具特定奇点分布的一个三次系统

肖 敏

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 给出了一个具体的三次系统,它的有限远奇点中有四个构成一凹四边形,三个外顶点为焦点,而另一个内顶点为鞍点.这是二次系统所不能出现的结构.这一具体实例证明了文[1]中的一个猜测.

[关键词] 奇点;二次系统;三次系统;Berlinskii 定理
[中图分类号]O175.1; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)02-0018-02

0 引言

叶彦谦在文[1]中讨论了一个类似于二次系统的三次系统:

$$\begin{cases}\dot{x} = -y + \delta x + lx^2 + mxy + ny^2 = P_2(x,y)\\ \dot{y} = x(1 + ax + qx^2 + by) = Q_3(x,y)\end{cases} \tag{1}$$

当 $q=0$ 时(1)就是一般的二次系统.文中分析了系统(1)与二次系统的奇点分布的异同.并且给出了(1)中系数的一些具体数值例子.一方面,它们所具有的奇点分布与二次系统有着明显的不同.譬如,此类三次系统中两个指标 $+1$,两个指标 -1 的奇点可以构成一个凹的四边形.但根据 Berlinskii 定理[2].这种结构在二次系统中是不可能出现的.另一方面,此类三次系统的奇点分布与二次系统又有一定的相似.文[1]中给出这样一个例子,它的四个奇点构成一个凹的四边形,其中三个外顶点指标为 $+1$,且两个为焦点,一个为结点,另一个内顶点指标 -1,为鞍点.二次系统中也会出现这种结构.但如果三个外顶点均为焦点,这在二次系统中就不可能,因此任何二次系统最多只能有两个焦点型奇点,见文[2].文[1]中猜测,对于(1)这种结构有可能实现,但未能给出具体的例子.下面一节我们将给出这样一个具体例子.

1 具有三个焦点包围一个鞍点的结构的系统

考虑系统:

$$\begin{cases}\dot{x} = -y + x - \dfrac{5}{8}x^2 + 2xy - y^2 = P(x,y)\\ \dot{y} = x\left(1 - \dfrac{3}{10}x^2 + 2y\right) = Q(x,y)\end{cases} \tag{2}$$

将 $P(x,y)=0$ 与 $1-\dfrac{3}{10}x^2+2y=0$ 消去 y 得:

收稿日期:2000-12-07
基金项目:国家自然科学基金资助项目(编号 19871041)
作者简介:肖敏,1977—,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,从事常微分方程的学习与研究.

$$0.09x^4 - 1.2x^3 + 2.5x^2 - 1 = 0. \tag{3}$$

通过数值计算,可得出(3)的四个实根的近似值:

$$x_1 = 0.788, x_2 = 2.3435, x_3 = -0.5591, x_4 = 10.7609.$$

相对应的 $y_i = \frac{3}{20}x_i^2 - \frac{1}{2}$,可计算得:

$$y_1 = -0.4096, y_2 = 0.3238, y_3 = -0.4531, y_4 = 16.8695.$$

因此 $A_1(0.788, -0.4096)$, $A_2(2.3435, 0.3238)$, $A_3(-0.5591, -0.4531)$,和 $A_4(10.7609, 16.8695)$ 为系统(2)在抛物线 $1 - \frac{3}{10}x^2 + 2y = 0$ 上的四个奇点. 此外(2)在 y 轴上还有两个奇点 $O(0,0)$, $N(0,-1)$. 所以(2)共有六个奇点. 它们的分布如图 1 所示.

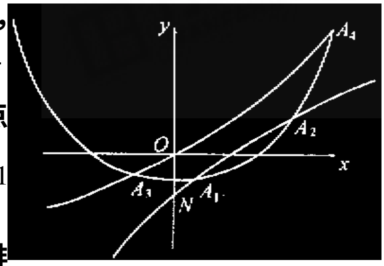

图 1　奇点分布图

由于 N, A_1, A_2 在双曲线 $P(x,y) = 0$ 的同一支上依次排列,且 A_1 在第四象限,故 $0, N, A_2, A_1$ 构成一个凹四边形.

对于 $O(0,0)$,其线性部分的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,\text{特征根 } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2},$$

所以 O 为不稳定焦点.

对于 $N(0,-1)$,特征方程为

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0,\text{特征根 } \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\mathrm{i}}{2},$$

所以 N 为稳定焦点.

对于 $A_2(2.3435, 0.3238)$,特征方程为

$$\begin{vmatrix} -1.2818-\lambda & 3.0394 \\ -3.2952 & 4.687-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3.4052\lambda + 4.0076 = 0,\text{特征根}$$

$\lambda_{1,2} = \frac{3.4052 \pm \sqrt{4.435}\mathrm{i}}{2}$,所以 A_2 为不稳定焦点.

对于 $A_1(0.788, -0.4096)$,特征方程为

$$\begin{vmatrix} -0.8042-\lambda & 1.3952 \\ -0.3780 & 1.576-\lambda \end{vmatrix} =$$

$\lambda^2 - 0.7718\lambda - 0.74 = 0$,

特征根 $\lambda_1\lambda_2 = -0.74 < 0$. 所以 A_1 为鞍点.

综上所述,O 为不稳定焦点,N 为稳定焦点,A_2 为不稳定焦点,A_1 为鞍点. 其相应于文[1]中图 3(3)的结构如图 2. 因此文[1]中猜测得以证实.

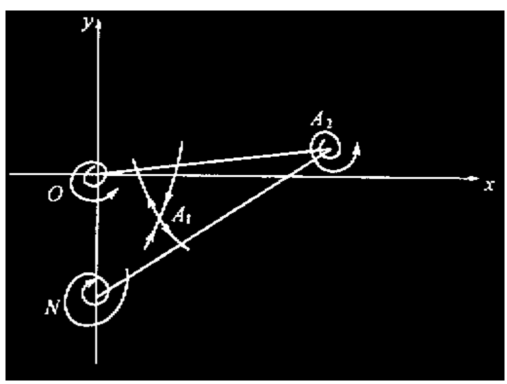

图 2　三个焦点包围一个鞍点的结构图

(下转 22 页)

（上接 19 页）

[参考文献]

[1] Ye Yanqian. A special cubic system close related to the general quadratic system[J]. Ann of Diff Eqs，1999，3：319—326.

[2] 叶彦谦.极限环论[M].上海：上海科学技术出版社，1984.

A Cubic System with Special Distribution of Critical Point

Xiao Min

（College of Mathematics and Computer Science，Nanjing Normal University，Nanjing，210097，PRC）

Abstract：The paper gives a concrete cubic system which has 6 finite critical points. Four of them form the vertices of a concave quadrilateral，among which 3 outer vertices are foci，1 inner vertex is a saddle. This distribution is impossible for the quadratic system. The numerical example proves the conjecture of [1].

Key words：critical points；quadratic system；cubic system；Berlinskii theorem

[责任编辑：陆炳新]