# $s$-Hamilton-连通图的一个充分条件

邵叶红,徐敏

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 证明了下面的结论:设 $G$ 是 $n$ 阶 $(k+2+s)$-连通图,$G^*$ 为 $G$ 的部分平方图,$k \geqslant 2$,而 $(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})$ 是 $k$-LTW 序列.若对于每个 $X \in I_{k+1}(G^*)$,在 $G$ 中有 $\sum_{i=1}^{k+1} a_i s_i(X) > n+s$,则 $G$ 是 $s$-Hamilton-连通图.

[关键词] $s$-Hamilton-连通图;插点方法;LTW 序列;部分平方图

[中图分类号] O157.5; [文献标识码] A; [文章编号] 1001-4616(2001)04-0007-05

## 0 引言

本文只讨论有限简单图,文中未加定义的概念与记号,可见[1].

设 $G$ 为图,$s$ 是非负整数.若对满足 $|S| = s$ 的任意集合 $S(\subseteq V(G))$,总有 $G$-$S$ 是 Hamilton-连通图,则称 $G$ 为 $s$-Hamilton-连通图.

设 $\{x_1,x_2\} \subseteq V(G)$,令

$J(x_1,x_2) = \{u \mid u \in N(x_1) \cap N(x_2), N(u) \subseteq N(x_1) \cup N(x_2) \cup \{x_1,x_2\}\}$.

$G$ 的部分平方图 $G^*$ 是满足下列条件的图:$V(G^*) = V(G)$,且 $E(G^*) = E(G) \cup \{x_1x_2 \mid x_1x_2 \notin E(G)$,且 $J(x_1,x_2) \neq \emptyset\}$.

设 $t > 1$ 为整数,令 $I_t(G) = \{Z \mid Z$ 是 $G$ 的独立集,$|Z| = t\}$.

设 $Z$ 为图 $G$ 的独立集,如果存在 $\{z_1,z_2\} \subseteq Z$,使得 $\mathrm{dist}(z_1,z_2) = 2$,则称 $Z$ 为本质集,其中 $\mathrm{dist}(v,z)$ 表示 $v$ 与 $z$ 的距离.设 $t > 1$ 是整数.记 $I_t^{(e)}(G) = \{Z \mid Z$ 是 $G$ 的本质集,$|Z| = t\}$.

设 $Y \subseteq V(G)$,且 $|Y| = t$.对任意 $i \in \{0,1,\cdots,t\}$,令 $S_i(Y) = \{v \mid v \in V(G), |N(v) \cap Y| = i\}$,$s_i(Y) = |S_i(Y)|$.这是文[2]中给出的邻域交的概念.设 $X, Y$ 为 $V(G)$ 的子集,令 $\mathrm{dist}(X,Y) = \min\{\mathrm{dist}(u,v) \mid u \in X, v \in Y\}$ 并令

$N_i(Y) = \{v \mid v \in V(G), \mathrm{dist}(v,Y) = i\} (i = 0,1,\cdots,t)$,

$n(Y) = |N_0(Y) \cup N_1(Y) \cup N_2(Y)| = |\{v \mid v \in V(G), \mathrm{dist}(v,Y) \leqslant 2\}|$.

对于上述记号,在涉及到另一图 $G'$ 时,将在记号上加撇来表示.

对于整数 $k \geqslant 2$,非负有理数序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{k+1})$ 称为 $k$-LTW 序列,如果

(1) $a_1 \leqslant 1$,

收稿日期:2001-02-11
基金项目:国家自然科学基金(19971043)和江苏省教育厅自然科学基金资助项目
作者简介:邵叶红,1976—,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,主要从事图论的学习与研究.
通讯联系人:周兴和,1950—,南京师范大学数学与计算机科学学院副教授,主要从事图论的教学与研究.

(2) 对于满足$\sum_{j=1}^{h} i_j \leqslant k+1$的任意的$i_1, i_2, \cdots, i_h \in \{2, 3, \cdots, k+1\}$,有$\sum_{j=1}^{h}(a_{i_j}-1) \leqslant 1$.

LTW-序列首次出现在文[3].

关于$s$-Hamilton-连通图,已有的一个充分条件如下:

**定理 1**[4] 设$G$是$(k+1+s)$-连通图,$k \geqslant 2$,而$(a_1, a_2, \cdots, a_{k+1})$是$k$-LTW 序列.若对于每个$X \in I_{k+1}{}^{(e)}(G)$,在$G$中有$\sum_{i=1}^{k+1} a_i s_i(X) > n(X)+s$,则$G$是$s$-Hamilton-连通图.

**问题 1** 设$G$是$(k+1+s)$-连通图,$k \geqslant 2$,而$(a_1, a_2, \cdots, a_{k+1})$是$k$-LTW 序列.若对于每个$X \in I_{k+1}(G^*)$,在$G$中有$\sum_{i=1}^{k+1} a_i s_i(X) > n+s$,则$G$是$s$ – Hamilton – 连通图.

## 1 有关引理

设$G$是$n$阶连通的非 Hamilton 图,$C$是$G$的一个极大圈,$H$是$G-V(C)$的一个分支.设$u \in C(v, v')$,如果存在某个顶点$w \in C[v', v)$,使得$\{w, w^+\} \subseteq N(u)$,则$u$称为$C$上关于$C(v, v')$的可插点(简称$u$是可插点).我们有下列引理.

**引理 1**[5,6] 设$\{v, v'\} \subseteq N_C(H)$.若$C(v, u)(\subseteq C(v, v'))$中的所有顶点都是可插点,则

(1) 存在一条$(u, v)$路$P$,使得$V(P)=V(C)$;

(2) $u \notin N_C(H)$,从而在$C(v, v')$中存在第一个不可插点$x$.且若$w \in N(x) \cap C[v', v)$,则$w^+ \notin N(x)$.

设$V_C=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \subseteq N_C(H)(m \geqslant 2)$,$X_C=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$是$V_C$关于$H$的第一个不可插点集合.

**引理 2**[5,6] 对于任意$\{i, j\} \subseteq \{1, 2, \cdots, m\}$,如果$y_i \in C(v_i, x_i]$,$y_j \in C(v_j, x_j]$,有

(1) 不存在$(y_i, y_j)$-路$Q$,使得$Q$上所有内点不在$V(C)$上;

(2) 不存在$w \in C(y_i, v_j)$,使得$\{y_j w, y_i w^+\} \subseteq E(G)$.

**引理 3**[5,6] 若$u \in N_C(H)$,则$u^+ \notin N_C(H)$;

**引理 4**[5,6] 如果$u \in N_C(H) \setminus \{v_i\}$,$i \in \{1, 2, \cdots, m\}$,则对于任意$x \in C(v_i, x_i)$,$u^+ x \notin E(G)$.

任取$x_0 \in V(H)$,设$X=\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_m\}$,$J_X=\bigcup_{i=1}^{m} C[x_i, v_{i+1}]$,$K_X=V(G) \setminus J_X$,有

**引理 5**[5,6] $X \in I_{m+1}(G)$,$K_X \subseteq S_0(X) \cup S_1(X)$,$K_X \cap N_0(X)=\{x_0\}$.

对于$X$,设$C[z_1, z_2) \subseteq C[x_t, v_{t+1}](t \in \{1, 2, \cdots, m\})$,如果(1) $C(z_1, z_2) \cap S_0(X)=\varnothing$,(2) $z_1 \in N_2(X) \cup X$,$z_2 \in S_0(X) \cup \{v_{t+1}^+\}$,则$C[z_1, z_2)$称为 CX-区间.CX-区间$C[z_1, z_2)$称为简单的,若$C(z_1, z_2) \subseteq S_1(X)$.

**引理 6**[5,6] 设$C[z_1, z_2)(\subseteq C[x_t, v_{t+1}]$,对某个$t \in \{1, 2, \cdots, m\})$是 CX-区间.则下列结论成立:

(1) 设$M_i=N(x_i) \cap C(z_1, z_2)(i \in \{0, 1, 2 \cdots, m\})$,则$M_t, M_{t-1}, \cdots, M_1, M_m, M_{m-1}, \cdots, M_{t+1}, M_0$(其中可能有的是空集)在$C(z_1, z_2)$中构成相继的子路,它们仅可能在端点公共.并且对$i \in \{0, 1, 2, \cdots, m\} \setminus \{t\}$,有$|M_i| \leqslant 1$;

(2) 设$Z_1=C(z_1, z_2) \cap S_1(X)$,$Z_2=C(z_1, z_2) \setminus Z_1=\{w_1, w_2, \cdots, w_h\}$,$w_j \in S_{i_j}(X)(j \in$

$\{1,2,\cdots,h\}$).则

(a) $|Z_1| + |Z_2| = |C[z_1,z_2)| - 1$.

(b) $i_1,i_2,\cdots,i_h \in \{2,3,\cdots,m+1\}$, $\sum_{j=1}^{h} i_j \leqslant m+1$.

**引理 7**[5,6] 设 $X_l = \{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{l+1}}\} \subseteq X$, $i_1,i_2,\cdots,i_{l+1} \in \{0,1,\cdots,m\}$.若 $C$ 上有 $\lambda$ 个简单 $CX_l$- 区间,则对于 $l$-LTW- 序列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{l+1})$ 有:

$$\sum_{i=1}^{l+1} a_i s_i(X) \leqslant n(X_l) - \tau - |N_2(X_l) \cap K_{X_l}| - \lambda,$$

其中当 $x_0 \in X_l$ 时,$\tau = 1$ 否则 $\tau = 0$.

**引理 8**[7] $X \in I_{m+1}(G^*)$.

**引理 9**[8] 设 $G'$ 为图,$W \subseteq V(G')$,且 $G = G' - W$.若 $Z \in I_t(G')^*)$,且 $Z \subseteq V(G)$,则对于每个 $\{z_i,z_j\} \subseteq Z$,有 $(V(G) \setminus N'_G(W)) \cap J(z_i,z_j) = \varnothing$,从而当 $N'_G(W) \cap J(z_i,z_j) = \varnothing$(对于任意 $\{z_i,z_j\} \subseteq Z$)时,有 $Z \in I_t(G^*)$.

## 2 定理 2 的证明

本文论及的圈 $C$ 或路 $P$,总假定被指定了一个方向.设 $x \in V(C)$,分别用 $x^+$ 和 $x^-$ 表示 $C$ 上沿其方向 $x$ 的后继点和前承点,类似地有 $x^{++}$,$x^{--}$ 等.

**定理 2 的证明** 用反证法.假设 $G$ 满足条件,但不是 $s$-Hamilton- 连通图,即存在某个 $S \subseteq V(G)$,使得 $|S| = s$,且 $G' = G - S$ 不是 Hamilton- 连通图,则存在 $\{u_1,u_2\} \subseteq V(G')$,使得 $G'$ 中最长的 $(u_1,u_2)$- 路 $P$ 不是 Hamilton 路.其起点为 $u_1$,终点为 $u_2$.

设 $H$ 是 $G' - V(P)$ 的一个分支.在 $G'$ 上添加新顶点 $w$,新边 $u_1w$,$u_2w$,设所得的图为 $G''$,则 $C = P[u_1,u_2]wu_1$ 是 $G''$ 的极大圈,但不是 $G''$ 的 Hamilton 圈.取其方向与 $P$ 一致,易见 $H$ 也是 $G' - V(C)$ 的分支.

于是可设 $N''_C(H) = N'_P(H) = N_P(H) = \{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$,且设 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 依次排列于 $C$ 上,在 $G''$ 的 $C$ 上用插点的方法对分支 $H$ 进行插点,$\bar{X} = \{x_1,x_2,\cdots,x_{m-1}\}$ 是基于 $N''_C(H)$ 的 $N''_C(H) \setminus \{v_m\}$ 的第一个不可插点集合.

下面将证明一系列断言,最后得到矛盾.

**断言 1** 不存在 $X \subseteq \bar{X}$,使得 $X \in I_{k+1}(G^*)$.

用反证法.假设存在 $X \subseteq \bar{X}$,使得 $X \in I_{k+1}(G^*)$(由于 $G$ 是 $(k+2+s)$- 连通图,则 $m - 1 \geqslant k+1$,故 $\bar{X}$ 中存在 $k+1$ 个顶点的独立集).则由 $G' = G - S$,对于 $i \in \{0,1,\cdots,k+1\}$ 便有 $s_i(X) = s'_i(X) + q_i$,且 $s = \sum_{i=0}^{k+1} q_i$.令 $s' = \sum_{i=1}^{k+1} q_i$,$n(X) = n'(X) + \mu$,便有 $s \geqslant s'$,$\mu \geqslant s'$.注意到 $n(X) = |N_0(X) \cup N_1(X) \cup N_2(X)|$,当存在 $x_0 \in V(H) \cap (N_0(X) \cup N_1(X) \cup N_2(X))$ 时(即 $x_0 \in V(H) \cap N_2(X)$)时,令 $\tau' = 1$.且 $n - 1 = |V(G - x_0)| \geqslant n(X) - \tau'$.否则,令 $\tau' = 0$,且 $n - 1 \geqslant |V(G - V(H))| \geqslant |N_0(X) \cup N_1(X) \cup N_2(X)| = n(X) - \tau'$.故 $n - 1 \geqslant n(X) - \tau'$.

由 $k$ - LTW 序列的定义,对于每个 $i \in \{1,2,\cdots,k+1\}$,有 $a_i \leqslant 2$,于是

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i s_i(X) \leqslant \sum_{k=1}^{k+1} a_i s'_i(X) + 2s' \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} a_i s'_i(X) + u + s \quad (1)$$

由 $G''$ 的结构，$n''(X) \leqslant n'(X)+1$ 对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,k+1\}$ 有 $s''_i(X)=s'_i(X)$，则由(1)式及引理7得，$\sum_{i=1}^{k+1}a_is'_i(X)+u+s=\sum_{i=1}^{k+1}a_is''_i(X)+u+s\leqslant n''(X)+u+s-\tau'\leqslant n'(X)+1+u+s-\tau'=n(X)+1+s-\tau'\leqslant n+s$，与假设矛盾.

断言2　对任意 $X\subseteq\bar{X}$，$|X|=k+1$，有 $X\in I_{k+1}((G')^*)$.

先证对任意 $\{x_i,x_j\}\subseteq\bar{X}$，有 $\{u_1,u_2\}\cap J'(x_i,x_j)=\varnothing$.

反设 $\{u_1,u_2\}\cap J'(x_i,x_j)\neq\varnothing$，则或者 $u_1\in J'(x_i,x_j)$，或者 $u_2\in J'(x_i,x_j)$. 若前者成立，则 $u_1\in N'(x_i)\cap N'(x_j)$，且 $N'(u_1)\subseteq N'[x_i]\cup N'[x_j]$，而当 $u_1\neq v_1$ 时，由引理1(2)有 $u_1^+\in N'(u_1)\setminus(N'[x_i]\cup N'[x_j])$ 矛盾. 当 $u_1=v_1$ 时，取 $u_1$ 在 $H$ 中的邻点 $x_0$，$x_0\in N'(u_1)\setminus(N'[x_i]\cup N'[x_j])$ 矛盾. 若后者成立，则 $u_2\in N'(x_i)\cap N'(x_j)$，且 $N'(u_2)\subseteq N'[x_i]\cup N'[x_j]$，当 $u_2\neq v_m$ 时，由引理1(2)有 $u_2^-\in N'(u_2)\setminus(N'[x_i]\cup N'[x_j])$ 矛盾. 当 $u_2=v_m$ 时，取 $u_2$ 在 $H$ 中的邻点 $x'_0$，$x'_0\in N'(u_2)\setminus(N'[x_i]\cup N'[x_j])$ 矛盾. 故 $N''(w)\cap J'(x_i,x_j)=\{u_1,u_2\}\cap J'(x_i,x_j)=\varnothing$，由引理8，$X\in I_{k+1}((G'')^*)$，任取 $X\subseteq\bar{X}$，$|X|=k+1$. 再由引理9，$X\in I_{k+1}((G')^*)$.

断言3　若存在某 $\{x_i,x_j\}\subseteq\bar{X}$，使得 $J(x_i,x_j)\neq\varnothing$，则 $J(x_i,x_j)\subseteq S$，且若 $t\in J(x_i,x_j)$，则对任意的 $x\in(\bar{X}\setminus\{x_i,x_j\})\cup V(H)$，有 $t\notin N(x)$，从而，若 $t\in N_S(H)$，则对任意的 $\{x_i,x_j\}\subseteq\bar{X}$，有 $t\notin J(x_i,x_j)$.

用反证法. 假设 $J(x_l,x_{l'})\neq\varnothing$，$\{x_l,x_{l'}\}\subseteq\bar{X}$，但 $J(x_l,x_{l'})\not\subseteq S$，则存在某个 $u\in J(x_l,x_{l'})\cap V(G')$. 于是 $u\in N(x_l)\cap N(x_{l'})$，且 $N(u)\subseteq N[x_l]\cup N[x_{l'}]$，则有 $u\in N'(x_l)\cap N'(x_{l'})$，且 $N'(u_2)\subseteq N'[x_l]\cup N'[x_{l'}]$，由此 $u\in J'(x_l,x_{l'})$，这与断言2矛盾.

假设存在某个 $x'\in\bar{X}\setminus\{x_l,x_{l'}\})\cup V(H)$，使得 $t\in N(x')$，则由 $J(x_l,x_{l'})$ 的定义，有 $x'\in N(t)\subseteq N[x_l]\cup N[x_{l'}]$，从而 $x'\in N'[x_l]\cup N'[x_{l'}]$，与引理5矛盾.

断言4　存在 $X\subseteq\bar{X}$，使得 $X\in I_{k+1}(G^*)$.

设 $T_0=N_S(H)=\{w_1,w_2,\cdots,w_{t_0}\}$，$T_1=S\setminus T_0=\{w'_1,w'_2,\cdots,w'_{t_1}\}$. 由此有 $m-1\geqslant k+t_1+1$. 在 $T_1$ 中对于 $i\in\{1,2,\cdots,t_1\}$，若存在 $\{x_{l_i},x_{l'_i}\}\subseteq\bar{X}$，使得 $w'_i\in J(x_{l_i},x_{l'_i})$，则在 $\bar{X}$ 中删去顶点 $x_{l_i}$，否则在 $\bar{X}$ 中不删去顶点. 由断言3，对任意 $\{x_i,x_j\}\subseteq\bar{X}\setminus\{x_{l_i}\}$，有 $w'_i\notin J(x_i,x_j)$. 如上述在 $\bar{X}$ 中删去某些顶点后所得的顶点集记为 $X'$. 因为在 $\bar{X}$ 中至多删去 $t_1$ 个顶点，故有 $m'=|X'|\geqslant k+1$. 由断言3，任意 $\{x_i,x_j\}\subseteq X'$，任意的 $w\in S$，有 $w\notin J(x_i,x_j)$，故 $X'\in I_{m'}(G^*)$.

取 $X\subseteq X'$，使得 $|X|=k+1$，$X\in I_{k+1}(G^*)$.

显然断言4与断言1矛盾，由此，定理2证毕.

致谢 感谢吴正声、刘一平、周兴和、孙志人老师的指导和帮助.

## [参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. Macmillan, London and Elsevir, New York, 1976.

[2] Schiermyer I. Neighborhood intersections and hamiltonicity[J]. Proceedings in Applied Mathematics 54, Graph Theory, Combinatories, Algorithms and Applications, Alavi Y, *et al*. SLAM, 1991, 79—95.

[3] Liu Y,Tian F,Wu Z. A sufficient condition for $k$-H-nice and $(k+1)$-HC-nice sequence[J]. J Nanjing Normal University(Natural Science),1994,17(1):1—8.

[4] 邹园. 图的 $m$-Hamilton 性[J]. 南京师大学报(自然科学版),1997,20(2):21—24.

[5] Liu Y,Tian F,Wu Z. Sequence concerning hamiltonicity of graphs[J]. J Nanjing Normal University(Natural Science),1995,18(1):19—28.

[6] Wu Z,Xu X,Zhou X. The neighborhood intersections of essential sets and hamiltonicity of graphs[J]. Sys Sci and Math Scis,1998,11:230—237.

[7] Ainouche A,Kouider M. Hamiltonism and partially square Graphs[J]. Graphs and Combinatorics,1999,15(3):257—265.

[8] Wu Z,Zhang X,Zhou X. Hamiltonicity,neighborhood intersections and partially square graphs[J]. Disc. Math,2001,242:245—254.

# A Sufficient Condition for $s$-Hamilton-Connected Graphs

Shao Yehong,Xu Min

(School of Mathematics and Computer Science,Nanjing Normal University,Nanjing,210097,PRC)

**Abstract**:Let $G$ be a $(k+s+2)$-connected graph of order $n$ with $k \geqslant 2$,and $(a_1, a_2, \cdots, a_{k+1})$ be a $k$-LTW-sequence. If $\sum_{i=1}^{k+1} a_i s_i(Z) > n+s$ for each $Z \in I_{k+1}(G^*)$,then $G$ is $s$-Hamilton-Connected,where $G^*$ denotes the partially square graph of $G$.

**Key words**:$s$-Hamilton-Connected graph;vertex inserting;LTW-sequences;partially square graphs

[责任编辑:陆炳新]

---

(上接 6 页)

# 几乎 Hamilton 连通图和部分平方图

吴正声,周兴和

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] $G$ 为图,$G^*$ 是 $G$ 的部分平方图. 运用$(k+2)$连通图$(k \geqslant 2)$上的插点技术,借助 LTW 序列对 $G^*$ 中独立集的邻域交加权,证明了图 $G$ 是几乎 Hamilton 连通的一些充分条件.

[关键词] 几乎 Hamilton 性;部分平方图;LTW 序列

[责任编辑:陆炳新]