

漂移波与电子相互作用方程的数值解

华正和 李晓卿

(南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210097)

[摘要] 给出了在均匀强外磁场中,由存在密度梯度的束电子激起的低频漂移波与等离子体相互作用方程的数值解.根据解出的波谱和电子分布函数进一步求出了等离子体湍动物质流和湍动热导率的大小,并给出了特定情形下的具体数值估计.

[关键词] 等离子体 漂移波 湍动物质流 湍动热导率

[中图分类号] O53; [文献标识码] A; [文章编号] 1001-4616(2001)02-0042-05

0 引言

与无漂移运动等离子体相比,漂移运动的存在将导致等离子体波的调制,经过调制的波称作漂移波.漂移波是与等离子体的不均匀性联系在一起的,而等离子体(包括空间等离子体)都可能存在不均匀性,因此对漂移波的研究就显得极为重要.无碰撞等离子体中存在的漂移波模有阿尔芬调制波模、离子声调制波模、离子回旋调制波模、低频混杂调制波模等.首次从理论上指出漂移不稳定的是 Tserkovnikov;漂移波与粒子相互作用的准线性方程则由 Galeev 和 Rudakov 给出^[1],方程的形式并不复杂,但由于方程的维数较高而难以求解.但是准线性方程在一定条件下可化为类似一维形式的方程,这样的方程类似于准一维的束电子与波线性相互作用方程^[2].本文采用适当的变量代换,并采用了一定的近似,求出了低频漂移波与电子相互作用的准线性方程的数值解,并进一步求出了湍动物质流和湍动热导率.虽然求解过程中采用了近似,但相对于直接根据单个方程去作量级估计也是一大进步.

1 分析与计算

采用无碰撞等离子体模型,在均匀外磁场中漂移波(纵振荡)与电子相互作用的准线性方程为^[1]:

$$\frac{\partial N_k^l}{\partial t} = \frac{e^2 N_k^l}{\pi m_e k^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} |_{\omega=\omega^l}} \int (k_z \frac{\partial f_e}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{H_e}} \frac{\partial f_e}{\partial y}) \delta(\omega^l - k_z v_z) dp + \frac{e^2}{\pi \hbar k^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} |_{\omega=\omega^l}} \int f_e \delta(\omega^l - k_z v_z) dp,$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \int (k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{H_e}} \frac{\partial}{\partial y}) \left[\frac{\hbar e^2 N_k^l \delta(\omega^l - k_z v_z)}{\pi m_e^2 k^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} |_{\omega=\omega^l}} (k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{H_e}} \frac{\partial}{\partial y}) f_e + \frac{e^2 \delta(\omega^l - k_z v_z)}{\pi m_e k^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} |_{\omega=\omega^l}} f_e \right] dk,$$

收稿日期 2000-10-23

作者简介:华正和,1971—,南京师范大学物理科学与技术学院硕士研究生,主要从事等离子体中波与粒子相互作用的学习与研究.

其中 N_k^l 为谱激元数, f_e 为电子分布函数, ω_{H_e} 为电子回旋频率, ϵ 为等离子体介电常数, 其他的量具有通常的涵义. 方程推导过程中以外磁场方向为 z 轴方向, 波矢 $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$. 以磁离子声波为例, 则 $\omega^l = \omega_s = \frac{k_z v_s}{(1 + k_z^2 L_e^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} |_{\omega = \omega^l} \approx \frac{2\omega_{pi}^2}{\omega_s^3}$, 其中 v_s 为离子声速, L_e 为电子德拜

长度. 为了简化方程, 作变量代换, 取无量纲量: $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{V_{Ti}}$, $\mathbf{q} = L_i \mathbf{k}$, $Y = \frac{y}{L_i}$, $\tau = \frac{\omega_{pi} m_i}{8\pi^2 n_i L_i^3 m_e} t$,

$F(\mathbf{u}, Y, \tau) = (L_i m_e V_{Ti})^3 f_e$, $P(\mathbf{q}, Y, \tau) = \frac{\hbar \omega_{pi} m_i}{4\pi e^2 n_i L_i^2 m_e} N_k^l$, $U_s = \frac{v_s}{V_{Ti}}$, 其中 V_{Ti} 、 ω_{pi} 、 n_i 、 $L_i = \frac{V_{Ti}}{\omega_{pi}}$ 为

基础等离子体的离子相应量. 假定基础分布为麦氏分布, 由于 $V_{Ti} \ll v_s \ll V_{Te}$, 因此基础分布的离子、电子不参与共振相互作用, 方程中的 f_e 可认为是扣除基础分布的电子分布函数, 通过变

量代换得 $\omega_s = \omega_{pi} \frac{q_z U_s}{(1 + q_z^2 U_s^2)^{\frac{1}{2}}}$, 方程简化为:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\omega_s^3 P}{\omega_{pi}^2 q^2} \left[\left(q_z \frac{\partial}{\partial u_z} - \frac{q_x V_{Ti}}{L_i \omega_{H_e}} \frac{\partial}{\partial Y} \right) F \cdot \delta(\omega_s - \omega_{pi} q_z u_z) \mathbf{d}\mathbf{u} + \frac{\omega_s^3}{\omega_{pi} q^2} \int F \cdot \delta(\omega_s - \omega_{pi} q_z u_z) \mathbf{d}\mathbf{u} \right],$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \int \left(q_z \frac{\partial}{\partial u_z} - \frac{q_x V_{Ti}}{L_i \omega_{H_e}} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \frac{\omega_s^3 \delta(\omega_s - \omega_{pi} q_z u_z)}{\omega_{pi}^2 q^2} \left\{ P \left(q_z \frac{\partial}{\partial u_z} - \frac{q_x V_{Ti}}{L_i \omega_{H_e}} \frac{\partial}{\partial Y} \right) F + F \right\} \mathbf{d}\mathbf{q}.$$

若初始时刻 N_k^l 为 k_x 的偶函数, f_e 也为 y 的偶函数, 则由方程的对称性可知 N_k^l 、 f_e 将始终保持这一奇偶性. 若 $\frac{\partial f_e}{\partial y} > 0$, 则在 $y < 0$ 区间随时间增长的为 $q_x < 0$ 的波, 而在 $y > 0$ 区间随

时间增长的为 $q_x > 0$ 的波. 在 q_x 方向取窄波包近似, 在 $y < 0$ 区间, q_x 取中心波矢量 $-\tilde{q}_x$, 在 $y > 0$ 区间, q_x 取中心波矢量 \tilde{q}_x , 认为 $\Delta q_x \ll |\tilde{q}_x|$; 令 $\tilde{P} = \int P dq_x dq_y$, $\tilde{F} = \int F du_x du_y$, 并

且假定 $|q_z| \gg |\tilde{q}_x|$. 为了书写简单, 在完成积分后略去 \tilde{P} 、 \tilde{F} 上的“ \sim ”号和 u_z 的下标 z , 仍用 y 记 Y , 然后令 $(1 - \frac{u^2}{U_s^2}) \frac{P}{u^3} = J$, 得:

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = u^2 J \left(\left(1 - \frac{u^2}{U_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial u} \pm \alpha u \frac{\partial}{\partial y} \right) F + \left(1 - \frac{u^2}{U_s^2} \right) F,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial}{\partial u} \pm \frac{\partial}{\partial y} u \alpha \left(1 - \frac{u^2}{U_s^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial J}{\partial \tau},$$

其中 $\alpha = \frac{|\tilde{q}_x| V_{Ti}}{L_i \omega_{H_e}}$; “+”号对应 $y < 0$ 的区域; “-”号对应 $y > 0$ 的区域. 引入变量

$$\eta = u, \xi = y \pm \alpha \left(1 - \frac{u^2}{U_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} U_s^2,$$

$$\text{易得 } \frac{\partial J}{\partial \tau} = \eta^2 \left(1 - \frac{\eta^2}{U_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} J \frac{\partial F}{\partial \eta} + \left(1 - \frac{\eta^2}{U_s^2} \right) F,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 J}{\partial \eta \partial \tau}.$$

此方程组形式与 Grogard^[2] 得到的一维方程组形式基本相同, 在 $\xi = \text{const}$ 的情况下完全可当作一维的方程组来做数值解, 对不同 ξ 的值做出一系列数值解 ($F(\eta, \xi, \tau)$, $J(\eta, \xi, \tau)$), 万方数据

然后利用坐标反变换得 $(F(u, y, \tau), \mathcal{J}(u, y, \tau))$. 对速度积分即得坐标空间的“波能量密度” $u(y)$ 和粒子“数密度” $n(y)$:

$$n(y) = \int F du,$$

$$u(y) = \int \frac{Ju}{\left(1 - \frac{u^2}{U_s^2}\right)} du,$$

式中的 $n(y)$ 是一无量纲量, 相当于 $(2\pi L_i)^3 n_e$; $u(y)$ 是根据波能量密度 $W(y) = \int \hbar\omega N_k$

$\frac{dk}{(2\pi)^3}$ 得来. 利用同样的无量纲化手续可得

$$W(y) = \frac{\frac{1}{2} m_e V_{Ti}^2}{4\pi^2 L_i^3} u(y).$$

初始 $\tau = 0$ 时取 $J_0 = \frac{1}{u^3} \left(1 - \frac{u^2}{U_s^2}\right)^{\frac{1}{2}}, F_0 = 100e^{-y^2/4} e^{-(u-22)^2}$, 同时取 $U_s = 25, \alpha = 1$, 作出

$\tau = 0.5 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-4}, 1.5 \times 10^{-4}$ 时的 $n(y)$ 及 $u(y)$ 如图 1 中的 (a) 及 (b) 所示.

有了波谱和粒子分布函数, 可进一步求解湍动物质流 $\langle nv_y \rangle^T$ 和湍动热导率 $\kappa^{[3]}$.

$$\langle nv_y \rangle^T = - \int \frac{\hbar e^2 k_x N_k \delta(\omega' - k_z v_z)}{\pi m_e^2 k^2 \omega_{H_e} \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} |_{\omega = \omega'}} \left(k_z \frac{\partial}{\partial v_z} - \frac{k_x}{\omega_{H_e}} \frac{\partial}{\partial y} \right) f_e d\mathbf{k} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3},$$

$$\kappa = \int \frac{\hbar e^2 k_x^2 N_k \delta(\omega' - k_z v_z) f_{\perp}(v_z)}{\pi m_e^2 k^2 \omega_{H_e}^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \omega} |_{\omega = \omega'}} \frac{dp_z}{(2\pi)^3} d\mathbf{k}.$$

推导 κ 时要求 f_e 可写成 $f_e = n(y) f_{\perp}(v_{\perp}) f_{\parallel}(v_z)$ 的形式, 且 $f_{\perp}(v_{\perp})$ 满足 $\int f_{\perp}(v_{\perp}) d\mathbf{p}_{\perp} = 1$.

利用同样的无量纲化手续, 易得:

$$\langle nv_y \rangle^T = \alpha^2 \frac{m_i V_{Ti}}{64\pi^5 m_e n_i L_i^2} g_1,$$

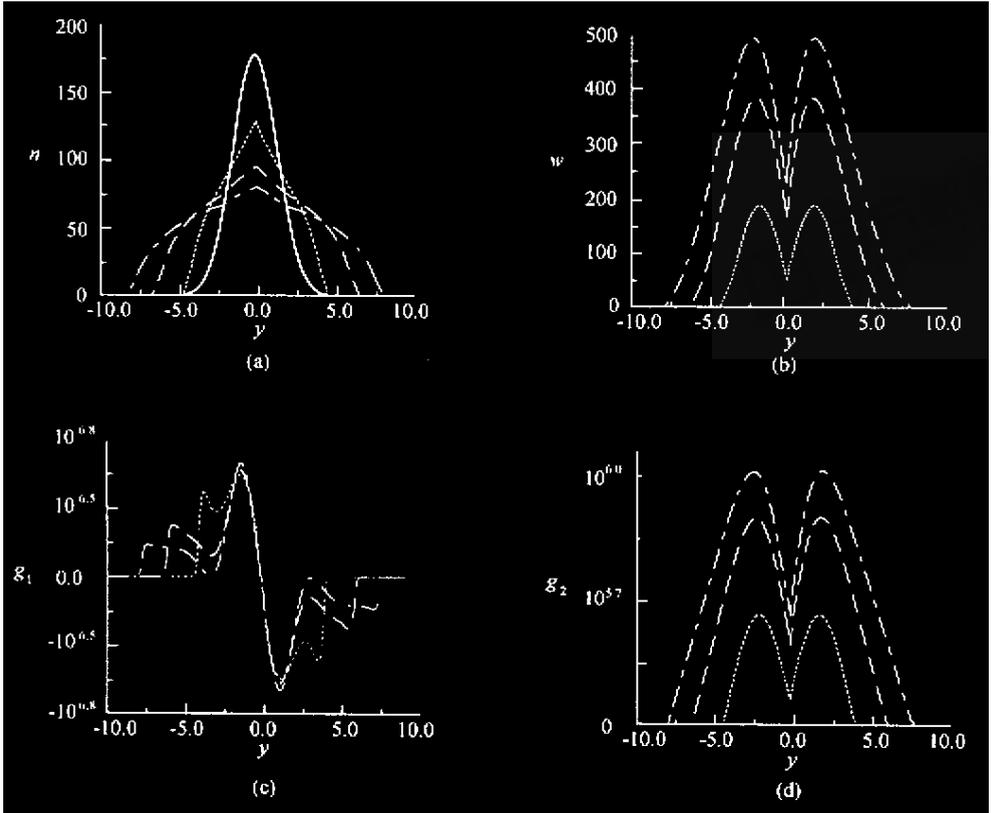
$$\kappa = \alpha^2 \frac{m_i V_{Ti}}{8\pi^2 m_e n_i L_i^2} g_2,$$

其中 g_1, g_2 为:

$$g_1(y) = \int u^4 \left(1 - \frac{u^2}{U_s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} J \frac{\partial F}{\partial y} du,$$

$$g_2(y) = \int u^4 \left(1 - \frac{u^2}{U_s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} J F du / \int F du.$$

同样的初始条件, 作出 $\tau = 0.5 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-4}, 1.5 \times 10^{-4}$ 时的 g_1, g_2 , 如图 1 中的 (c) 及 (d) 所示.



点线、长划线、点划线分别对应 $\tau = 0.5 \times 10^{-4}, 1.0 \times 10^{-4}, 1.5 \times 10^{-4}$ 图(a)中的实线对应 $\tau = 0$

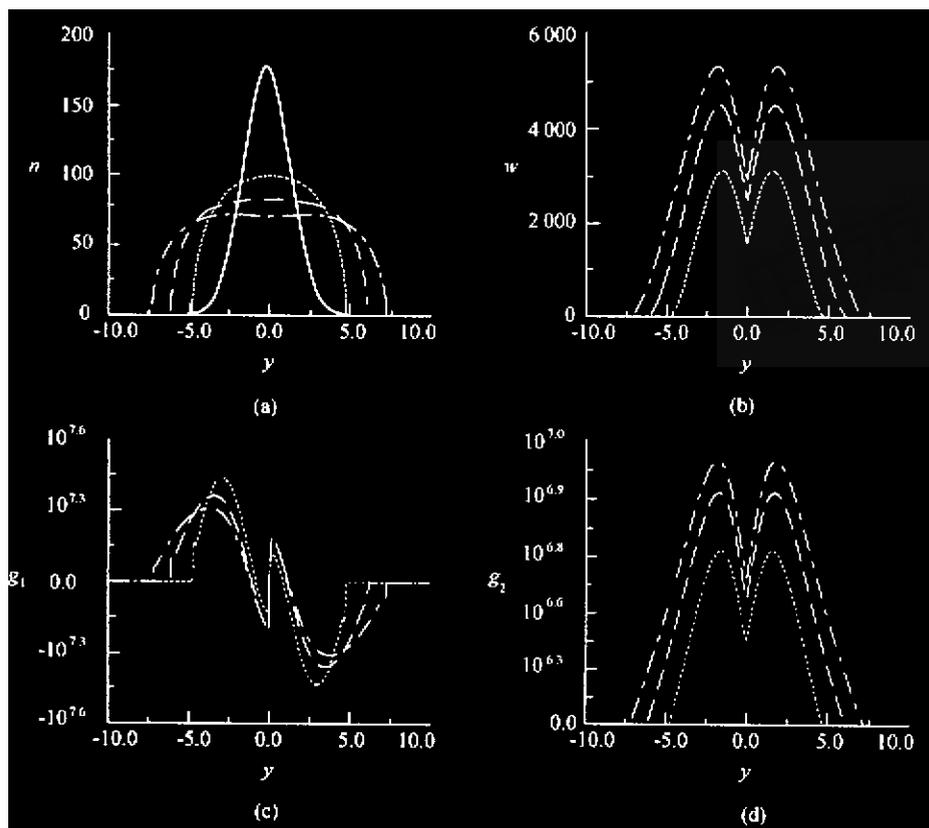
图1 $\alpha = 1$ 时电子数密度、波能量密度、湍动物质流和湍动热导率的分布

2 结果讨论

(1) 离子声波存在条件 $T_i \ll T_e$,即 $V_{Ti} \ll v_s \ll V_{Te}$,基础电子、离子与离子声波无共振相互作用,文中的电子分布为扣除基础分布的束电子,其热展宽为 V_{Ti} ,束速度为 $22V_{Ti}$,与离子声波存在共振相互作用。

(2) 取电离层等离子体离子参数作为基础离子参数 (n_i, ω_{pi}, L_i) $\sim (10^{12} \text{m}^{-3}, 1.5 \times 10^6 \text{s}^{-1}, 2 \times 10^{-3} \text{m})$,由此得出漂移波存在区间尺度 ΔL 、湍动激发的时间 Δt 、湍动波能量密度 W 、湍动物质流 $\langle nv_y \rangle^T$ 和湍动热导率 κ 近似为 $2 \times 10^{-2} \text{m}, 3 \times 10^{-8} \text{s}, 4 \times 10^{-15} \text{J/m}^3, 7 \times 10^{12} \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}, 6 \times 10^3 \text{m}^2/\text{s}$ 。

(3) 计算中取 $\alpha = 1$,湍动激发的时间量级 $\tau \sim 1.0 \times 10^{-4}$,对于无空间梯度的束电子与离子声波相互作用,湍动激发的时间量级 $\tau \sim 1.0 \times 10^{-3}$ [4] ,由此可知,此时方程中的空间梯度项很重要。取 $\alpha = 0.1$,进一步的计算得知,此时湍动激发的时间量级 $\tau \sim 1.0 \times 10^{-3}$,如图2所示。由此可推断,当 $\alpha < 0.1$ 时,空间梯度项可忽略,因为 α 与磁场强度成反比,所以可认为磁场足够强时,束粒子很难散开。



点线、长划线、点划线分别对应 $\tau = 1.0 \times 10^{-3}, 2 \times 10^{-3}, 3 \times 10^{-3}$ 图(a)中的实线对应 $\tau = 0$
 图 2 $\alpha = 0.1$ 时的电子数密度、波能量密度、湍动物质流和湍动热导率的分布

[参考文献]

[1] 李晓卿. 湍动等离子体物理 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1987. 97—117.
 [2] Grogard R J M. Deficiencies of the asymptotic solution commonly found in the quasilinear relaxation theory [J]. Aust J Phy, 1975, 28: 731—753.
 [3] Tsytovich V N. Theory of turbulent plasma [M]. New York and London: Consultants Bureau, 1977. 187—189.
 [4] 华正和, 李晓卿. 束离子与离子声波准线性相互作用的研究 [J]. 南京师大学报(自然科学版), 2000, 23(3): 45—48.

Numerical Solution of Interaction between Drift Wave and Electrons Equations

Hua Zhenghe, Li Xiaoqing

(College of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, PRC)

Abstract: The numerical solution of the interaction between the drift wave and the electron beam in which there is density gradient is given. Then by using the solution, the turbulent flow of matter, the turbulent thermal conductivity are obtained, a numerical estimate in some condition is given.

Key words: plasma; drift wave; turbulent flow of matter; turbulent thermal conductivity

[责任编辑: 丁蓉]