第 24 卷第 1 期　　南京师大学报(自然科学版)　　Vol.24 No.1
2001 年　　JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science)　　2001

关于线性方程组 $Ax=b$ 的解的注记

张峥嵘,严涛

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要]　考虑了当 b 固定时,怎样的矩阵 G,使 $x=Gb$ 是相容或不相容线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解,最小二乘解,从而得到许多有益的结论.

[关键词]　极小范数解;最小二乘解;极小范数最小二乘解

[中图分类号]O151.21　[文献标识码]A;　[文章编号]1001-4616(2001)01-0021-04

0　引言

本文在文[1]的基础上对线性方程组 $Ax=b$(其中 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$)作了进一步的研究,考虑了当 b 固定或任意时,怎样的矩阵 G,使 $x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解或最小二乘解,极小范数最小二乘解.本文中的术语和记号基本上同文[1].全文均假设 $b\neq 0$.

引理 1.1[1]　设 $A\in C^{m\times n}$,$B\in C^{p\times q}$,$D\in C^{m\times q}$,则矩阵方程 $AXB=D$ 相容的充要条件是 $AA^{-}DB^{-}B=D$,此时,其通解为:

$$X=A^{-}DB^{-}+Y-A^{-}AYBB^{-},\ \forall\ Y\in C^{n\times p}.$$

引理 1.2[1]　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in R(A)$,则线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解恰是约束线性方程组 $Ax=b$,$x\in R(A^{*})$的唯一解.

引理 1.3[1]　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$,则线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解恰是线性方程组 $Ax=P_{R(A)}b$ 的解,也恰是线性方程组 $A^{*}Ax=A^{*}b$ 的解.

引理 1.4[1]　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$,则线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解恰是约束线性方程组 $Ax=P_{R(A)}b$,$x\in R(A^{*})$的唯一解.

1　主要结果

定理 1.1　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$,线性方程组 $Ax=b$,$b\in R(A)$固定,则其任一解总可表示为 $x=Gb$,其中 $G\in A\{1\}$.

证明　由引理 1.1 知方程组的任一解可表示为 $x=A^{-}b+(I-A^{-}A)z$,其中 z 为某个向量.当 $z=0$ 时,$x=A^{-}b$ 已经是所述的形式;当 $z\neq 0$ 时,有 Householder 矩阵 H,使得 $\frac{z}{\|z\|}=\frac{Hb}{\|b\|}$,则 $z=uHb$,其中 u 是正实数.此时 $x=[A^{-}+u(I-A^{-}A)H]b$,而 $G=A^{-}+u(I-A^{-}A)H\in A\{1\}$.证毕.

收稿日期:1999-12-25

作者简介 张峥嵘,1977—,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,主要从事计算数学的学习与研究.

1.1　相容线性方程组的极小范数解

定理 1.2　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in R(A)$固定,$G\in C^{n\times m}$,则 $x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解的充要条件是 $G=A^{+}+Z(I-bb^{+})$,Z 任意.

证明　由引理 1.2 知 $x=Gb$ 是该线性方程组的极小范数解等价于

$$\begin{cases} AGb=b & (1)\\ Gb\in R(A^{*}) & (2)\end{cases}$$

由(2)知$(Gb)^{*}(I-A^{+}A)=0$,即$(I-A^{+}A)Gb=0$,由引理 1.1 可解得

$$G=Y-(I-A^{+}A)Ybb^{+},Y\text{ 任意} \tag{3}$$

将(3)代入(1)得 $AYb=b$,再由引理 1.1 可解得

$$Y=A^{+}+Z-A^{+}AZbb^{+},Z\text{ 任意} \tag{4}$$

最后,将(4)代入(3)得 $G=A^{+}+Z(I-bb^{+})$,Z 任意.证毕.

推论 1.1　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in R(A)$固定,$G\in A\{1\}$,则 $x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解的充要条件是

$$G=A^{+}+Z(I-bb^{+})-A^{+}AZ(A-bb^{+}A)(A-bb^{+}A)^{+}(I-bb^{+}),$$

Z 任意.

证明　由定理 1.2 可得

$$G=A^{+}+Y(I-bb^{+}),Y\text{ 任意}, \tag{5}$$

又由于 $G\in A\{1\}$,即 $AGA=A$,则有 $AGA=AA^{+}A+AY(I-bb^{+})A=A$,即 $AY(I-bb^{+})A=0$.由引理 1.1 可解得 $Y=Z-A^{+}AZ(A-bb^{+}A)(A-bb^{+}A)^{+}$,$Z$ 任意,代入(5)得

$$G=A^{+}+Z(I-bb^{+})-A^{+}AZ(A-bb^{+}A)(A-bb^{+}A)^{+}(I-bb^{+}),Z\text{ 任意}.$$

证毕.

推论 1.2[1]　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in R(A)$固定,则当 $G\in A\{1,4\}$时,$x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解.当 $b=0$ 时,结论也成立.

上述是对 b 固定情形进行的分析,以下我们将对任意 $b\in R(A)$的情形给出其相应的结论.

推论 1.3[1]　设 $A\in C^{m\times n}$,$G\in C^{n\times m}$,对一切 $b\in R(A)$,$x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数解的充要条件是 $GA=A^{+}A$,即 $G\in A\{1,4\}$.

证明　充分性:由推论 1.2 可得.

必要性:因为对一切 $b\in R(A)$,$x=Gb$ 是 $Ax=b$ 的解,则有 $AGA=A$ 成立,即 $G\in A\{1\}$.又由引理 1.2 知 $x=Gb\in R(A^{*})$,$\forall b\in R(A)$,则$(Gb)^{*}(I-A^{+}A)=0$,$\forall b\in R(A)$,即$(I-A^{+}A)Gb=0$,$\forall b\in R(A)$.令 $b=A\bar{b}$,$\forall \bar{b}$,于是$(I-A^{+}A)GA\bar{b}=0$,$\forall \bar{b}$,则$(I-A^{+}A)GA=0$,即 $GA=A^{+}AGA=A^{+}A$,也就是 $G\in A\{1,4\}$.证毕.

1.2　可能不相容的线性方程组的最小二乘解

定理 1.3　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$固定,$G\in C^{n\times m}$,则 $x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解的充要条件是 $G=A^{+}+Z-A^{+}AZbb^{+}$,Z 任意.

证明　由引理 1.3 知 $x=Gb$ 是 $Ax=b$ 的最小二乘解等价于

$$Ax=P_{R(A)}b,\text{即 }AGb=AA^{+}b \tag{6}$$

由引理 1.1 可得(6)的通解 $G=A^{+}+Z-A^{+}AZbb^{+}$,Z 任意.证毕.

推论 1.4　设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$固定,$G\in A\{1\}$,则 $x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的最小二

乘解的充要条件是

$G=A^{+}+Z-A^{+}AZbb^{+}-A^{+}AZ(A-bb^{+}A)(A-bb^{+}A)^{+}(I-bb^{+})$,$Z$ 任意.

证明由定理 1.3 得

$$G=A^{+}+Y-A^{+}AYbb^{+},Y\text{ 任意}. \tag{7}$$

又由于 $G\in A\{1\}$,即 $AGA=A$,则有 $AGA=AA^{+}A+AYA-AYbb^{+}A=A$,即 $AY(I-bb^{+})A=0$.由引理 1.1 可解得

$$Y=Z-A^{+}AZ(A-bb^{+}A)(A-bb^{+}A)^{+},Z\text{ 任意} \tag{8}$$

将(8)代入(7)得

$G=A^{+}+Z-A^{+}AZbb^{+}-A^{+}AZ(A-bb^{+}A)(A-bb^{+}A)^{+}(I-bb^{+})$,$Z$ 任意.

证毕.

推论 1.5 设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$ 固定,若 $G\in A\{1,3\}$,则 $x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解.反之,$Ax=b$ 的任一最小二乘解必可表示为 $x=Gb$,$G\in A\{1,3\}$ 的形式.

证明 若 $G\in A\{1,3\}$,则 $AG=AA^{+}$,所以 $Ax=AGb=AA^{+}b$,则由引理 1.3 知 $x=Gb$ 是 $Ax=b$ 的最小二乘解.

反之,由引理 1.3 知 $Ax=b$ 的最小二乘解恰是 $Ax=AA^{+}b$ 的解,又由引理 1.1 知 $Ax=AA^{+}b$ 的通解为 $x=A^{+}b+(I-A^{+}A)z$,z 任意,所以 $Ax=b$ 的最小二乘通解为 $x=A^{+}b+(I-A^{+}A)z$,z 任意.当 $z=0$ 时,$x=A^{+}b$,已为要求的形式;当 $z\neq 0$ 时,有 Householder 矩阵 H,使得 $\frac{z}{\|z\|}=\frac{Hb}{\|b\|}$,则 $z=uHb$,其中 u 为正实数.此时 $x=[A^{+}+u(I-A^{+}A)H]b$,令 $G=A^{+}+u(I-A^{+}A)H$,易得 $G\in A\{1,3\}$,所以 $x=Gb$,$G\in A\{1,3\}$.证毕.

推论 1.6 设 $A\in C^{m\times n}$,$G\in C^{n\times m}$,对一切 $b\in C^{m}$,$x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的最小二乘解的充要条件是 $AG=AA^{+}$,即 $G\in A\{1,3\}$.

证明 必要性:由引理 1.3 知,对一切 $b\in C^{m}$,有 $Ax=P_{R(A)}b$,即 $AGb=AA^{+}b$,$\forall b$,则 $AG=AA^{+}$,即 $G\in A\{1,3\}$.

充分性:由推论 1.5 可得.证毕.

1.3 可能不相容的线性方程组的极小范数最小二乘解

定理 1.4 设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$ 固定,$G\in C^{n\times m}$,则 $x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解的充要条件是 $G=A^{+}+Z(I-bb^{+})$,Z 任意.

证明 由引理 1.4 知 $x=Gb$ 是 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解等价于

$$\begin{cases} AGb=P_{R(A)}b & (9)\\ Gb\in R(A^{*}) & (10)\end{cases}$$

由(10)得

$$G=Y-(I-A^{+}A)Ybb^{+},Y\text{ 任意}. \tag{11}$$

将(11)代入(9)得 $AYb=P_{R(A)}b=AA^{+}b$,由引理 1.1 可解得

$$Y=A^{+}+Z-A^{+}AZbb^{+},Z\text{ 任意}. \tag{12}$$

将(12)代入(11)得 $G=A^{+}+Z(I-bb^{+})$,Z 任意.证毕.

推论 1.7 设 $A\in C^{m\times n}$,$b\in C^{m}$ 固定,$G\in A\{1\}$,则 $x=Gb$ 是线性方程组 $Ax=b$ 的极小范数最小二乘解的充要条件是

$G=A^{+}+Z(I-bb^{+})-A^{+}AZ(A-bb^{+}A)(A-bb^{+}A)^{+}(I-bb^{+})$,$Z$ 任意.

证明　由定理1.4得

$$G = A^{+} + Y(I - bb^{+}), Y \text{ 任意}. \tag{13}$$

又由于 $G\in A\{1\}$,即 $AGA = A$,则有 $AGA = AA^{+}A + AY(I - bb^{+})A = A$,即 $AY(I - bb^{+})A = 0$,由引理1.1解得

$$Y = Z - A^{+}AZ(A - bb^{+}A)(A - bb^{+}A)^{+}, Z \text{ 任意}. \tag{14}$$

将(14)代入(13)得

$$G = A^{+} + Z(I - bb^{+}) - A^{+}AZ(A - bb^{+}A)(A - bb^{+}A)^{+}(I - bb^{+}), Z \text{ 任意}.$$

证毕.

推论1.8　设 $A\in C^{m\times n}$,$G\in C^{n\times m}$,对一切 $b\in C^{m}$,$x = Gb$ 是线性方程组 $Ax = b$ 的极小范数最小二乘解的充要条件是 $G = A^{+}$.

证明　必要性:对一切 $b\in C^{m}$,$x = Gb$ 是 $Ax = b$ 的最小二乘解,则由推论1.6可知 $AG = AA^{+}$,即 $G\in A\{1,3\}$.对一切 $b\in C^{m}$,$x = Gb$ 是 $Ax = b$ 的极小范数最小二乘解,则由引理1.3可知,对一切 $b\in C^{m}$,$x = Gb$ 是 $Ax = P_{R(A)}b$ 的极小范数解,再由推论1.3可得 $GA = A^{+}A$,即 $G\in A\{1,4\}$.同时,由引理1.2知,对一切 $b\in C^{m}$,$x = Gb\in R(A^{*})$,则 $R(G)\subset R(A^{*})$,又 $G\in A\{1\}$,所以 $\mathrm{rank}\,G\leqslant \mathrm{rank}\,A^{*} = \mathrm{rank}\,A\leqslant \mathrm{rank}\,G$,有 $\mathrm{rank}\,G = \mathrm{rank}\,A$,因此 $G\in A\{2\}$.所以 $G\in A\{1,2,3,4\}$,即 $G = A^{+}$.

充分性:在推论1.7中取 $Z = 0$ 即可得.证毕.

致谢:感谢陈永林教授的悉心指导.

[参考文献]

[1] 何旭初,孙文瑜.广义逆矩阵引论[M].南京:江苏科技出版社,1990.
[2] 王国荣.矩阵与算子广义逆[M].北京:科学出版社,1994.

Note on Solution of a Linear Equations $Ax = b$

Zhang Zhengrong, Yan Tao

(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing, 210097, PRC)

Abstract: In this paper, we consider the minimal norm solution and the least squares solution of a linear equations $Ax = b$, where $b\neq 0$ is fixed, which is ignored in the books on generalized inverses of matrices. In this case, we give the general form of a matrix G such that $x = Gb$ is m.n. and l.s. solutions of $Ax = b$, respectively.

Key words: minimal norm solution; least squares solution; minimal morm least squares solution

[责任编辑:陆炳新]