Hamilton 图的一个充分条件

唐德和

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 证明如下结果:G 是简单图满足条件:对 G 中任一对不相邻顶点 u、v,有 $\max\{d(u),d(v)\}+|N(u)\cup N(v)|\geqslant n-1$;且对任意 $T\subset V(G)$,有 $\omega(G\setminus T)\leqslant|T|$,则 G 是 Hamilton 图.

[关键词] 简单图;Hamilton 图;最长图

[中图分类号]O157.5; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)03-0033-03

本文中未加定义的概念与记号均见[1].

定理 若阶数 $n\geqslant 3$ 的简单图 G 满足下述两条件:1)G 中任一对不相邻点 u、v,有 $\max\{d(u),d(v)\}+|N(u)\cup N(v)|\geqslant n-1$;2)任意 $T\subset V(G)$,有 $\omega(G\setminus T)\leqslant|T|$,则 G 为 Hamilton 图.

证明 为方便起见,先引进一些记号.设 C 是图 G 中的圈,给定 C 的一个方向,对于 x、$y\in V(C)$,设在 C 的定向下 y 后于 x,分别用记号 xCy 和 yC^-x 表示圈 C 上从 x 到 y 和从 y 到 x 的节,同时也表示该节上的顶点集.用 x^+ 和 x^- 分别表示 x 在 C 上的后继点和前承点,类似有 x^{++}、x^{--} 等.设 S 是 $V(G)$ 的子集,定义 $\Delta(S)=\max\{d(u)\mid u\in S\}$.

如果 G 不是 Hamilton 图,设 C 是 G 中任一最长圈,$C=v_1v_2\cdots v_tv_1$,$t<n$.设 B 是 $G\setminus V(C)$ 的任一分支,$N_c(B)=\{v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_m}\}$,$N^-=\{v_{i_1}^-,v_{i_2}^-,\cdots,v_{i_m}^-\}$,由条件 2,$m\geqslant 2$.设 x_j 是 B 中和 v_{i_j} 相邻的任一点(对 $k\neq j$,可能有 $x_k=x_j$).设 u、$v\in N_c(B)$,用 uBv 表示从 u 经 B 到 v 的路.

根据文[2].有如下引理 1—6:

引理 1 对任意 $x\in V(B)$,$N^-\cup\{x\}$ 是独立集.

对任意 $j(1\leqslant j\leqslant m)$,引理 1 意味着 $v_{i_{j+1}}^-\notin N(v_{i_j}^-)$,因此,存在 $V_{h_j}\in\{V_{i_j}^+,V_{i_j}^{++},\cdots,V_{i_{j+1}}^-\}$,使得 $V_{h_j}\notin N(V_{i_j}^-)$,但对任意 $i_j\leqslant r<h_j$,$v_r\in N(v_{i_j}^-)$.这里 $v_{i_{m+1}}=v_{i_1}$,$v_t^+=v_1$.令 $H_j=\{v_{i_j}^+,v_{i_j}^{++},\cdots,v_{h_j}\}$,$u_j$ 是 H_j 中任一点,令 $H=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$.

引理 2 对任意 $x\in V(B)$,$H\cup\{x\}$ 是独立集.

引理 3 对任意 u、$v\in H$,$x\in V(B)$,$|N(u)\cup N(v)|\leqslant n-d(x)-1$.

引理 4 对 $G\setminus V(C)$ 的任一分支 B',$|N_H(B')|\leqslant 1$.

引理 5 设 u_j、$u_k\in H(j<k)$,则对任意 $w\in u_j^+Cu_k^-$,$u_jw\notin E(G)$ 或 $u_kw^-\notin E(G)$;对任意 $w\in u_k^+Cu_j^-$,$u_jw\notin E(G)$ 或 $u_kw^-\notin E(G)$.

引理 6 对任意 $x\in V(B)$,$d(v_{h_j})\leqslant n-|N(v_{h_{j-1}})\cup N(x)|-1(1\leqslant j\leqslant m)$.

收稿日期:2000-11-19

作者简介:唐德和,1949—,南京师范大学数学与计算机科学学院讲师,从事图论的教学与研究.

记 $H^* = \{v_{h_1}, v_{h_2}, \cdots, v_{h_m}\}$, $S = H^* \cup \{x\}$, $x \in V(B)$.

由定理条件 1 和引理 3 易得 $d(x) \leqslant \Delta(H^*)$. 根据[3] P31—32,有如下引理 7—10:

引理 7　S 中至多有一点 u, $d(u) < \Delta(S)$.

引理 8　$|N(v_{h_{j-1}}) \cup N(x)| = n - d(v_{h_j}) - 1$.

引理 9　对任意 $v \in v_{h_{j-1}}^+ C v_{h_j}^-$,或者 $v \in N(v_{h_{j-1}}) \cup N(x)$,或者 $v^- v_{h_j} \in E(G)$ 对任意 $v \in v_{h_j}^+ C v_{h_{j-1}}^-$,或者 $v \in N(v_{h_{j-1}}) \cup N(x)$,或者 $v^+ v_{h_j} \in E(G)$.

引理 10　任意 $j(1 \leqslant j \leqslant m)$, $v_{i_j}^+ = v_{h_j}$, $v_{i_j} v_{i_{j+1}}^+ \in E(G)$.

定义 $N^+ = \{v_{i_1}^+, v_{i_2}^+, \cdots, v_{i_m}^+\}$,则 $N^+ \cup \{x\}$ 是独立集. 由对称性且由上述引理,有

性质 1　任意 $j(1 \leqslant j \leqslant m)$, $v_{i_{j-1}}^- v_{i_j} \in E(G)$.

性质 2　$V(G) = V(C) \cup V(B)$.

证明　假定存在 $G \setminus V(C)$ 的另一分支 B'.

情形 1　$m \geqslant 3$. 由引理 6 的证明和引理 8,或者 $V_{h_{j-1}} \in N(B')$,或者 $v_{h_j} \in N(B')$. 从而存在 $k \neq j$, $v_{h_j} \in N(B')$, $v_{h_k} \in N(B')$,与引理 4 矛盾.

情形 2　$m = 2$,先证 $G \setminus V(C)$ 的每个分支是完全图. 不妨设 $|V(B')| \geqslant |V(B)|$,则 $n \geqslant |V(C)| + 2|V(B)| \geqslant 2|V(B)| + 4$. 如果 B 不是完全图,则存在 x、$y \in V(B)$, $xy \notin E(G)$. $n - 1 \leqslant \max\{d(x), d(y)\} + |N(x) \cup N(y)| \leqslant 2|V(B)|$. 矛盾. 如果 B' 不是完全图,则 $n \leqslant 2|V(B')| + 1$. 由引理 4,设 $v_{h_1} \notin N(B')$,对任意 $x \in V(B)$, $\max\{d(x), d(V_{h_1})\} + |N(x) \cup N(v_{h_1})| \leqslant 2(n - |V(B)| - |V(B')| - 2) + |V(B)| - 1 < n - 1$,矛盾. 所以 $G \setminus V(C)$ 的每个分支是完全图. 记 $V_1 = V_{i_1}^+ C V_{i_2}^-$, $V_2 = V_{i_2}^+ C V_{i_1}^-$,有 $|V(B)| \leqslant |V_i|$ $(i = 1, 2)$.

情形 2.1　存在 V_i,使 $|V_i| = |V(B)|$. 由引理 7,可设 $d(x) = \Delta(S_1)$ $(S_1 = \{v_{h_1}, v_{h_2}, x\}$,否则考虑另一最长圈). $n - 1 \leqslant \max\{d(x), d(v_{h_1})\} + |N(x) \cup N(v_{h_1})| \leqslant 3d(x) - |N(x) \cap N(v_{h_1})| \leqslant 3d(x) - 1$. $d(x) \geqslant \dfrac{n}{3}$,从而 $n \geqslant 2|V(B)| + |V(C)| \geqslant 4|V(B)| + 2 \geqslant 4(d(x) - 1) + 2 \geqslant \dfrac{4}{3}n - 2$,得 $n \leqslant 6$. 所以:$|V(B)| = |V(B')| = 1$, $|V(C)| = 4$,与定理条件 2 矛盾.

情形 2.2　$|V_i| > |V(B)|$ $(i = 1, 2)$,从而 $|V(C)| \geqslant 2|V(B)| + 4 \geqslant 6$. 任意 $x \in V(B)$, $y \in V(B')$, $n - 1 \leqslant \max\{d(x), d(y)\} + |N(x) \cup N(y)| \leqslant |V(B')| + 1 + (|V(B)| + |V(B')| + 2) \leqslant \dfrac{1}{2}|V(C)| + |V(B)| + |V(B')| + 2$,得 $|V(C)| = 6$. 从而 $|V_1| = |V_2| = 2$. 由 v_{h_j} 的定义和引理 1, $[v_1, v_2] = \phi$. 又由定理条件 2, $|N_c(B) \cap N_c(B')| = \phi$,从而 $N_c(B') = \{v_{i_1}^-, v_{i_1}^+\}$ 或 $\{v_{i_2}^-, v_{i_2}^+\}$,均可得更长圈,矛盾.

性质 3　$m \geqslant 3$ 时, $|V(B)| = 1$, $v_{i_j} = v_{i_{j-1}}^{++}$.

证明　因为 $v_{i_{j+1}}^+ \notin N(V_{h_{j-1}}) \cup N(x)$,所以 $v_{i_{j+1}}^{++} \in N(v_{h_j})$. 如果 $|V(B)| \neq 1$,则有更长圈 $v_{i_{j+1}}^{++} v_{i_j}^+ C v_{i_{j+1}} B v_{i_j} C^- v_{i_{j+1}}^{++}$,矛盾. 由引理 8, $|N(v_{h_{j-1}}) \cup N(x)| = d(v_{h_{j-1}}) + d(x) - |N(v_{h_{j-1}}) \cap N(x)| = n - d(v_{h_j}) - 1$, $n - 1 = d(v_{h_{j-1}}) + d(v_{h_j}) + d(x) - |N(v_{h_{j-1}}) \cap N(x)| \leqslant 3\Delta(S) - 2$, $\Delta(S) \geqslant \dfrac{n+1}{3}$. 由引理 7,可设 $d(x) = \Delta(S)$,(否则考虑上述最长圈),从而存在 k, $v_{i_k} = v_{i_{k-1}}^{++}$. 对

任意 j、l，由引理 3 和定理条件 1，$|N(v_{h_j})\cup N(v_{h_l})| = n - d(x) - 1 = n-(m+1)$，从而 $N(v_{h_j})\cup N(v_{h_l}) = V \setminus S$. 如果存在 j，$v_{i_j}^{++} \neq v_{i_{j+1}}$，不妨设 $j=k$，则 $v_{i_k}^{++}Cv_{i_{k+1}} \subseteq N(v_{h_{k-2}})\cup N(v_{h_{k-1}})$. 因为 $v_{h_{k-1}} = v_{i_k}^-$，$v_{i_{k+1}}^- \notin N(v_{h_{k-1}})$，从而 $v_{i_{k+1}}^- \in N(v_{h_{k-2}})$. 由引理 5 有 $v_{i_{k+1}} \notin N(v_{h_{k-1}})$，与性质 1 矛盾.

由性质 3，令 $T = N_c(B)$，则 $\omega(G\setminus T) = m+1$. 与定理条件 2 矛盾. 所以 $m \geqslant 3$ 时，G 为 Hamilton 图.

下面假设 $m=2$.

性质 4　存在 $N(v_{h_2})\cup N(v_{h_2}) = V(C)\setminus H$.

否则，存在 $u \in V(C)\setminus H$，$u \notin N(v_{h_1})\cup N(v_{h_2})$. 不妨设 $u \in v_{i_1}^{++}Cv_{i_2}^-$，由 C 是最长圈，得 $|B|=1$. 由 $m=2$，可设 $d(u)=2$，从而由性质 1 可知，$u \neq v_{i_2}^-$. 因此 $n \geqslant 8$. 任意 $x \in B$，$\max\{d(x), d(u)\} + |N(x)\cup N(u)| \leqslant 6$，矛盾.

由性质 4，如果 $v_{i_2}^- \neq v_{h_1}$，则 $v_{i_2}^- \in N(v_{h_1})$，从而 $v_{i_2}^{--} \notin N(v_{h_2})$. 如果 $v_{i_2}^{--} \neq v_{h_1}$，则 $v_{i_2}^{--} \in N(v_{h_1})$. 依次可得 $N(v_{h_1}) \supseteq v_1 \setminus \{v_{h_1}\}$. 同样 $N(v_{h_2}) \supseteq V_2 \setminus \{v_{h_2}\}$. 由定理条件 2，$[V_1, V_2] \neq \phi$，即存在 $u \in V_1$，$v \in V_2$，$uv \in E(G)$，从而 $v_{i_1}Bv_{i_2}C^-u^+v_{i_1}^+CuvC^-v_{i_2}^+v^+Cv_{i_1}$ 是 Hamilton 圈. 定理证毕.

[参考文献]

[1]　Bondy J A，Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. The Macmillam Press，1976.

[2]　宋增民. 图论与网络最优化[M]. 南京：东南大学出版社，1990.

[3]　陶培华，宋增民. 关于 2-连通 Hamilton 图的充分条件[J]. 南京大学学报(图论专辑)，1991.

A Sufficient Condition for Hamilton Graph

Tang Dehe

(School of Mathematics and Computer Science，Nanjing Normal University，Nanjing，210097，PRC)

Abstract：In this paper，we prove the following result：Let G be a simple graph of order $n(\geqslant 3)$. If for any disconnected vertexes u and v $\max\{d(u), d(v)\} + |N(u)\cup N(v)| \geqslant n-1$，and for any $T \subset V(G)$，$w(G\setminus T) \leqslant |T|$，then G is a Hamilton graph.

Key words：simple graph G；Hamilton graph；longest loop　　[责任编辑：陆炳新]

(上接 32 页)

On One Problem of Integral Functions

Zhang Xinhua

(Nanjing University of Posts and Telecommunications，Nanjing，210003，PRC)

Abstract：In this paper，we give the terms of $\alpha > 0$ and $\beta > 0$，so that the equation $[\alpha[\beta n]] = [n\alpha] + [n\beta]$ can be established for arbitrary $n \in \mathbf{N}$.

Key words：integral functions；uniform distribution　　[责任编辑：陆炳新]