关于 John Beebee 的一个问题

朱群生

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 回答了 John Beebee 关于不相交同余覆盖的一个问题.

[关键词] 不同余精确覆盖,等差数列,同余

[中图分类号]O156; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)02-0020-03

用$(d:b)$记等差数列$\{x:x=b+ad,a\in \mathbf{Z}\}$,等差数列簇$\{(n_i:a_i)\}\{i\in I\}$称为一个不同余精确覆盖,如果这个等差数列簇满足以下条件:

$$\bigcup_{i\in I}(n_i:a_i)=Z,$$

$$(n_i:a_i)\cap(n_j:a_j)=\varnothing,i,j\in I,i\neq j,$$

$$n_i\neq n_j,i,j\in I,i\neq j.$$

当 I 为无穷集合时,称为无穷不同余精确覆盖.

如果 I 为有限集,则容易导出 $\sum_{i\in I}\frac{1}{n_i}=1$,当 I 为无限集时,陈永高[2] 证明了如下的定理:

定理[2] 对任意的 $\alpha\in(0,1]$,一定存在无穷不同余精确覆盖 $\{n_i:a_i\}_{i=1}^{i=\infty}$,使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}=\alpha.$$

另一方面,如果 n_i 满足 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}=\alpha,\alpha\in(0,1]$,那么是否存在 a_i,使得 $\{n_i:a_i\}_{i=1}^{i=\infty}$ 为一个无穷不同余精确覆盖?实际上,即使对于 $\alpha=1$ 情形,也未必存在这样的 a_i.在文献[1]中,John Beebee 曾提出以下问题:

记

$$d_{ij0}=2^i3^j,1\leqslant i,j\leqslant\infty,$$

$$d_{0jk}=3^j5^k,1\leqslant j,k\leqslant\infty,$$

$$d_{i0k}=2^i5^k,1\leqslant i,k\leqslant\infty,$$

$$d_{ijk}=2^i3^j5^k,1\leqslant i,j,k\leqslant\infty.$$

则 $\sum d_{ijk}^{-1}=1$,问是否存在 b_{ijk},使$(d_{ijk}:b_{ijk})$是一个无穷不同余精确覆盖?

本文否定了这样的 b_{ijk} 的存在.

证明 (反证法)

假定存在这样的 b_{ijk},使得 $\{d_{ijk}:b_{ijk}\}_{i,j,k=1}^{\infty}$ 是一无穷不同余精确覆盖.我们设法导出矛盾.

收稿日期:2000-03-10

作者简介:朱群生,1963—,南京师范大学数学与计算机科学学院讲师,从事数论的教学与研究.

万方数据

对于正整数 i,j,k 有

$(d_{1k0}:b_{1k0})\cap(d_{i0j}:b_{10j})=\emptyset$,

$(d_{ij0}:b_{ij0})\cap(d_{i0k}:b_{10k})=\emptyset$,

$(d_{01k}:b_{01k})\cap(d_{1j0}:b_{ij0})=\emptyset$,

$(d_{1k0}:b_{1k0})\cap(d_{i10}:b_{i10})=\emptyset(i>1 \text{ or } k>1)$.

因而有

$(d_{1k0},d_{i0j})\nmid b_{1k0}-b_{i0j}$,

$(d_{ij0},d_{\lambda 0k})\nmid b_{ij0}-b_{i0k}$,

$(d_{01k},d_{ij0})\nmid b_{01k}-b_{ij0}$,

$(d_{1k0},d_{i10})\nmid b_{1k0}-b_{i10}$.

即

$$2\nmid b_{1k0}-b_{i0j} \tag{1}$$

$$2\nmid b_{ij0}-b_{i0k} \tag{2}$$

$$3\nmid b_{01k}-b_{ij0} \tag{3}$$

$$6\nmid b_{1k0}-b_{i10}(i>1 \text{ or } k>1) \tag{4}$$

由(1)可以得到 对于正整数 i,j

$$b_{i0j}\equiv b_{110}+1(\bmod 2) \tag{5}$$

由(2)和(5)得 对于正整数 i,j

$$b_{ij0}\equiv b_{110}(\bmod 2) \tag{6}$$

由(6)式得,对于正整数 i,k

$$2\mid(b_{1k0}-b_{i10}) \tag{7}$$

由(3)式得,对于正整数 i,j

$$b_{ij0}\equiv b_{011}+1 \text{ or } b_{011}+2(\bmod 3) \tag{8}$$

由(4)式和(7)式得:

$3\nmid b_{1k0}-b_{110}(k>1)$,

$3\nmid b_{110}-b_{i10}(i>1)$.

此即

$$b_{1k0}\not\equiv b_{110}(\bmod 3)(k>1) \tag{9}$$

$$b_{i10}\not\equiv b_{110}(\bmod 3)(i>1) \tag{10}$$

由(8)(9)(10)得

对于任意的 $k>1$ 和 $i>1$ 成立

$$b_{1k0}\equiv b_{i10}(\bmod 3) \tag{11}$$

由(7)和(11)式得

$6\mid(b_{1k0}-b_{i10})$,

同(4)式矛盾.

万方数据

[参考文献]

[1] John Beebee. Examples of Infinite Incongruent Exact Covers Amer[J]. Math. Monthly, 1988, 95(2): 121—123.
[2] 陈永高. On Infinite disjoint Congruence Covering Systems[J]. 数学季刊, 1996, 11(3): 36—39.
[3] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京: 科学出版社, 1972.

On a Problem of John Beebee

Zhu Qunsheng
(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing, 210097, PRC)

Abstract: In this paper, a problem of John Beebee concering infinite incongruent exact covers is solved.

Key words: infinite incongruent exact covers; arithmetic sequence; congruence

[责任编辑: 陆炳新]

(上接19页)

[参考文献]

[1] Ye Yanqian. A special cubic system close related to the general quadratic system[J]. Ann of Diff Eqs, 1999, 3: 319—326.
[2] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.

A Cubic System with Special Distribution of Critical Point

Xiao Min
(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing, 210097, PRC)

Abstract: The paper gives a concrete cubic system which has 6 finite critical points. Four of them form the vertices of a concave quadrilateral, among which 3 outer vertices are foci, 1 inner vertex is a saddle. This distribution is impossible for the quadratic system. The numerical example proves the conjecture of [1].

Key words: critical points; quadratic system; cubic system; Berlinskii theorem

[责任编辑: 陆炳新]

万方数据