

数字图像的奇异值分解

聂守平, 魏晓燕

(南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210097)

[摘要] 通过对图像进行奇异值分解, 将一幅图像转换成只包含几个非零值的奇异值矩阵, 实现图像压缩.

[关键词] 奇异值分解; 图像压缩

[中图分类号] O411; [文献标识码] A; [文章编号] 1001-4616(2001)01-0059-03

0 引言

图像压缩是图像传输的前提, 图像压缩要求有较高的压缩比, 同时不产生失真. 矩阵的奇异值分解, 可以将任意一个矩阵分解成只包含几个非零值的奇异值矩阵, 将其用于图像分解, 则可以产生图像的压缩.

1 基本原理

任意一个 $N \times N$ 的矩阵 A 都可以写成

$$A = U\Lambda V^T \quad (1)$$

其中, U 和 V 的列分别是 AA^T 和 A^TA 的特征向量, 如果 A 是对称的, 则 $U = V$. Λ 为 $N \times N$ 的对角阵, 沿其对角线包含 Λ 的奇异值. 由于 U 和 V 是正交的, 所以

$$\Lambda = U^T A V \quad (2)$$

式(1)和(2)分别是一个酉变换的正变换和反变换, 这个变换称为奇异值分解变换^[1].

由于 Λ 是对角阵, 所以它至多有 N 个非零元素, 这样我们至少获得 N 倍的无损压缩. 通常, 奇异值中总有一些小到可以忽略, 而几乎不会带来什么误差, 这样, 可以通过忽略一些较小的值, 来实现有损压缩, 获得更高的压缩比. 假设矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

AA^T 和 A^TA 的特征向量矩阵 U 和 V 分别为:

$$U = \begin{pmatrix} -0.2392 & -0.6259 & -0.7422 \\ -0.6519 & -0.4629 & 0.6005 \\ -0.7195 & 0.6275 & -0.2973 \end{pmatrix},$$
$$V = \begin{pmatrix} -0.8509 & -0.4541 & -0.2640 \\ 0.5248 & -0.7120 & -0.4665 \\ 0.0238 & -0.5355 & 0.8441 \end{pmatrix},$$

奇异值矩阵 Λ 为

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 8.4576 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0950 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2822 \end{pmatrix},$$

即经过分解之后,包含 9 个非零元素的矩阵 A 可以用只包含 3 个元素的矩阵 Λ 来表示,实现了数据压缩.由式(2)可以完整的重构矩阵 A ,实现了数据恢复.

注意到奇异值矩阵 Λ 中,第三个奇异值 0.2822 和其它两个相比很小,将其忽略为 0,即

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 8.4576 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0950 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

重新构造的矩阵为

$$A' = \begin{pmatrix} 1.0048 & 1.8913 & 1.1714 \\ 3.9958 & 3.0948 & 1.8505 \\ 6.0020 & 1.9551 & 1.0708 \end{pmatrix},$$

矩阵和的均方误差为 0.094.这说明在不致于引入明显的误差的情况下,只用包含两个非零值的奇异值矩阵,也可以恢复原矩阵.

下面我们将矩阵的奇异值分解方法用于图像的压缩和恢复.

2 图像的奇异值分解

图 1 所示为 64×64 像素的原始输入图像,将其看作 64×64 的矩阵,64 个奇异值如图 2 所示.用全部 64 个奇异值进行恢复,得到无误差的图像,图像的压缩比为 64:1.



图1 原始输入图像

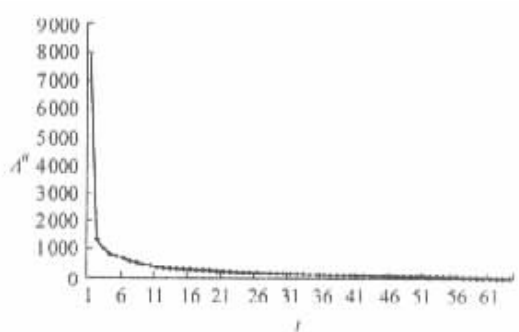


图2 图像的奇异值分布

在图 2 中,小于 100 的奇异值有 27 个,舍去这 27 个奇异值,图像的压缩比为 110:1,恢复图像及误差图像如图 3 所示.由于奇异值 100 和最大值 8000 相比很小,完全可以忽略,这样提高了图像的压缩比,在视觉上并没有造成误差.

图 2 中,小于 200 的奇异值的个数为 42,舍去这 42 个奇异值,图像的压缩比为 186:1,恢复图像及误差图像如图 4 所示.恢复图像与原图像视觉差别不大,误差图像反映其差别.

图 2 中,小于 500 的奇异值的个数为 56,舍去这 56 个奇异值,图像的压缩比为 512:1,恢复图像及误差图像如图 5 所示.虽然将图像的压缩比提高到了很高的程度,但误差已很明显,恢复图像产生了模糊.



图3 压缩比为 64:1 的恢复图像及其误差图像



图4 压缩比为 186:1 的恢复图像及其误差图像



图5 压缩比为 512:1 的恢复图像及其误差图像

3 结论

利用矩阵的奇异值分解这一数学工具,实现了图像的压缩与恢复,在选择忽略部分较小奇异值的基础上,可以达到很高的压缩比同时不产生图像失真.

[参考文献]

- [1] Kenneth R Castleman. Digital Image Processing[M]. Prentice Hall Press ,1998.

Singular Value Decomposition of Digital Image

Nie Shouping ,Wei Xiaoyan

(College of Physical Science and Technology ,Nanjing Normal University ,Nanjing 210097 ,PRC)

Abstract :Digital image is transformed into singular value matrix that contains non-zero singular values by singular value decomposition(SVD) ,the image is compressed.

Key words :singular value decomposition(SVD) ;image compression

[责任编辑 :丁蓉]