

估计对称阵特征值上下界的递推方法

赵宇萍

(南京师范大学数学与计算机科学学院 , 南京 210097)

[摘要] 给出了一个估计实对称矩阵特征值上下界的简单有效的递推算法.

[关键词] 实对称矩阵 ; 特征值 ; 上下界 ; 递推算法

[中图分类号] O241.6 ; [文献标识码] A ; [文章编号] 1001-4616(2001)01-0016-05

0 引言

估计一个方阵的特征值的上下界的最简单方法 , 是计算该方阵的 ∞ -范数或 1-范数 , 但这种估计往往太粗糙 . 对于对称阵 (或 Hermite 阵) 的特征值的界 , 本文提出一个递推算法 , 它很简单 , 但效果却不错 .

本文用 $\det A$ 表示方阵 A 的行列式 , $\sigma(A)$ 表示 A 的谱 , 向量范数 $\|\cdot\|$ 是指 2-范数 .

1 估计对称阵特征值上下界的递推算法

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 n 阶实对称阵 , 用 A_r 表示 A 的左上角 r 阶主子阵 , 则

$$A_{r+1} = \begin{bmatrix} A_r & c_{r+1} \\ c_{r+1}^T & a_{r+1, r+1} \end{bmatrix} \text{ 其中 } c_{r+1} = \begin{bmatrix} a_{1, r+1} \\ \vdots \\ a_{r, r+1} \end{bmatrix}.$$

当 $\lambda \notin \sigma(A_r)$ 时 , 由 Schur 定理可得

$$\det(\lambda I - A_{r+1}) = \det(\lambda I - A_r) f(\lambda) \quad (1)$$

其中

$$f(\lambda) = (\lambda - a_{r+1, r+1}) - c_{r+1}^T (\lambda I - A_r)^{-1} c_{r+1} \quad (2)$$

从式 (1) 可知 , 若 $\lambda_0 \notin \sigma(A_r)$, 则有

$$\lambda_0 \in \sigma(A_{r+1}) \Leftrightarrow f(\lambda_0) = 0 \quad (3)$$

今设 A_r 的特征值为

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_r,$$

其相应的标准正交特征向量为 y_1, y_2, \dots, y_r , 则 A_r 可表为

$$A_r = \sum_{j=1}^r \mu_j y_j y_j^T.$$

当 $\lambda \notin \sigma(A_r)$ 时 ,

$$(\lambda I - A_r)^{-1} = \sum_{j=1}^r (\lambda - \mu_j)^{-1} y_j y_j^T,$$

从而

$$f(\lambda) = (\lambda - a_{r+1, r+1}) - \sum_{j=1}^r (\lambda - \mu_j)^{-1} (c_{r+1}^T y_j)^2 \quad (4)$$

以上讨论见文献 [1] 因

$$\sum_{j=1}^r (c_{r+1}^T y_j)^2 = c_{r+1}^T \left(\sum_{j=1}^r y_j y_j^T \right) c_{r+1} = \|c_{r+1}\|^2,$$

故当 $\lambda > \mu_1$ 时, 有

$$\sum_{j=1}^r (\lambda - \mu_j)^{-1} (c_{r+1}^T y_j)^2 \leq \frac{1}{\lambda - \mu_1} \|c_{r+1}\|^2 \quad (5a)$$

而当 $\lambda < \mu_r$ 时, 有

$$\sum_{j=1}^r (\lambda - \mu_j)^{-1} (c_{r+1}^T y_j)^2 \geq \frac{1}{\lambda - \mu_r} \|c_{r+1}\|^2 \quad (5b)$$

引理 1.1 (1) 若 $\tilde{\lambda} \geq \mu_1$ 且 $\tilde{\lambda} \in \sigma(A_{r+1})$ 则

$$(\tilde{\lambda} - a_{r+1, r+1}) \wedge (\tilde{\lambda} - \mu_1) \leq \|c_{r+1}\|^2 \quad (6a)$$

(2) 若 $\tilde{\lambda} \leq \mu_r$ 且 $\tilde{\lambda} \in \sigma(A_{r+1})$ 则

$$(\tilde{\lambda} - a_{r+1, r+1}) \wedge (\tilde{\lambda} - \mu_r) \leq \|c_{r+1}\|^2 \quad (6b)$$

证明 (1) 若 $\tilde{\lambda} = \mu_1$ 则 (6a) 显然成立. 若 $\tilde{\lambda} > \mu_1$ $\tilde{\lambda} \in \sigma(A_{r+1})$ 则由 $f(\tilde{\lambda}) = 0$ 及 (5a) 即可得 (6a). (2) 类似于 (1) 的证明, 但需注意到, 当 $\tilde{\lambda} < \mu_r$ 时 $\tilde{\lambda} - \mu_r < 0$.

现在考虑下面两个一元二次方程:

$$(\lambda - a_{r+1, r+1}) \wedge (\lambda - \mu_1) = \|c_{r+1}\|^2 \quad (E1)$$

$$(\lambda - a_{r+1, r+1}) \wedge (\lambda - \mu_r) = \|c_{r+1}\|^2 \quad (E2)$$

方程 (E1) 与 (E2) 的根必为实数. 设方程 (E1) 的较大根为 ξ_{r+1} , 方程 (E2) 的较小根为 η_{r+1} , 并设 A_{r+1} 的特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \lambda_{r+1}.$$

定理 1.2 沿用前面的记号, 则有

$$\xi_{r+1} \geq \lambda_1, \mu_{r+1} \geq \eta_{r+1} \quad (7)$$

证明 反设 $\lambda_1 > \xi_{r+1}$ 并记

$$F(\lambda) = (\lambda - a_{r+1, r+1}) \wedge (\lambda - \mu_1) - \|c_{r+1}\|^2,$$

因 ξ_{r+1} 为 $F(\lambda)$ 的较大零点, 故有 $F(\lambda_1) > F(\xi_{r+1}) = 0$, 即

$$(\lambda_1 - a_{r+1, r+1}) \wedge (\lambda_1 - \mu_1) > \|c_{r+1}\|^2.$$

另一方面, 据隔离定理 2 我们有

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \mu_r \geq \lambda_{r+1},$$

故由引理 1.1 中的 (6a), 有

$$(\lambda_1 - a_{r+1, r+1}) \wedge (\lambda_1 - \mu_1) \leq \|c_{r+1}\|^2.$$

这一矛盾就证明了必有 $\lambda_1 \leq \xi_{r+1}$. 同理可证 $\lambda_{r+1} \geq \eta_{r+1}$.

定理 1.2 表明, 如果已知 A_r 的最大, 最小特征值 μ_1, μ_r , 则可用 $\mu_1, \mu_r, a_{r+1, r+1}, c_{r+1}$ 这些量来计算 A_{r+1} 的特征值的上下界 ξ_{r+1} 与 η_{r+1} . 另外, 如果不知道 A_r 的最大, 最小特征值 μ_1 , 万方数据

μ_r , 而仅知道它的特征值的上下界 $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_r$, 并设方程

$$(\lambda - a_{r+1, r+1}) (\lambda - \tilde{u}_1) = \|c_{r+1}\|^2 \quad (\text{E3})$$

的较大实根为 $\tilde{\xi}_{r+1}$, 而方程

$$(\lambda - a_{r+1, r+1}) (\lambda - \tilde{u}_r) = \|c_{r+1}\|^2 \quad (\text{E4})$$

的较小实根为 $\tilde{\eta}_{r+1}$, 则不难证明

$$\tilde{\xi}_{r+1} \geq \xi_{r+1}, \eta_{r+1} \geq \tilde{\eta}_{r+1}.$$

这表明, 我们仍然能够得到 A_{r+1} 的特征值的上下界. 这样, 我们就证明了下面的定理.

定理 1.3 设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵, 令 $\xi_1 = \eta_1 = a_{11}$.

对 $r = 1, 2, \dots, n-1$, 计算 $\|c_{r+1}\|^2 = \sum_{j=1}^r |a_{j, r+1}|^2$,

$$\xi_{r+1} = \frac{1}{2}[(\xi_r + a_{r+1, r+1}) + \sqrt{(a_{r+1, r+1} - \xi_r)^2 + 4\|c_{r+2}\|^2}],$$

$$\eta_{r+1} = \frac{1}{2}[(\eta_r + a_{r+1, r+1}) + \sqrt{(a_{r+1, r+1} - \eta_r)^2 + 4\|c_{r+2}\|^2}],$$

则 $\alpha(A) \subset [\eta_n, \xi_n]$.

定理 1.3 中提出的递推算法, 自然地可用来估算任意实或复矩阵的奇异值的界. 特别地, 如果对一个多项式的友阵的奇异值进行估算, 可以得出该多项式的零点的存在域.

推论 1.4^[4] 设多项式

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0, a_i \in C, a_0 \neq 0,$$

并记 $S = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|^2$, 则 $p(z)$ 的任意零点 r 适合

$$\eta_n^{\frac{1}{2}} \leq |r| \leq \xi_n^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$\xi_n = \frac{1}{2}(S + \sqrt{S^2 - 4|a_0|^2}), \eta_n = \frac{1}{2}(S - \sqrt{S^2 - 4|a_0|^2}).$$

证明 考虑 $p(z)$ 的友阵

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & & -a_1 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

C 的特征值与 $p(z)$ 的零点一致. 将定理 1.3 应用于 Hermite 阵

$$C^*C = \begin{bmatrix} & & & & -a_1 \\ & I_{n-1} & & & \\ & & & & -a_{n-1} \\ -\bar{a}_1 & \dots & -\bar{a}_{n-1} & & S-1 \end{bmatrix},$$

可知

$$\xi_i = \eta_i = 1, i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\xi_n = \frac{1}{2}(S + \sqrt{S^2 - 4|a_0|^2}),$$

$$\eta_n = \frac{1}{2}(S - \sqrt{S^2 - 4|a_0|^2}),$$

$$\alpha(C^*C) \subset [\eta_n, \xi_n].$$

于是,据 Browne 的著名结果: $\max |\lambda_i(C)| \leq \max \sigma_i(C)^3$ (这里 $\sigma_i(C)$ 表示 C 的任一奇异值),可得欲证之结论,证毕.

注:实际上,用隔离定理可进一步证明^[4]: $\xi_n^{1/2} = \max \sigma_i(C)$, $\eta_n^{1/2} = \min \sigma_i(C)$.

3 数值例子

例 1

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 4 \\ 10 & 8 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 20.19843, \lambda_2 = 8.00000, \lambda_3 = -5.19843,$$

$$\xi_3 = 22.3210, \eta_3 = -5.1994.$$

例 2 Hilbert 阵

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 1.50021428, \lambda_4 = 9.6702324 \times 10^{-5},$$

$$\xi_4 = 1.50649, \eta_4 = -0.55447.$$

例 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 17.16515, \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -1.16515,$$

$$\xi_4 = 17.1896, \eta_4 = -6.4172.$$

又,若将 A 的行列同时排列,按

$$A' = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

执行算法,则得

$$\xi'_4 = 17.1835, \eta'_4 = -4.1579.$$

例4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^T, A^T A = \begin{bmatrix} 140 & 168 & 196 \\ 168 & 203 & 238 \\ 196 & 238 & 280 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1(A^T A) = 621.10658, \lambda_2(A^T A) = 1.89342, \lambda_3(A^T A) = 0$$

$$\text{按} \begin{bmatrix} 280 & 238 & 196 \\ 238 & 203 & 168 \\ 196 & 168 & 140 \end{bmatrix}$$

执行算法,得

$$\xi_3 = 621.1076, \eta_3 = -197.2166.$$

例5

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 9 & 10 \\ 11 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 9 & 10 \\ 11 & 10 & 10 & 10 \\ 11 & 11 & 10 & 11 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 563 & 541 & 510 & 541 \\ 541 & 521 & 490 & 521 \\ 510 & 490 & 462 & 490 \\ 541 & 521 & 490 & 521 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1(A^T A) = 2.06578 \times 10^3, \lambda_2(A^T A) = 0.00120 \times 10^3, \lambda_3(A^T A) = \lambda_4(A^T A) = 0,$$

将 $A^T A$ 的第 3、4 两行两列对调后执行算法,可得

$$\xi_4 = 2065.7924.$$

致谢:感谢导师陈永林教授在本文写作过程中的悉心指导.

[参考文献]

- [1] 曹志浩.数值线性代数[M].复旦大学出版社,1996.
- [2] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [3] Marshall A W, Olkin I. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications[M]. Academic Press, Orlando, 1979.
- [4] 宋永忠.多项式零点的存在区域[J].数学学报,1993,36(2):245—258.
- [5] 黄友谦等.数值实验[M].北京:高等教育出版社,1989.

A Recursive Algorithm of Estimating the Bounds of the Eigenvalues of a Symmetric Matrix

Zhao Yuping

(College of Mathematics and Computer Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, PRC)

Abstract: This paper gives a simple and efficient recursive algorithm for estimating the upper and lower bounds of the eigenvalues of a real symmetric matrix.

Key words: real symmetric matrix; eigenvalue; upper and lower bounds; recursive algorithm

[责任编辑:陆炳新]