# 周期点集的局部度量稳定性

严珍珍

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 给出了紧致度量空间上连续自映射的周期点集具有局部度量稳定性的必要条件和充分条件.

[关键词] 局部度量稳定性;伪移位不变集;半伪移位不变集;伪轨跟踪

[中图分类号]O189; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)02-0007-04

本文中,若不特别说明,$(X,d)$恒为紧致的度量空间,$f:X\to X$ 为连续满射,记作 $f\in C^{\circ}(X,X)$,$f$ 的周期点集记为 $P(f)$.

**定义 1** 设 $f\in C^{\circ}(X,X)$,$A\subset X$,$f(A)\subset A$.若对于 $\forall\varepsilon>0$,$\forall p\in A$,存在 $p$ 的邻域 $V(p)$,使得直径 $\mathrm{diam}(f^m(V(p)\cap A))<\varepsilon$,$\forall m\geqslant 0$,则称 $A$ 对 $f$ 具有局部度量稳定性;若对于 $\forall p\in A$,存在 $\varepsilon>0$,对 $p$ 的任意邻域 $V(p)$,存在 $m>0$,使 $\mathrm{diam}(f^m(V(p)\cap A))\geqslant\varepsilon$,则称 $A$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性.

**定义 2** 设 $f\in C^{\circ}(X,X)$,$\wedge$ 为 $f$ 的不变的紧致集,$\wedge\subset X$,若 $f|_{\wedge}$ 与单边符号空间 $\Sigma_k$ 的转移自映射 $\sigma_k$ 拓扑半共轭,即存在 $\varphi:\wedge\to\Sigma_k$ 为连续满射,使 $\varphi\circ f=\sigma\circ\varphi$,则称 $\wedge$ 为 $f$ 的 $k$ 阶伪移位不变集;又若 $\forall\alpha\in\Sigma_k$,$\varphi^{-1}(\alpha)$ 有限,则称 $\wedge$ 为 $f$ 的 $k$ 阶半伪移位不变集.

**定义 3** 设 $f\in C^{\circ}(X,X)$,若对于 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得 $f$ 的任一 $\delta$ 伪轨 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$ 能被一点 $x_\varepsilon$ 跟踪,即 $d(f^i(x),x_i))<\varepsilon$,$0\leqslant i\leqslant+\infty$,则称 $f$ 具有伪轨跟踪性质.

**定理 1** 设 $(X_i,d_i)$ 为紧致的度量空间,$f_i\in C^{\circ}(X_i,X_i)$,$i=1,2$.则 $P(f_1\times f_2)$ 对 $f_1\times f_2$ 具有局部度量稳定性的充要条件是 $P(f_i)$ 对 $f_i$ 具有局部度量稳定性,$i=1,2$.

**证明** 首先证明:$P(f_1\times f_2)=P(f_1)\times P(f_2)$.事实上,$\forall(p_1,p_2)\in P(f_1)\times P(f_2)$,有 $p_i\in P(f_i)$,设 $p_i$ 的周期为 $n_i$,$i=1,2$,令 $n=[n_1,n_2]$,则 $f_i^n(p_i)=p_i$.从而 $(f_1\times f_2)^n(p_1,p_2)=(f_1^n(p_1),f_2^n(p_2))=(p_1,p_2)$,故 $(p_1,p_2)\in P(f_1\times f_2)$,$P(f_1)\times P(f_2)\subset P(f_1\times f_2)$.反之,若 $(p,q)\in P(f_1\times f_2)$,设 $(p,q)$ 的周期为 $n$,则 $(f_1\times f_2)^n(p,q)=(f_1^n(p),f_2^n(q))=(p,q)$,从而 $f_1^n(p)=p$,$f_2^n(q)=q$,即 $p\in P(f_1)$,$q\in P(f_2)$,$(p,q)\in P(f_1)\times P(f_2)$.故 $P(f_1\times f_2)\subset P(f_1)\times P(f_2)$,从而 $P(f_1\times f_2)=P(f_1)\times P(f_2)$.

**充分性** $\forall(p_1,p_2)\in P(f_1\times f_2)$,由于 $P(f_1\times f_2)=P(f_1)\times P(f_2)$,则 $p_1\in P(f_1)$,$p_2\in P(f_2)$.由已知,$P(f_i)$ 对 $f_i$ 具有局部度量稳定性,$i=1,2$,即 $\forall\varepsilon>0$,存在 $p_i$ 的邻域 $V(p_i)$,使 $\mathrm{diam}(f_i^m(V(p_i)\cap P(f_i)))<\varepsilon$,$\forall m\geqslant 0$,$i=1,2$,于是 $\mathrm{diam}((f_1\times f_2)^m((V(p_1)\times V(p_2))\cap P(f_1\times f_2)))=\mathrm{diam}((f_1\times f_2)^m((V(p_1)\cap P(f_1))\times(V(p_2))\cap P(f_2)))=\mathrm{diam}(f_1^m(V(p_1)\cap P(f_1))\times f_2^m(V(p_2)\cap P(f_2)))\leqslant\mathrm{diam}(f_1^m(V(p_1)\cap P(f_1)))+\mathrm{diam}(f_2^m(V(p_2)\cap P(f_2)))<2\varepsilon$,

收稿日期:2000-05-09

作者简介:严珍珍,1978—,女,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,从事拓扑动力系统的学习与研究.

$\forall m \geqslant 0$.

故 $P(f_1 \times f_2)$对 $f_1 \times f_2$ 具有局部度量稳定性.

**必要性**　$\forall p_i \in P(f_i), i=1,2$,由 $P(f_1) \times P(f_2) = P(f_1 \times f_2)$,有$(p_1, p_2) \in P(f_1 \times f_2)$,由已知,$P(f_1 \times f_2)$对 $f_1 \times f_2$ 具有局部度量稳定性,即$\forall \varepsilon > 0$,存在$(p_1, p_2)$的邻域 $V(p_1, p_2)$,使得 $\mathrm{diam}((f_1 \times f_2)^m (V(p_1, p_2) \cap P(f_1 \times f_2))) < \varepsilon, \forall m \geqslant 0$. 对 $V(p_1, p_2) \subset X_1 \times X_2$,存在 $p_1, p_2$ 的邻域 $V(p_1), V(p_2)$使 $V(p_1) \times V(p_2) \subset V(p_1, p_2)$. 从而 $\varepsilon > \mathrm{diam}((f_1 \times f_2)^m (V(p_1, p_2) \cap P(f_1 \times f_2))) \geqslant \mathrm{diam}((f_1 \times f_2)^m (V(p_1) \cap P(f_1) \times (V(p_2) \cap P(f_2)))) = \mathrm{diam}((f_1^m (V(p_1) \cap P(f_1)) \times (f_2^m (V(p_2) \cap P(f_2))) \geqslant \max\limits_{i=1,2} \{\mathrm{diam}(f_i^m (V(p_i) \cap P(f_i)))\}, \forall m \geqslant 0$. 故 $P(f_i)$对 $f_i$ 具有局部度量稳定性,$i=1,2$.

文[1]指出,对于线段连续自映射和圆周连续自映射 $f$,$P(f)$对 $f$ 具有局部度量稳定性的充要条件是$f$ 无马蹄,而 $f$ 有马蹄等价于存在 $m>0$,$f^m$ 有 $k$ 阶伪移位不变集[2],下面将文[1]的结果推广到一般紧致度量空间上.

**引理 1**[3]　设 $f \in C^\circ(X, X)$,则 $f$ 有 $k$ 阶伪移位不变集的充要条件是存在 $X$ 上的两两非交的紧致子集 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$满足 $f(A_j) \supset \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} A_i, j = 0, 1, \cdots, k-1$.

**引理 2**　设 $f \in C^\circ(X, X)$,若存在 $m>0$,$f^m$ 有 $k$ 阶半伪移位不变集$\wedge$,$g = f^m|_\wedge$,$\varphi$ 是 $g$ 与 $\sigma$ 之间的拓扑半共轭,则 $\varphi^{-1}(P(\sigma)) = P(g)$.

**证明**　显然 $P(g) \subset \varphi^{-1}(P(\sigma))$,只要证 $P(g) \supset \varphi^{-1}(P(\sigma))$. 由文[2]的证明,$\forall \alpha = (i_0, i_1, \cdots) \in \Sigma_k$,设 $A_\alpha = \bigcap\limits_{S=0}^{\infty} g^{-s}(A_{i_s})$,设$\wedge = \bigcup\limits_{\alpha \in \Sigma_k} A_\alpha$,且$\forall x \in A_\alpha, \varphi(x) = \alpha$,下面分三步完成证明.

(1) $\forall \alpha \in \Sigma_k, \forall x \in A_\alpha, \varphi(x) = \alpha$,则 $x \in \varphi^{-1}(\alpha)$,故 $A_\alpha \subset \varphi^{-1}(\alpha)$. 反之,设 $x \in \varphi^{-1}(\alpha)$,则 $\varphi(x) = \alpha$,又 $x \in \wedge$,则存在 $\beta \in \Sigma_k$,使 $x \in A_\beta$,从而 $\varphi(x) = \alpha = \beta$,故 $x \in A_\alpha$,即 $\varphi^{-1}(\alpha) \subset A_\alpha$,从而 $\varphi^{-1}(\alpha) = A_\alpha, \forall \alpha \in \Sigma_k$.

(2)由[3]的引理 1,$g(\bigcap\limits_{s=0}^{k} g^{-s}(A_{i_s})) = g(A_{i_0} \cap \bigcap\limits_{s=1}^{k} g^{-s}(A_{i_s})) = g(A_{i_0} \cap g^{-1}(\bigcap\limits_{s=1}^{k} g^{-s+1}(A_{i_s}))) = g(A_{i_0}) \cap \bigcap\limits_{s=1}^{k} g^{-s+1}(A_{i_s}) = g(A_{i_0}) \cap A_{i_1} \cap \bigcap\limits_{s=2}^{k} g^{-s+1}(A_{i_s}) = A_{i_1} \cap \bigcap\limits_{s=2}^{k} g^{-s+1}(A_{i_s})$(因 $g(A_0) \supset A_{i_1}$)$= \bigcap\limits_{s=1}^{k} g^{-s+1}(A_{i_s}) = \bigcap\limits_{s=0}^{k-1} g^{-s}(A_{i_{s+1}})$. 从而 $g(A_\alpha) = g(\bigcap\limits_{s=0}^{\infty} g^{-s}(A_{i_s})) = \bigcap\limits_{s=0}^{\infty} g^{-s}(A_{i_{s+1}}) = A\sigma(\alpha)$.

(3) $\forall x \in \varphi^{-1}(P(\sigma))$,存在 $\alpha \in P(\sigma)$,$x \in \varphi^{-1}(\alpha) = A_\alpha$,设 $\alpha$ 的周期为 $n$,由 $g(A_\alpha) = A\sigma(\alpha)$,有 $g^n(A_\alpha) = A\alpha^n(\alpha) = A_\alpha$,由已知 $A_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha)$有限,从而 $g^n|_{A_\alpha}$ 是一一映射,即 $A_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha) \subset P(g)$,故 $\varphi^{-1}(P(\sigma)) \subset P(g)$,从而 $\varphi^{-1}(P(\sigma)) = P(g)$.

**定理 2**　设 $f \in C^\circ(X, X)$,$P(f)$对 $f$ 具有局部度量稳定性,则$\forall m > 0$,$f^m$ 没有 $k$ 阶半伪移位不变集.

**证明**　假设存在 $m_0 > 0$,$f^{m_0}$有 $k$ 阶半伪移位不变集$\wedge$,令 $g = f^{m_0}|_\wedge$,$\varphi$ 是 $g$ 与 $\sigma$ 之间的拓扑半共轭,则$\forall \alpha \in \Sigma_k$,$\varphi^{-1}(\alpha)$有限. 若 $\alpha \in P(\sigma)$,则总存在两两相异的周期点列 $\alpha_n \to \alpha (n \to \infty)$. 若 $p_n \in \wedge$,$\varphi(p_n) = \alpha_n$,由引理 2,$\varphi^{-1}(P(\sigma)) = P(g)$,从而 $p_n \in P(g)$,由于 $\{p_n\}_{n \in \mathbf{N}}$为无限集,必存在收敛的子列 $\{p_{n_j}\}$,设其收敛到点 $p$,由 $\varphi$ 的连续性,$\varphi(p_{n_j}) \to \varphi(p) (j \to \infty)$. 又 $\varphi(p_{n_j}) = \alpha_{n_j} \to \alpha$,故 $\varphi(p) = \alpha$,再由引理 2,$p \in P(g)$. $\Sigma_k = \{\alpha = (a_0, a_1, \cdots) | a_i \in \{0, 1, \cdots, k-

$l\}\}$是紧致度量空间，其中度量 $\rho$ 定义如下：设 $\alpha=(a_0,a_1,\cdots)$，$\beta=(b_0,b_1,\cdots)$

$$\rho(\alpha,\beta)=\begin{cases}0, \alpha=\beta; \\ \dfrac{1}{2^l}, \alpha\neq\beta, l \text{ 是使 } a_l\neq b_l \text{ 的最小正整数}.\end{cases}$$

由于 $P(f)$对 $f$ 具有局部度量稳定性，则 $P(g)$对 $g$ 具有局部度量稳定性，即$\forall\varepsilon>0$，对上述 $p\in P(g))$，存在 $p$ 的邻域$V(P)$，使得 $\mathrm{diam}(g^m(V(P)\cap P(g)))<\varepsilon$，$\forall m\geqslant 0$. 由于 $V(P)$中必存在 $p_{n_j}\in P(g)$满足 $\varphi(p_{n_j})\neq\varphi(p)$，设 $\rho(\varphi(p_{n_j}),\varphi(p))=\dfrac{1}{2^l}$，$l$ 为正整数，则 $\rho(\sigma^{l-1}(\varphi(p_{n_j})),\sigma^{l-1}(\varphi(p)))=\dfrac{1}{2}$，而 $\varphi\circ g^{l-1}=\sigma^{l-1}\circ g$，从而 $\rho(\varphi\circ g^{l-1}(p_{n_j}),\varphi\circ g^{l-1}(p))=\dfrac{1}{2}$，但是 $p_{n_j},p\in V(p)\cap P(g)$，$d(g^{l-1}(p_{n_j}),g^{l-1}(p))<\varepsilon$，$\varepsilon$ 可以任意小，这与 $\varphi$ 的连续性矛盾，从而假设不成立，故$\forall m>0$，$f^m$ 没有 $k$ 阶半伪移位不变集.

**系 1** 若存在 $m_1>0$，$f_1^{m_1}$ 有 $k_1$ 阶半伪移位不变集，或存在 $m_2>0$，$f_2^{m_2}$ 有 $k_2$ 阶半伪移位不变集，则 $P(f_1\times f_2)$对 $f_1\times f_2$ 不具有局部度量稳定性.

**证明** 由定理 1 和定理 2 的逆否命题即得.

**引理 3**[4] 设 $f\in C^\circ(X,X)$，$f$ 具有伪轨跟踪性质，固定 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$，使得任一 $\delta$ 伪轨能被一点 $x$ $\varepsilon$ 跟踪，若存在 $x_0,x_1\in X$，$d(x_0,x_1)>5\varepsilon$，且存在 $m\in\mathbf{N}$，对于 $i,j\in\{0,1\}$，存在从 $x_i$ 到 $x_j$ 的长为$m+1$ 的 $\delta$ 链 $C_{ij}$，则 $f^m$ 具有二阶伪移位不变集.

**定理 3** 设 $f\in C^\circ(X,X)$，$f$ 具有伪轨跟踪性质，若对任意整数 $k>0$，$f^k$ 没有二阶伪移位不变集，则 $P(f)$对 $f$ 具有局部度量稳定性.

**证明** 假设 $P(f)$对 $f$ 不具有局部度量稳定性，则存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $p\in P(f)$，对 $p$ 的任意邻域$V(p)$，存在 $m>0$，使 $\mathrm{diam}(f^m(V(p)\cap P(f)))\geqslant\varepsilon_0$，取 $\varepsilon$：$0<\varepsilon<\dfrac{1}{5}\varepsilon_0$，因 $f$ 具有伪轨跟踪性质，对上述 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，使得任一 $\delta$ 伪轨被任一$x$ $\varepsilon$ 跟踪. 取 $V(p)$的直径小于 $\delta$，则存在 $l>0$，使得 $\mathrm{diam}(f^l(V(P)\cap P(f)))>5\varepsilon$. 从而存在 $q_0,q_1\in V(p)\cap P(f)$，$d(f^l(q_0),f^l(q_1))>5\varepsilon$ 且$d(q_0,q_1)<\delta$. 令 $x_0=f^l(q_0)$，$x_1=f^l(q_1)$，则 $d(x_0,x_1)>5\varepsilon$，不妨设 $f^m(q_0)=q_0$，$f^n(q_1)=q_1$ 且$0\leqslant l<\min\{m,n\}$. 由于 $d(f(f^{m-l-1}(x_0)),f^{n-l}(x_1))=d(f^{m-l}(x_0),f^{n-l}(x_1))=d(f^{m-l}(f^l(q_0)),f^{n-l}(f^l(q_1)))=d(f^m(q_0),f^n(q_1))=d(q_0,q_1)<\delta$，$d(f^{m-l}(x_0),f(f^{n-l-1}(x_0)))=d(q_0,q_1)<\delta$，故可构造从 $x_i$ 到$x_j$ 的$\delta$ 链 $C_{ij}$如下，$i,j\in\{0,1\}$：

$$\begin{aligned}C_{x_0x_0}=&\{x_0,f(x_0),\cdots,f^{m-l-1}(x_0),f^{n-l}(x_1),f^{n-l+1}(x_1),\cdots,f^{n-l+l}(x_1),\\&f(x_1),\cdots,f^{n-l-1}(x_1),f^{m-l}(x_0),f^{m-l+1}(x_0),\cdots,f^{m-l+l}(x_0)\};\\C_{x_0x_1}=&\{x_0,f(x_0),\cdots,f^{m-l-1}(x_0),f^{n-l}(x_1),f^{n-l+1}(x_1),\cdots,f^{n-l+l}(x_1),\\&f(x_1),f^2(x_1),\cdots,f^n(x_1)\};\\C_{x_1x_0}=&\{x_1,f(x_1),\cdots,f^{n-l-1}(x_1),f^{m-l}(x_0),f^{m-l+1}(x_0),\cdots,f^{m-l+l}(x_0),\\&f(x_0),f^2(x_0),\cdots,f^m(x_0)\};\\C_{x_1x_1}=&\{x_1,f(x_1),\cdots,f^{n-l-1}(x_1),f^{m-l}(x_0),f^{m-l+1}(x_0),\cdots,f^{m-l+l}(x_0),\\&f(x_0),\cdots,f^{m-l-1}(x_0),f^{n-l}(x_1),f^{n-l+1}(x_1),\cdots,f^{n-l+l}(x_1)\}.\end{aligned}$$

并且$|C_{x_0x_0}|=|C_{x_0x_1}|=|C_{x_1x_0}|=|C_{x_1x_1}|=m+n+1$. 由引理 3，$f^{m+n}$具有二阶伪移位不变集，这与已知条件矛盾，从而假设不成立，故 $P(f)$对 $f$ 具有局部度量稳定性.

**系2**　设 $f\in C^{\circ}(X,X)$，$f$ 具有伪轨跟踪性质，$P(f)\neq\varnothing$，若 $CR(f)=R(f)$ 或 $R(f)=AP(f)$，则 $P(f)$ 对 $f$ 具有局部度量稳定性.

**证明**　由文[4]的定理，若 $f$ 具有伪轨跟踪性质，则存在 $m>0$，$f^m$ 有伪移位不变集等价于 $CR(f)\neq R(f)$，也等价于 $R(f)\neq AP(f)$，结合定理3，即得.

另外，对 $P(f)$ 的局部度量不稳定性，还有以下结论.

**定理4**　设 $f\in C^{\circ}(X,X)$，则 $\overline{P(f)}$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性的充要条件是 $P(f)$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性.

**证明**　充分性　$\forall p\in\overline{P(f)}$，对 $p$ 的邻域 $V(p)$，存在 $q\in P(f)$ 和 $q$ 的邻域 $V(q)$，使 $V(q)\subset V(p)$，由于 $P(f)$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性，存在 $\varepsilon_0>0$ 和 $m>0$，使 $\mathrm{diam}(f^m(V(q)\cap P(f)))\geqslant\varepsilon_0$，而 $\overline{P(f)}\supset P(f)$，$V(p)\supset V(q)$，从而 $\mathrm{diam}(f^m(V(p)\cap\overline{P(f)}))\geqslant\mathrm{diam}(f^m(V(q)\cap P(f)))\geqslant\varepsilon_0$，故 $\overline{P(f)}$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性.

必要性　由于 $\overline{P(f)}$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性，$\forall p\in P(f)\subset\overline{P(f)}$，存在 $\varepsilon_0>0$，对于 $p$ 的任意邻域 $V(p)$，存在 $m>0$，使得 $\mathrm{diam}(f^m(V(p)\cap\overline{P(f)}))\geqslant\varepsilon$，即存在 $p_1,p_2\in V(p)\cap\overline{P(f)}$，$d(f^m(p_1),f^m(p_2))\geqslant\varepsilon_0$. 由 $f^m$ 的连续性，取定正数 $\delta<\frac{1}{3}\varepsilon_0$，则存在 $\delta_0>0$，使 $V_{\delta_0}(p_i)=\{y\in X\mid d(y,p_i)<\delta_0\}\subset V(P)$ 且 $f^m(V_{\delta_0}(p_i))\subset V_{\delta}(f^m(p_i))$，$i=1,2$，任取 $q_i\in V_{\delta_0}(p_i)\cap P(f)$，$i=1,2$. 则 $d(f^m(q_1),f^m(q_2))\geqslant d(f^m(p_1),f^m(p_2))-d(f^m(p_1),f^m(q_1))-d(f^m(p_2),f^m(q_2))>\varepsilon_0-\frac{2}{3}\varepsilon_0>\frac{1}{3}\varepsilon_0$，故 $\mathrm{diam}(f^m(V(p)\cap P(f)))>\frac{1}{3}\varepsilon_0$，从而 $P(f)$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性.

**定理5**　设 $X$ 为无限集，$f\in C^{\circ}(X,X)$，$f$ 拓扑可迁且 $\overline{P(f)}=X$，则 $P(f)$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性.

**证明**　由文[5]和已知条件，$f$ 敏感依赖于初始条件，从而 $\overline{P(f)}$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性，由定理4，$P(f)$ 对 $f$ 具有局部度量不稳定性.

**致谢** 感谢杨润生教授的悉心指导！

## [参考文献]


[1]　杨润生.圆周自映射周期点集的局部度量稳定性[J].南京师大学报(自然科学版)，1988，4:14—16.

[2]　Coppel W A. Continuous maps of an interval[M]. Xerored Notes，1984.

[3]　张筑生.自映射的转移不变集[J].数学学报，1984，27(4):564—576.

[4]　杨润生.伪轨跟踪与伪移位不变集[J].数学年刊，1997，18A(5):617—622.

[5]　Banks J. On Devaney's definition of Chaos[J]. Amer Math Mon，1992，99(4):332—334.


# The Locally Metric Stability of the Set of Period Points


Yan Zhenzhen

(College of Mathematics and Computer Science，Nanjing Normal University，Nanjing，210097，PRC)


**Abstract**: In this paper，a necessary and a sufficient condition for the continuous map on a compact metric space whose set of period points has the property of locally metric stability is obtained.

**Key words**: locally metric stability; pesudo-shifting invariant set; semi-pesudo-shifting invariant set; pesudo-orbit tracing property

[责任编辑：陆炳新]