求解极小 l_1 模问题的修正 Bland 规则

颜世建,尤兴华

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 改进了 Bland 规则,给出了一个解极小 l_1 模问题的有效算法.

[关键词] 极小 l_1 模解;单纯形方法;Bland 规则
[中图分类号]O24; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)02-0001-06

0 引言

文[1—3]对极小 l_1 模问题

$$\begin{cases}\min\|x\|_1\\ s.t.\ Ax=b\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $A\in R_m^{m\times n}$,$m<n$,给出了一些算法.但是这些算法有的要求(1.1)非退化,有的计算量较大,有的对退化可能引起的循环未加考虑.本文对线性规划的 Bland 规则作了修改,将其用于(1.1),形成了一个简单快速且不会循环的算法.我们的算法依赖下列众所周知的结论.

定理 1 问题(1.1)必存在基本最优解.

定理 2 $Ax=b$ 的解 $\bar{x}$ 为(1.1)最优解的充要条件是,存在 $|v_j|\leqslant 1$,$j\in E(\bar{x})=\{j\mid \bar{x}_j=0,j=1,\cdots,n\}$,与 $v_j=\mathrm{sign}(\bar{x}_j)$,$j\notin E(\bar{x})$ 一起使 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)^T\in R(A^T)$.

1 算法

我们观察到,(1.1)的最优基中各个基向量的 l_1 模往往较大,故我们将 Bland 的最小下标选主元规则修改为最大 l_1 模选主元规则.具体讲,就是在可以进基(出基)的向量中选 l_1 模最大者进基(出基).设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\alpha_j=\|a_j\|_1$,$j=1,\cdots,n$,若 $\alpha_{j_1}\leqslant\alpha_{j_2}\leqslant\cdots\leqslant\alpha_{j_n}$,令

$$\bar{\alpha}_{j_i}=\alpha_{j_i}+(i-1),\ i=1,\cdots,n\tag{2.1}$$

这样 $\{\bar{\alpha}_j\}$ 有严格的顺序:$\bar{\alpha}_{j_1}<\bar{\alpha}_{j_2}<\cdots<\bar{\alpha}_{j_n}$.

算法 1

(1) 用式(2.1)计算 $\bar{\alpha}_j$,$j=1,\cdots,n$ 对 (A,b) 用行主元 Gauss-Jordan 消去法得初始基 B 以及 $B^{-1}(A,b)=(\bar{a}_1\bar{a}_2\cdots\bar{a}_n\bar{b})$ 计算

$$v_j=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sign}(\bar{b}_i)\bar{a}_{ij},\ j=1,\cdots,n;\ z=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sign}(\bar{b}_i)\bar{b}_i=\sum_{i=1}^{m}|\bar{b}_i|.$$

(上述计算中若出现 $\bar{b}_i=0$,取 $\mathrm{sign}(\bar{b}_i)=1$)

收稿日期:2000-07-01

作者简介:颜世建,1948—,南京师范大学数学与计算机科学学院副教授,从事计算数学的教学与研究.

(2) 形成表格 $\bar{A}$ 及基变量下标集 T:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \cdots & \bar{a}_n & \bar{b} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \bar{b}_1 \\ & \\ \bar{A}_m & \bar{b}_m \\ v & \bar{z} \end{bmatrix}, T = \{t_1, t_2, \cdots, t_m\}.$$

(3) 若 $|v_j| \leqslant 1, j \notin T$,**则由定理** 2 **知** $x_{t_i} = \bar{b}_i, i = 1, \cdots, m, x_j = 0, j \notin T$ **为**(1.1)**的基本最优解,停止;否则求** l **使**

$$\bar{\alpha}_l = \max\{\bar{\alpha}_j \mid |v_j| > 1, j \notin T\}.$$

(4) 置 $\beta_i = v_{t_i}\operatorname{sign}(v_l)\bar{a}_{il}, i = 1, \cdots, m$,**求**

$$\bar{\theta} = \min_{1 \leqslant i \leqslant m}\left\{\frac{|\bar{b}_i|}{\beta_i} \,\Big|\, \beta_i > 0\right\},$$

$$I = \left\{i \,\Big|\, \frac{|\bar{b}_i|}{\beta_i} = \bar{\theta}, i = 1, \cdots, m\right\},$$

$$\bar{\alpha}_{t_k} = \max_{i \in I}\{\bar{\alpha}_{t_i} \mid t_i \in T\}.$$

(5) 以 $\bar{a}_{kl}$ **为主元作换基运算,即计算**

$$(\bar{A}'_k, \bar{b}'_k) = (\bar{A}_k, \bar{b}_k)/\bar{a}_{kl},$$

$$(\bar{A}'_i, \bar{b}'_i) = (\bar{A}_i, \bar{b}_i) - \bar{a}_{il}(\bar{A}'_k, \bar{b}'_k), i = 1, \cdots, m \text{ 但 } i \neq k,$$

$$(v', \bar{z}') = (v, \bar{z}) + (\operatorname{sign}(v_l) - v_l)(\bar{A}'_k, \bar{b}'_k).$$

置 $t_k = l$,**把**$(\bar{A}'_i, \bar{b}'_i), i = 1, \cdots, m, (v', \bar{z}')$ **记为**$(\bar{A}_i, \bar{b}_i), i = 1, \cdots, m, (v, \bar{z})$,**转** $2°$.

[例]　求下列极小 l_1 模问题的一个最优解

$$\begin{cases} \min \|x\|_1 \\ s.t. \quad -x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_5 - 8x_6 = -1 \\ \quad -\frac{1}{2}x_1 + x_3 + \frac{1}{2}x_5 + 3x_6 = \frac{3}{8} \\ \quad x_1 + x_4 = -1 \end{cases}$$

解　$\bar{\alpha}_1 = \frac{13}{2}, \bar{\alpha}_2 = 2, \bar{\alpha}_3 = 3, \bar{\alpha}_4 = 4, \bar{\alpha}_5 = \frac{3}{4}, \bar{\alpha}_6 = 16$,

$$(A, b) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -8 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

用行主元 Gauss-Jordan **消去法,第一行用** -8 **作主元得**

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{32} & 1 & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} & 1 & 0 & \frac{19}{32} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

第二、三行主元选 1,**无需消去运算,计算** $v, \bar{z}$ **得**

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{1}{32} & 1 & \frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} & 1 & 0 & \frac{19}{32} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & \frac{9}{16} & 1 & \frac{9}{8} \end{bmatrix}, T=\{6,3,4\}.$$

选主元:$l=1$,$\bar{\theta}=0$,$I=\{2\}$,$k=2$,主元 $\bar{a}_{21}=-\frac{7}{8}$,换基运算得

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 & \frac{3}{56} & 1 & \frac{1}{8} \\ 1 & -\frac{3}{7} & -\frac{8}{7} & 0 & -\frac{19}{28} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{8}{7} & 1 & \frac{19}{28} & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & -1 & \frac{3}{56} & 1 & \frac{9}{8} \end{bmatrix}, T=\{6,1,4\}.$$

由 $|v_j|\leqslant 1$,$j\notin T$ 知 $x_6=\frac{1}{8}$,$x_4=-1$,$x_1=x_2=x_3=x_5=0$ 为基本最优解.

2 有限步收敛性

以下把第 $\mu-1$ 次换基运算后所得到的 $\bar{A}$,T 记为

$$\bar{A}(\mu)=\begin{bmatrix} \bar{a}_{11}^{(\mu)} & \bar{a}_{12}^{(\mu)} & \cdots & \bar{a}_{1n}^{(\mu)} & \bar{a}_{b1}^{(\mu)} \\ & & & & \\ \bar{a}_{m1}^{(\mu)} & \bar{a}_{m2}^{(\mu)} & \cdots & \bar{a}_{mn}^{(\mu)} & \bar{b}_{m}^{(\mu)} \\ v_1^{(\mu)} & v_2^{(\mu)} & \cdots & v_n^{(\mu)} & \bar{z}^{(\mu)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{a}_1^{(\mu)} & \bar{a}_2^{(\mu)} & \cdots & \bar{a}_n^{(\mu)} & \bar{a}_b^{(\mu)} \\ & & & & \\ v_1^{(\mu)} & v_2^{(\mu)} & \cdots & v_n^{(\mu)} & \bar{z}^{(\mu)} \end{bmatrix}, T(\mu)=\{t_1^{(\mu)},\cdots,t_m^{(\mu)}\}.$$

相应的基记为 $B(\mu)$,基本解记为 $x^{(\mu)}$.

引理 1 设第 μ 次换基运算以 $\bar{a}_{kl}^{(\mu)}$ 为主元,则

(ⅰ) $\bar{a}_{t_i}(\mu)=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,$t_i^{(\mu)}\in T(\mu)$ 时;

(ⅱ) $v_l^{(\mu+1)}=\mathrm{sign}(v_l^{(\mu)})$;

(ⅲ) $j\in T(\mu)\cap T(\mu+1)$ 时,$v_j^{(\mu+1)}=v_j^{(\mu)}$;

(ⅳ) $v_{t_i^{(\mu)}}^{(\mu)}=1$ 或 -1,$t_i^{(\mu)}\in T(\mu)$ 时.

证明 (ⅰ)成立是显然的.

(ⅱ) $\bar{a}_{kl}^{(\mu+1)}=\bar{a}_{kl}^{(\mu)}/\bar{a}_{kl}^{(\mu)}=1$,故 $v_l^{(\mu+1)}=v_l^{(\mu)}+(\mathrm{sign}(v_l^{(\mu)})-v_l^{(\mu)})\cdot\bar{a}_{kl}^{(\mu+1)}=\mathrm{sign}(v_l^{(\mu)})$.

(ⅲ) $j\in T(\mu)\cap T(\mu+1)$,设 $j=t_i^{(\mu)}$. 则 $j\neq l$,$j\neq t_k^{(\mu)}$,$k\neq i$,$\bar{a}_{kj}^{(\mu)}=0$,$\bar{a}_{kj}^{(\mu+1)}=\bar{a}_{kj}^{(\mu)}/\bar{a}_{kl}^{(\mu)}=0$,故 $v_j^{(\mu+1)}=v_j^{(\mu)}+(\mathrm{sign}(v_l^{(\mu)})-v_l^{(\mu)})\bar{a}_{kj}^{(\mu+1)}=v_j^{(\mu)}$.

(ⅳ) 由 $v_{t_i^{(1)}}^{(1)}=\mathrm{sign}(\bar{b}_i^{(1)})$,$i=1,\cdots,m$ 知 $\mu=1$ 时成立. 假设 μ 时成立.

由 $t_k^{(\mu+1)}=l$ 以及(ⅱ),(ⅲ))知 $\mu+1$ 时结论成立.

引理 2 设 $v^{(\mu)}=(v_1^{(\mu)},v_2^{(\mu)},\cdots,v_n^{(\mu)})$,$\bar{A}_i^{(\mu)}=(\bar{a}_{i1}^{(\mu)},\bar{a}_{i2}^{(\mu)},\cdots,\bar{a}_{in}^{(\mu)})$,则对 $\forall\mu$,有:

$$(v^{(\mu)},\bar{z}^{(\mu)})=\sum_{i=1}^{m}v_{t_i^{(\mu)}}^{(\mu)}(\bar{A}_i^{(\mu)},\bar{b}_i^{(\mu)}).$$

证明　$\mu=1$ 时,$(v^{(1)},\bar{z}^{(1)})=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sign}(\bar{b}_i^{(1)})(\bar{A}_i^{(1)},\bar{b}_i^{(1)})=\sum_{i=1}^{m}v_{t_i^{(1)}}^{(1)}(\bar{A}_i^{(1)},\bar{b}_i^{(1)})$.

假设 $\mu=s$ 时结论成立,第 s 次换基运算时主元为 $\bar{a}_{kl}^{(s)}$,则 $\mu=s+1$ 时有

$v_l^{(s+1)}=\mathrm{sign}(v_l^{(s)})$,(引理 1 之(ⅱ))

$(\bar{A}_k^{(s)},\bar{b}_k^{(s)})-\bar{a}_{kl}^{(s)}(\bar{A}_k^{(s+1)},\bar{b}_k^{(s+1)})=0$,

$(\bar{A}_i^{(s+1)},\bar{b}_i^{(s+1)})=(\bar{A}_i^{(s)},\bar{b}_i^{(s)})-\bar{a}_{il}^{(s)}(\bar{A}_k^{(s+1)},\bar{b}_k^{(s+1)}),i\neq k$.

由引理 1 之(ⅲ)及归纳假设得

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}v_{t_i^{(s+1)}}^{(s+1)}(\bar{A}_i^{(s+1)},\bar{b}_i^{(s+1)})=\sum_{i\neq k}v_{t_i^{(s)}}^{(s)}(\bar{A}_i^{(s)},\bar{b}_i^{(s)})-\sum_{i\neq k}v_{t_i^{(s)}}^{(s)}\bar{a}_{il}^{(s)}(\bar{A}_k^{(s+1)},\bar{b}_k^{(s+1)})\\&+v_{t_k^{(s)}}^{(s)}[(\bar{A}_k^{(s)},\bar{b}_k^{(s)})-\bar{a}_{kl}^{(s)}(\bar{A}_k^{(s+1)},\bar{b}_k^{(s+1)})]+\mathrm{sign}(v_l^{(s)})(\bar{A}_k^{(s+1)},\bar{b}_k^{(s+1)})\\&=(v^{(s)},\bar{z}^{(s)})+[\mathrm{sign}(v_l^{(s)})-\sum_{i=1}^{m}v_{t_i^{(s)}}^{(s)}\bar{a}_{il}^{(s)}](\bar{A}_k^{(s+1)},\bar{b}_k^{(s+1)})\\&=(v^{(s)},\bar{z}^{(s)})+(\mathrm{sign}(v_l^{(s)})-v_l^{(s)})(\bar{A}_k^{(s+1)},\bar{b}_k^{(s+1)})\\&=(v^{(s+1)},\bar{z}^{(s+1)}).\end{aligned}$$

引理3　对 $i=1,\cdots,m$,若 $\bar{b}_i^{(\mu)}\neq 0$,则 $\mathrm{sign}(\bar{b}_i^{(\mu)})=v_{t_i^{(\mu)}}^{(\mu)}$.

证明　$\mu=1$ 时,$v_{t_i^{(1)}}^{(1)}=\mathrm{sign}(\bar{b}_i^{(1)})$,结论成立.

假设 $\mu=s$ 时结论成立,第 s 次换基运算的主元为 $\bar{a}_{kl}^{(s)}$,记 $\beta_i^{(s)}=v_{t_i^{(s)}}^{(s)}\mathrm{sign}(v_l^{(s)})\bar{a}_{il}^{(s)}$,$i=1,\cdots,m$,则 $\mu=s+1$ 时有

(ⅰ)若 $i=k$ 时有 $\bar{b}_k^{(s+1)}\neq 0$,由 $\bar{b}_k^{(s+1)}=b_k^{(s)}/\bar{a}_{kl}^{(s)}$ 知 $\bar{b}_k^{(s)}\neq 0$,由归纳假设知 $\mathrm{sign}(\bar{b}_k^{(s)})=v_{t_k^{(s)}}^{(s)}$,从引理 1 之(ⅱ)知 $v_l^{(s+1)}=\mathrm{sign}(v_l^{(s)})$,注意到 $\beta_k^{(s)}>0$,$|\bar{b}_k^{(s)}|>0$,$t_k^{(s+1)}=l$ 有 $\mathrm{sign}(\bar{b}_k^{(s+1)})=\mathrm{sign}(\bar{b}_k^{(s)}/\bar{a}_{kl}^{(s)})=\mathrm{sign}(\mathrm{sign}(v_l^{(s)})|\bar{b}_k^{(s)}|/\beta_k^{(s)})=\mathrm{sign}(v_l^{(s)})=v_l^{(s+1)}=v_{t_k^{(s+1)}}^{(s+1)}$.

(ⅱ)若 $i\neq k$ 时有 $\bar{b}_i^{(s+1)}\neq 0$,(ⅰ)中已有 $\bar{b}_k^{(s+1)}=\mathrm{sign}(v_l^{(s)})|\bar{b}_k^{(s)}|/\beta_k^{(s)}$,故

$\bar{b}_i^{(s+1)}=\bar{b}_i^{(s)}-\bar{a}_{il}^{(s)}\mathrm{sign}(v_l^{(s)})|\bar{b}_k^{(s)}|/\beta_k^{(s)}=v_{t_i^{(s)}}^{(s)}[|\bar{b}_i^{(s)}|-\beta_i^{(s)}|\bar{b}_k^{(s)}|/\beta_k^{(s)}]$.

若 $\beta_i^{(s)}>0$,由 $|\bar{b}_i^{(s)}|/\beta_i^{(s)}\geqslant|\bar{b}_k^{(s)}|/\beta_k^{(s)}$,$\bar{b}_i^{(s+1)}\neq 0$ 知 $|\bar{b}_i^{(s)}|-\beta_i^{(s)}|\bar{b}_k^{(s)}|/\beta_k^{(s)}>0$.
若 $\beta_i^{(s)}\leqslant 0$,由 $\bar{b}_i^{(s+1)}\neq 0$ 仍有 $|\bar{b}_i^{(s)}|-\beta_i^{(s)}|\bar{b}_k^{(s)}|/\beta_k^{(s)}>0$.
这样由引理 1 之(ⅲ)得

$\mathrm{sign}(\bar{b}_i^{(s+1)})=\mathrm{sign}(v_{t_i^{(s)}}^{(s)})=v_{t_i^{(s)}}^{(s)}=v_{t_i^{(s+1)}}^{(s+1)}$.

引理4　$\|x^{(\mu)}\|_1=\bar{z}^{(\mu)}$,且 $\{\|x^{(\mu)}\|_1\}$ 递减.

证明　设 $I(\mu)=\{i\,|\,\bar{b}_i^{(\mu)}\neq 0,i=1,\cdots,m\}$,由 $x_{t_i^{(\mu)}}^{(\mu)}=\bar{b}_i^{(\mu)}$,$i=1,\cdots,m$,$x_j^{(\mu)}=0$,$j\in T(\mu)$,知 $\sum_{i\in I(\mu)}\mathrm{sign}(\bar{b}_i^{(\mu)})\bar{b}_i^{(\mu)}=\|x^{(\mu)}\|_1$. 由引理 3,引理 2 得

$$\|x^{(\mu)}\|_1=\sum_{i\in I(\mu)}v_{t_i^{(\mu)}}^{(\mu)}\bar{b}_i^{(\mu)}=\sum_{i=1}^{m}v_{t_i^{(\mu)}}^{(\mu)}\bar{b}_i^{(\mu)}=\bar{z}^{(\mu)},$$

$$\|x^{(\mu+1)}\|_1=\bar{z}^{(\mu+1)}=\bar{z}^{(\mu)}+(\mathrm{sign}(v_l^{(\mu)})-v_l^{(\mu)})\bar{b}_k^{(\mu+1)}.$$

(ⅰ) 若 $\bar{b}_k^{(\mu+1)}=\bar{b}_k^{(\mu)}/\bar{a}_{kl}^{(\mu)}\neq 0$,即 $\bar{b}_k^{(\mu)}\neq 0$,由引理 3 及其证明过程知

$$\mathrm{sign}(\bar{b}_k^{(\mu+1)})=v_{t_k^{(\mu+1)}}^{(\mu+1)}=v_l^{(\mu+1)}=\mathrm{sign}(v_l^{(\mu)}),$$

$$\|x^{(\mu+1)}\|_1=\bar{z}^{(\mu)}+(1-|v_l^{(\mu)}|)|\bar{b}_k^{(\mu+1)}|<\bar{z}^{(\mu)}=\|x^{(\mu)}\|_1.$$

(ⅱ) 若 $\bar{b}_k^{(\mu+1)}=\bar{b}_k^{(\mu)}/\bar{a}_{kl}^{(\mu)}=0$,即 $\bar{b}_k^{(\mu)}=0$,则

$$\|x^{(\mu+1)}\|_1=\bar{z}^{(\mu)}=\|x^{(\mu)}\|_1.$$

注 $\|x^{(\mu+1)}\|_1=\bar{z}^{(\mu+1)}=\bar{z}^{(\mu)}=\|x^{(\mu)}\|_1\Leftrightarrow\bar{b}_k^{(\mu)}=0\Leftrightarrow\bar{b}^{(\mu+1)}=\bar{b}^{(\mu)}$.

引理 5 $\{\bar{A}(\mu)\}$ 不会循环.

证明 反证法,为简单起见,设有循环

$$\bar{A}(1)\to\bar{A}(2)\to\cdots\to\bar{A}(k)\to\bar{A}(1).$$

显然以后将无限次重复上述过程.由引理 4 的注可知在循环过程中 $\bar{z}^{(\mu)}$,$\bar{b}^{(\mu)}$ 保持不变.设

$$I=\{j\mid \text{在循环过程中 } a_j \text{ 始终是基向量},1\leqslant j\leqslant n\},$$

$$K=\{j\mid \text{在循环过程中 } a_j \text{ 始终是非基向量},1\leqslant j\leqslant n\}.$$

$$J=\{1,2,\cdots,n\}\setminus(I\cup K),$$

令 $\bar{\alpha}_r=\min\{\bar{\alpha}_j\mid j\in J\}$.

假设 a_r 在第 s 次换基运算后变为基向量,由选主元规则应有

$$|v_r^{(s)}|>1,|v_j^{(s)}|\leqslant 1,\text{当 }\bar{\alpha}_j>\bar{\alpha}_r\text{ 时}.$$

由于循环,必有 $\bar{A}(s+k)=\bar{A}(s)$,第 $s+k$ 次换基运算中 a_r 又要进基,故存在 e 满足 $s<e<s+k$ 使 a_r 在第 e 次换基运算时首次出基.由于 a_r 在 $B(s+1),\cdots,B(e)$ 的交集中,由引理 1 知 $v_r^{(e)}=\cdots=v_r^{(s+1)}=\mathrm{sign}(v_r^{(s)})$.

设第 e 次换基运算时主元为 $\bar{a}_{kl}^{(e)}$,故 $t_k^{(e)}=r$,a_l 进基.显然

$$\beta_k^{(e)}=v_{t_k^{(e)}}^{(e)}\mathrm{sign}(v_l^{(e)})\bar{a}_{kl}^{(e)}>0.$$

另外,若有 $i\neq k$,$t_i^{(e)}\in J$ 使 $\beta_i^{(e)}=v_{t_i^{(e)}}^{(e)}\mathrm{sign}(v_l^{(e)})\bar{a}_{il}^{(e)}>0$,由于 $\bar{b}_i^{(e)}=0$($t_i^e\in J$ 时)以及 $\bar{\alpha}_{t_i^{(e)}}>\bar{\alpha}_{t_k^{(e)}}$ 知不应有 $a_{t_k^{(e)}}=a_r$ 出基,因而必有 $\beta_i^{(e)}=v_{t_i^{(e)}}^{(e)}\mathrm{sign}(v_l^{(e)})\bar{a}_{il}^{(e)}\leqslant 0$,$i\neq k$ 且 $t_i^{(e)}\in J$ 时,定义 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)^{\mathrm{T}}$ 如下:

$$d_{t_i^{(e)}}=-\mathrm{sign}(v_l^{(e)})\bar{a}_{il}^{(e)},i=1,\cdots,m,$$

$$d_l=\mathrm{sign}(v_l^{(e)}),$$

$$d_j=0,\text{其他 } j.$$

对这个 d 有

$$Ad=B(e)B(e)^{-1}Ad=B(e)(\bar{a}_1^{(e)},\bar{a}_2^{(e)},\cdots,\bar{a}_n^{(e)})d=\mathrm{sign}(v_l^{(e)})B(e)(-\bar{a}_l^{(e)}+\bar{a}_l^{(e)})=0.$$

$$\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sign}(v_j^{(e)})d_j=-\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sign}(v_{t_i^{(e)}}^{(e)})\mathrm{sign}(v_l^{(e)})\bar{a}_{il}^{(e)}+1$$

$$=-\mathrm{sign}(v_l^{(e)})\sum_{i=1}^{m}v_{t_i^{(e)}}^{(e)}\bar{a}_{il}^{(e)}+1$$

$$= -|v_l^{(e)}| + 1 < 0,$$

$$\mathrm{sign}(v_r^{(e)})d_r = -v_{t_k^{(e)}}^{(e)}\mathrm{sign}(v_l^{(e)})\bar{a}_{kl}^{(e)} < 0,$$

$$\mathrm{sign}(v_l^{(e)})d_l = 1,$$

$$\mathrm{sign}(v_{t_i^{(e)}}^{(e)})d_{t_i^{(e)}} = -v_{t_i^{(e)}}^{(e)}\mathrm{sign}(v_l^{(e)})\bar{a}_{il}^{(e)} \geqslant 0, t_i^{(e)} \in J \text{ 且 } i \neq k,$$

$$\mathrm{sign}(v_j^{(e)})d_j = 0, \text{其他 } j \in J.$$

由引理2及上面各式得

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^{(s)}d_j - \sum_{j=1}^{n}\mathrm{sign}(v_j^{(e)})d_j = (v_{t_1^{(s)}}^{(s)}, v_{t_2^{(s)}}^{(s)}, \cdots, v_{t_m^{(s)}}^{(s)})B(s)^{-1}Ad - \sum_{j=1}^{n}\mathrm{sign}(v_j^{(e)})d_j > 0.$$

另一方面,$v_j^{(s)} = v_j^{(e)} = \mathrm{sign}(v_j^{(e)}), j \in I$(引理1),$d_j = 0, j \in K$($d$的定义),$v_r^{(e)} = \mathrm{sign}(v_r^{(s)})$,$|v_r^{(s)}| > 1, |v_j^{(s)}| \leqslant 1, j \in J$,因而

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^{(s)}d_j - \sum_{j=1}^{n}\mathrm{sign}(v_j^{(e)})d_j = \sum_{j\in I}(v_j^{(s)} - \mathrm{sign}(v_j^{(e)}))d_j + \sum_{j\in K}(v_j^{(s)} - \mathrm{sign}(v_j^{(e)}))d_j$$

$$+ \sum_{j\in J}(v_j^{(s)}\mathrm{sign}(v_j^{(e)}) - 1)\mathrm{sign}(v_j^{(e)})d_j$$

$$= (v_r^{(s)}\mathrm{sign}(v_r^{(s)}) - 1)\mathrm{sign}(v_r^{(e)})d_r + \sum_{j\in J\setminus\{r\}}(v_j^{(s)}\mathrm{sign}(v_j^{(e)}) - 1)\mathrm{sign}(v_j^{(e)})d_j$$

$$\leqslant (v_r^{(s)}\mathrm{sign}(v_r^{(s)}) - 1)\mathrm{sign}(v_r^{(e)})d_r < 0.$$

这个矛盾说明引理5结论成立.

定理3　算法1必有限步终止.

证明　由引理1之(iv)及引理3,在算法1中只能出现有限个不同的 $\bar{A}$,若算法不有限步终止,则必出现循环,这与引理5矛盾.

[参考文献]

[1] 王嘉松,陈中文.求地震反演的 l_1 模极小化模型的解[J].高等学校计算数学学报,1989,(4):362—368.

[2] 王嘉松,陈中文.极小 l_1 范数的修正算法[J].高等学校计算数学学报,1991,(1):35—43.

[3] 陈中文.求解极小 l_1 模和极小 l_∞ 模的一个有效算法[J].高等学校计算数学学报,1993,(2):176—181.

A Modified Bland's Rule for Solving l_1 Norm Minimization

Yan Shijian, You Xinghua

(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing, 210097, PRC)

Abstract: A new algorithm with a modified Bland's rule for solving l_1 norm minimization is presented in this paper. The algorithm can be implemented only when the matrix A is of full row rank, and it is efficient.

Key words: mini-l_1-norm solution; simplex algorithm; Bland's rule

[责任编辑: 陆炳新]