for every $n \in \mathbf{Z}$? This paper gives a necessary and sufficient condition for this partition to exist.

Key words set of positive integers, set of integers, equivalent class, partition

[责任编辑: 陆炳新]