可迁格序置换群的稳定子群

雷雪萍,朱作桐

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要]　给出了可迁格序置换群是 $2-o$ 可迁的等价条件;讨论了本原分量,且给出了可迁格序置换群是正规值的一些等价条件.

[关键词]　可迁格序置换群;稳定子群;本原分量;正规值;l-群

[中图分类号]O152;[文献标识码]A;[文章编号]1001-4616(2001)01-0025-03

0　引言

本文利用格序置换群的稳定子群,继续文[1],[2],[3]的研究,证明可迁 l-置换群是 $2-o$ 可迁当且仅当稳定子群 $G_{(\Delta)}$ 在区间 $\{\sum \mid \Delta < \sum\}$ 上是可迁的,当且仅当对任意 $\Delta < \Lambda < \sum$,存在 $g \in G_{(\Delta)}$ 使 $\sum \leqslant \Lambda g$;讨论了本原分量,证明格序置换群是正规值的当且仅当每个本原分量是正则的.设 Ω 是全序集,(G,Ω) 是 Ω 上的格序置换群,若 $\alpha G = \Omega$,$\alpha \in \Omega$,则(G,Ω) 称为可迁的.在 Ω 中,设 $\alpha_i < \beta_i$,$i = 1,2$,若存在 $g \in G$ 使得 $\alpha_1 g = \alpha_2$,$\beta_1 g = \beta_2$,则称 G 是 2-可迁的.若 Δ 是 Ω 的子集,$\alpha \in \Omega$,则 $G_\Delta = \{g \in G \mid \delta g = \delta$,对任意 $\delta \in \Delta\}$,$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha g = \alpha\}$ 和 $G_{(\Delta)} = \{g \in G \mid \Delta g = \Delta\}$ 是 G 的素子群([3]).设(G,Ω) 是一个可迁 l-置换群,$\alpha \in \Omega$,(C_k, C^k) 是凸同余覆盖对([2]),则 αC^k 是(G,Ω) 的一个块,且诱导 G 在 Ω / C^k 上的一个作用.令 $\Omega_k = \alpha C^k / C_k$ 是 C_k-等价类的链,则 $G_{(\alpha C^k)}$ 诱导 Ω_k 上的一个格序置换群,记为 G_k.(G_k, Ω_k) 称为(G,Ω) 的第 k 个本原分量([2]).

1　可迁性

引理 1[2]　设(G,Ω)是一个 l-置换群,Δ 是 Ω 的一个子集,f,$g \in G$,则 $f^{-1} G_{(\Delta)} f = G_{(\Delta f)}$

证明　考虑可换图(图 1)

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & \Delta g \arrow[d, "f"] \\ \Delta f \arrow[r, dashed, "f^{-1}gf"'] & \Delta gf \end{tikzcd}$$

图 1　可换图

则 $(\Delta g) f = \Delta f \Leftrightarrow \Delta g = \Delta \Leftrightarrow g \in G_{(\Delta)} \Leftrightarrow f^{-1} G_{(\Delta)} f = G_{(\Delta f)}$.

引理 2[1]　设(G,Ω)是一个可迁 l-置换群,Δ 是一个块.则 $\{\Delta g \mid g \in G\}$ 是 Ω 的一个分类,且决定 Ω 上的一个凸同余,记作 C_Δ.

证明　显然 $\bigcup_{g \in G} \Delta g \subseteq \Omega$.对任意 $\alpha \in \Omega$,由 G 的可迁性,存在 $h \in G$,使得 $\delta h = \alpha$,对任意 δ

收稿日期:2000-08-16
作者简介:雷雪萍,1976—,女,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,主要从事序代数的学习与研究.

$\in \Delta$. 则 $\Omega \subseteq \bigcup_{g\in G}\Delta g$，因此 $\Omega = \bigcup_{g\in G}\Delta g$. 因为 Δ 是一个块，则 Ω 是 $\{\Delta g \mid g\in G\}$ 的不交并，因此决定 Ω 上的一个凸同余.

注 由[2]，定义 $\Delta g < \Delta f \Leftrightarrow \omega < \tau,\ \forall \omega\in\Delta g,\ \tau\in\Delta f$，则 Ω/C_Δ 是一个全序集，且$(G,\Omega/C_\Delta)$是 Ω/C_Δ 上的一个可迁 l-置换群.

引理 3 设(G,Ω)是一个可迁 l-置换群，Δ 是一个块. 若 $G_{(\Delta)}$ 在区间 $\{\Sigma \mid \Sigma < \Delta\}$ ($\{\Sigma \mid \Delta < \Sigma\}$) 是可迁的，则 $G_{(\Lambda)}$ 在区间 $\{\Sigma \mid \Sigma < \Lambda\}$ ($\{\Sigma \mid \Lambda < \Sigma\}$) 上可迁，其中 Λ 是一个块.

证明 对任意 $\Lambda\in\Omega/C_\Delta$，设 $\Lambda=\Delta g^{-1}$，即 $\Delta=\Lambda g$. 设 $\Sigma,\tau<\Lambda=\Delta g^{-1}$，则 $\Delta>\Sigma g,\ \tau g$，存在 $f\in G_{(\Delta)}$，使得$(\Sigma g)f=\tau g$，即$\Sigma(gfg^{-1})=\tau$. 但 $gfg^{-1}\in G_{(\Lambda)}$，则 $\tau\in\Sigma G_{(\Lambda)}$.

定理 4 设(G,Ω)是一个可迁 l-置换群，Δ 是一个块，则下列命题等价：

(1)$(G,\Omega/C_\Delta)$是 2-可迁的.

(2)稳定子群 $G_{(\Delta)}$在区间 $\{\Sigma \mid \Delta<\Sigma\}$ ($\{\Sigma \mid \Sigma<\Delta\}$) 是可迁的.

(3)任意 $\Delta<\Lambda<\Sigma$ ($\Sigma<\Lambda<\Delta$)，存在 $g\in G_{(\Delta)}$，使$\Sigma\leqslant\Lambda g$ ($\Lambda\leqslant\Sigma g$).

证明 (1)⇒(2). 设 $\Sigma,\Lambda\in\{\tau\mid\tau<\Delta\}$，即$\Sigma<\Delta,\ \Lambda<\Delta$，则存在 $g\in G$，使得$\Sigma g=\Lambda$ 和 $\Delta g=\Delta$，因此 $g\in G_{(\Delta)}$ 且$\Sigma g=\Lambda$.

(2)⇒(3). 设 $\Sigma<\Lambda<\Delta$，则$\Sigma,\Lambda\in\{\tau\mid\tau<\Delta\}$，存在 $g\in G_{(\Delta)}$ 使 $\Lambda=\Sigma g$，则 $\Lambda\leqslant\Sigma g$.

(3)⇒(2). 若 $\Sigma,\Lambda\in\{\tau\mid\Delta<\tau\}$，设 $\Delta<\Lambda<\Sigma$，则存在 $g\in G_{(\Delta)}$，使$\Sigma\leqslant\Lambda g$. 由$(G,\Omega/C_\Delta)$的可迁性，存在$f\in G$，使 $\Lambda f=\Sigma$. 因为 $\Delta((f\vee e)\Lambda g)=\min\{\Delta(f\vee e),\Delta g\}=\Delta$，$\Lambda((f\vee e)\Lambda g)=\min\{\Lambda(f\vee e),\Lambda g\}=\min\{\Sigma,\Lambda g\}=\Sigma$.

(2)⇒(1). 若 $\Delta_1<\Delta_2,\Lambda_1<\Lambda_2$，其中 $\Delta_i,\Lambda_i\in\Omega/C_\Delta,\ i=1,2$. 由$(G,\Omega/C_\Delta)$的可迁性，存在 $h\in G$，使 $\Delta_1 h=\Lambda_1$. 则 $\Lambda_1=\Delta_1 h<\Delta_2 h$. 考虑不等式 $\Lambda_1<\Lambda_2$，和 $\Lambda_1<\Delta_2 h$. 由(2)，存在 $g\in G_{(\Lambda_1)}$，使$(\Delta_2 h)g=\Lambda_2$，但$(\Delta_1 h)g=\Lambda_1$. 因此 G 在Ω/C_Δ 上是 2-可迁的.

推论 5 设(G,Ω)是 2-可迁 l-置换群且若 $\beta<\alpha,\ \alpha<\gamma$，其中 $\alpha,\beta,\gamma\in\Omega$，则 $\beta G_\alpha=(-\infty,\alpha)$，$\gamma G_\alpha=(\alpha,+\infty)$和 $\alpha G_\alpha=\alpha$.

2 本原性

设(G,Ω)是一个可迁 l-置换群，$\alpha,\beta\in\Omega$，且 $\alpha\neq\beta$，令 Δ 表示包含α 而不包含β 的所有块的并，则 Δ 是Ω 的一个块. 令 Λ 表示包含Δ 与β 的所有块的交，则 Λ 也是一个块，且 Λ 覆盖 Δ. 令 C_k 和 C^k 分别是对应于Δ 和Λ 的凸同余，则(C_k,C^k)是覆盖对，而 k 称为α,β 的值，记作 $\mathrm{Val}(\alpha,\beta)$[1]. 由[1]，本原分量是本原的，因而是 2-可迁的，正则的或周期本原的.

定理 6 设(G,Ω)是可迁 l-置换群，则下列命题等价：

(1) G 是正规值 l-群.

(2) $fg\leqslant g^2f^2$，对任意 $f,g\in G^+$，其中 G^+是 G 的正锥.

(3)(G,Ω)的所有的本原分量(G_k,Ω_k)是正则的.

证明 由[4]，(1)，(2)是等价的，仅需证明(1)，(3)是等价的.

设 G 是正规值的.若本原分量(G_k,Ω_k)不是正则的,则它是 2-可迁或是周期本原的[1],对每个 $\Delta\in\Omega_k$,则 $G_{(\Delta)}$不是 G_k 的正规子群,且存在 $g\in G$,使 $G_{(\Delta)}\neq G_{(\Delta g)}$[1].因此 $\Delta\neq\Delta g$,$g\notin G_{(\Delta)}$.由 G_k 的本原性,$G_{(\Delta)}$是 G_k 的极大的素子群[3],则 G_k 是 $G_{(\Delta)}$的一个覆盖,因此 G 不是正规值 l-群.设(G,Ω)的所有本原分量(G_k,Ω_k)是正则的,若存在 $f,g\in G^+$,使得 $fg\nleq g^2f^2$,则 $\exists\,\alpha\in\Omega$ 使 $\alpha fg>\alpha g^2f^2$ 则 $\alpha fg>\alpha$.令 $k=\mathrm{Val}(\alpha fg,\alpha)$,则本原分量$(G_k,\Omega_k)$是正则的.由 G_k 的本原性,(G_k,Ω_k)是实数加法群的一个子群的正则表示[4].令 $\bar f,\bar g$ 分别表示由f,g 诱导的正实数平移,则 $\Delta\bar f\bar g>\Delta\bar g^2\bar f^2$,其中 $\Delta=\alpha C_k\in\alpha C^k/C_k$,矛盾.因此 $fg\leqslant g^2f^2$ 对任意 $f,g\in G^+$,由[4],G 是正规值 l-群.

[参考文献]

[1] Zhu Zuotong,Huang Zhenyu.The Structure of transitive ordered permutation groups[J].Czechoslovak Math,Journal,1999,49(124):811—815.

[2] Glass A M W.Ordered permutation groups[M].Cambridge University Press,1981.76—116.

[3] Zhu Z T,Huang J M.Stability of l-permutation groups[J].J.of Nanjing Uni.Math.Biquarterly,1994,11(1):18—21.

[4] Anderson M,Feil T.Lattice-ordered Groups[M].D.Reidel Publishing Company,Dordrecht,Holland,1988.29—31.

[5] Zhu Z T,Huang J M.Congruent paries on a set[J].Chinese Quarterly Journal of Math.,1994,9(3):37—41.

[6] McClearly S H.The structure of intransitive ordered permutation groups[J].Algebra Universalis,1976,6:229—255.

[7] Glass A M W.Elementary types of automorphisms of linearly ordered sets-a survey[J].Algebra,Carbondale(R.K.Amayo,ed.).Springer,Lecture Notes,1980,(848):218—229.

[8] McClearly S H.The structure of ordered permutation groups applied to Lattice-ordered groups[J].Notices Amer.Math.Soc,1974,21:712—714.

[9] Zhu Z T,Chen Q.The universal mapping problems of the l-group category[J].Chinese Journal of Math.,1995,23(2):131—140.

[10] Glass A M W,Holland W C.Lattice-Ordered Groups[M].Kluwer Academic Publishers,1989.23—40.

The Stabilizer Subgroups of Transitive l-Permutation Groups

Lei Xueping,Zhu Zuotong

(College of Mathematics and Computer Science,Nanjing Normal University,Nanjing,210097,PRC)

Abstract:This paper gives some necessary and sufficient conditions for transitive l-permutation groups to be 2-transitive;also gives some necessary and sufficient conditions for transitive l-permutation groups to be normal-valued.

Key words:lattice-ordered group;stabilizer subgroup;primitive component;normal-valued l-group

[责任编辑:陆炳新]