奇围长为 5 的本原对称有向图的局部指数集

徐新萍

(江苏教育学院数学系,南京,210009)

[摘要] 设 D 是一个本原有向图且 $u\in V(D)$,D 在 u 点的指数,记作 $\exp_D(u)$,定义为这样的一个最小正整数 k,它使得对任意 $v\in V(D)$,D 中均有 u 到 v 的长为 k 的有向通道.设 $V(D)=\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $\exp_D(1)\leqslant\exp_D(2)\leqslant\cdots\leqslant\exp_D(n)$.本文研究了奇围长为 5 的 n 阶本原对称有向图,并得到其局部指数集的完全刻划.

[关键词] 有向图;本原;局部指数

[中图分类号]O157.5 [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)04-0024-04

0 引言

设 D 是一个有向图,若存在一个正整数 k 使得对任意点对 u,v(未必不相同),D 中均有从 u 到 v 的长为 k 的有向通道,则称 D 是本原有向图,而上述的最小 k 称为 D 的指数,记作 $\gamma(D)$.熟知,一个有向图 D 是本原的当且仅当 D 是强连通的且其所有圈长的最大公因数是 1.

设 D 是一个本原有向图,且 $u\in V(D)$,D 在 u 点的指数,记作 $\exp_D(u)$,定义为这样一个最小正整数 k,它使得对任意 $v\in V(D)$,D 中均有 u 到 v 的长为 k 的有向通道.设 $V(D)=\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $\exp_D(1)\leqslant\exp_D(2)\leqslant\cdots\leqslant\exp_D(n)$,则称 $\exp_D(k)$ 为 D 的第 k 个局部指数.显然,$\exp_D(n)=\gamma(D)$.

设 D 是一个本原有向图,且 $u,v\in V(D)$,定义 u 到 v 的指数 $\exp_D(u,v)$ 是这样的一个最小正整数 p,它使得只要 $m\geqslant p$,D 中就有 u 到 v 的长为 m 的有向通道.易见,$\exp_D(u)=\max\limits_{v\in V(D)}\exp_D(u,v)$.

设 S 是一些 n 阶本原有向图的集合.对其中图的局部指数的研究主要集中在如下三个方面:

(1)确定 $\max\limits_{D\in S}\exp_D(k)$;

(2)确定达到上述最大值的图的特征;

(3)确定局部指数集 $\{\exp_D(k)\mid D\in S\}$.

对所有 n 阶本原有向图的集合 PD_n,上述问题已被[2],[7]~[9]和[11]~[14]完全解决.另外,还有一些特殊图类被[3],[4],[6]和[10]研究.设 $SPD_{n,g}$ 表示奇围长为 g 的 n 阶本原有向图的集合,令 $E(SPD_{n,g},k)=\{\exp_D(k)\mid D\in SPD_{n,g}\}$.1992 年,$E(SPD_{n,g},n)$ 已被[5]解决.对 $1\leqslant k\leqslant n-1$,本文考察了 $E(SPD_{n,5},k)$,并得到如下结果:

收稿日期:2001-03-19

作者简介:徐新萍,1964—,女,江苏教育学院数学系副教授,南京师范大学数学与计算机科学学院在读博士,主要从事图论的教学与研究.

定理

$$E(SPD_{n,5},k)=\begin{cases}\{4\}, & 若\ 5\leqslant n\leqslant 6\ 且\ 1\leqslant k\leqslant 4;\\ \{4,5\}, & 若\ n=6\ 且\ k=5;\\ \{4,5,\cdots,n-3\}, & 若\ n\geqslant 7\ 且\ 1\leqslant k\leqslant 2;\\ \{4,5,\cdots,n-2\}, & 若\ n\geqslant 7\ 且\ 3\leqslant k\leqslant 4;\\ \{4,5,\cdots,n-6+k\}, & 若\ n\geqslant 7\ 且\ 5\leqslant k\leqslant n-1.\end{cases}$$

1 引理及其证明

引理 1 [1]设 $2\leqslant k\leqslant n$,则有 $\exp_D(k)\leqslant\exp_D(k-1)+1$.

设 C 是一个长为 $g(\geqslant 3)$ 的奇圈且 $v\in V(C)$,则在 C 上必有两点 v',v'' 使得 v 到 v' 和 v'' 的距离均为$\frac{r-1}{2}$,此时称 $v'(v'')$为 v 的反极.

引理 2 设 $n\geqslant 7$ 且 $D\in SPD_{n,5}$,则

$$\exp_D(k)\leqslant\begin{cases}n-3, & 若\ 1\leqslant k\leqslant 2;\\ n-2, & 若\ 3\leqslant k\leqslant 4;\\ n-6+k, & 若\ 5\leqslant k\leqslant n.\end{cases}$$

证明 当 $n=7$ 时,则 D 必有如下的子图 D_1 或 D_2 或 D_3(参见图 1).此时,容易验证引理成立.故以下总假定 $n\geqslant 8$.

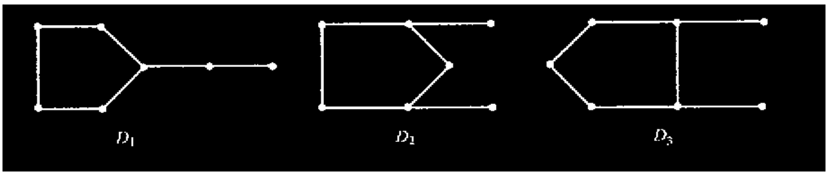

图 1 D 的子图

设 C 是 D 的一个 5-圈.我们先证存在 $v',v''\in V(C)$使得 $\exp_D(v')\leqslant n-3$ 且 $\exp_D(v'')\leqslant n-3$.设 $l=\max\limits_{u\in V(D)}d(u,V(C))$并设 $d(u_0,V(C))=l$,不妨令 P 是 u_0 到 C 的最短路(长为 l)且 $V(P)\cap V(C)=\{v_0\}$.设 v'与 v''是 v_0 在 C 上的两个反极.对任意 $x\in V(D)$,我们分如下三种情形:

(1)若 $x\in V(C)$,则 $\exp_D(v',x)\leqslant 4$.

(2)若 $x\in V(P)$,则 $\exp_D(v',x)\leqslant 2+l\leqslant 2+n-5=n-3$.

(3)$x\notin V(C)\cup V(P)$,设 x 到 C 的距离为 l',则 $l+l'\leqslant n-5$ 且 $l'\leqslant l$,从而 $l'\leqslant\left[\frac{n-5}{2}\right]$.因为 $n\geqslant 8$,所以 $l'\leqslant n-7$,故有 $\exp_D(v',x)\leqslant 4+n-7=n-3$.

综合(1)~(3)即得 $\exp_D(v')\leqslant n-3$.同理可证,$\exp_D(v'')\leqslant n-3$.故 $\exp_D(1)\leqslant n-3$ 且 $\exp_D(2)\leqslant n-3$.

考虑 $v'(v'')$在 C 上的另一个邻点,得 $\exp_D(3)\leqslant n-2$ 且 $\exp_D(4)\leqslant n-2$.再由引理 1 知当 $5\leqslant k\leqslant n$ 时,$\exp_D(k)\leqslant n-2+k-4=n-6+k$.

引理 3 设 $n\geqslant 5$ 且 $D\in SPD_{n,5}$,则对任意的 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$,有 $\exp_D(k)\geqslant 4$.

证明 若 v 是 5-圈上的任意一点,则 $\exp_D(v,v)=4$.若 v 不是 5-圈上的点,则存在一个奇圈 C,设其长为 r,使得 $\exp_D(v,v)=2d(v,V(C))+r-1\geqslant 4$.故对任意的 $v\in V(D)$,有 $\exp_D(v)\geqslant 4$.故对任意的 k 均有 $\exp_D(k)\geqslant 4$.

以下两个引理可通过直接计算得到,读者可自行验证.

引理 4　设$5\leqslant m\leqslant n-1$且$D_4\in SPD_{n,5}$如图 2 所示,则有

(1)当$6\leqslant m\leqslant n-1$时,

$$\exp_{D_4}(k)\leqslant\begin{cases}m-2, & 若\ 1\leqslant k\leqslant 2;\\ m-1, & 若\ 3\leqslant k\leqslant 4;\\ m-5+k, & 若\ 5\leqslant k\leqslant m;\\ 2m-4, & 若\ m+1\leqslant k\leqslant n.\end{cases}$$

(2)当$m=5$时,

$$\exp_{D_4}(k)\leqslant\begin{cases}4, & 若\ 1\leqslant k\leqslant 4;\\ 5, & 若\ k=5;\\ 6 & 若\ 6\leqslant k\leqslant m.\end{cases}$$

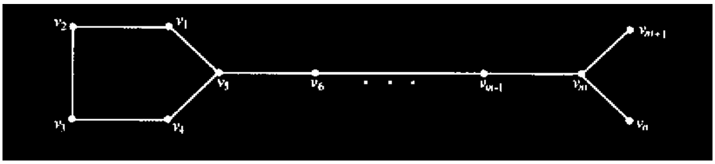

图 2　D_4

引理 5　设$5\leqslant m\leqslant n-2$且$D_5\in SPD_{n,5}$,如图 3 所示,则

$$\exp_{D_5}(k)\leqslant\begin{cases}m-1, & 若\ 1\leqslant k\leqslant 2;\\ m, & 若\ 3\leqslant k\leqslant 4;\\ m-4+k, & 若\ 5\leqslant k\leqslant m;\\ 2m-3, & 若\ m+1\leqslant k\leqslant n-1;\\ 2m-2, & 若\ k=n.\end{cases}$$

图 3　D_5

引理 6　当$1\leqslant k\leqslant 2$时,$\{4,5,\cdots,n-3\}\subset E(SPD_{n,5},k)$;当$3\leqslant k\leqslant 4$时,$\{4,5,\cdots,n-2\}\subset E(SPD_{n,5},k)$.

证明　当$1\leqslant k\leqslant 2$时,让引理 4 中的m取遍集$\{6,7,\cdots,n-1\}$中的所有数,则得$\{4,5,\cdots,n-3\}\subset E(SPD_{n,5},k)$.当$3\leqslant k\leqslant 4$时,让引理 4 中的$m$取遍集$\{6,7,\cdots,n-1\}$中的所有数,则得$\{5,6,\cdots,n-2\}\subset E(SPD_{n,5},k)$.考虑图$D_6$(参见图 4),易得当$3\leqslant k\leqslant 4$时,$4\in E(SPD_{n,5},k)$.

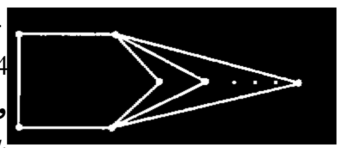

图 4　D_6

引理 7　设$5\leqslant k\leqslant n-1$,我们有$\{2k-5,2k-4,\cdots,n-6+k\}\subset E(SPD_{n,5},k)$.

证明　当$5\leqslant k\leqslant n-1$时,让引理 4 中的$m$取遍集$\{k,k+1,\cdots,n-1\}$中的所有数,即得.

引理 8　设$5\leqslant k\leqslant n-1$,我们有$\{6,8,\cdots,2k-6\}\subset E(SPD_{n,5},k)$.

证明　设$5\leqslant k\leqslant n-1$时,让引理 4 中的$m$取遍集$\{5,6,\cdots,k-1\}$中的所有数,即得.

引理 9　设$5\leqslant k\leqslant n-1$,我们有$\{7,9,\cdots,2k-5\}\subset E(SPD_{n,5},k)$.

证明 当 $5 \leqslant k \leqslant n-1$ 时,让引理5中的 m 取遍集 $\{5,6,\cdots,k-1\}$ 中的所有数,即得.

引理10 设 $5 \leqslant k \leqslant n-1$ 我们有 $\{4,5\} \in E(SPD_{n,5},k)$.

证明 考虑图4中的 D_6,得 $4 \in E(SPD_{n,5},k)$. 考虑图 D_7(参见图5),得 $5 \in E(SPD_{n,5},k)$.

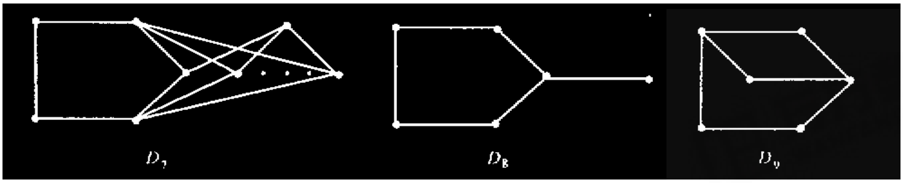

图5 D 的子图

2 定理的证明

由引理2~3和引理6~10可得当 $n \geqslant 7$ 时,定理成立. 当 $n=5$ 时,在同构意义下 $SPD_{n,5}$ 中只有 C_5,所以对 $1 \leqslant k \leqslant 4$ 有 $E(SPD_{5,5},k)=\{4\}$. 当 $n=6$ 时,在同构意义下 $SPD_{n,5}$ 中只有两个图 D_8 和 D_9(参见图5),所以对 $1 \leqslant k \leqslant 4$ 有 $E(SPD_{6,5},k)=\{4\}$ 且 $E(SPD_{6,5},5)=\{4,5\}$.

[参考文献]

[1] Brualdi R A, Lin Bolian. Generalized exponents of primitive directed graphs[J]. J of Graph Theory, 1990, 14: 483—499.

[2] Dulmage A L, Mendelsohn N S. Gaps in the exponent set of primitive matrices[J]. Illinois J Math, 1964, 8: 642—656.

[3] 李彬,邵嘉裕. 对称本原有向图的广义指数集[J]. 高校应用数学学报, 1995, 10A(4): 425—436.

[4] 苗正科,潘林强,张克民. 恰含 d 个非零对角元的本原矩阵的广义最大密度指数集[J]. 数学学报, 2001, 44(1): 15—20.

[5] 苗正科,张克民. 最小奇圈长为 r 的本原无向图的指数集[J]. 南京大学学报(数学半年刊), 1992, 9(2): 29—36.

[6] Miao Zhengke, Zhang Kemin. The Local exponent sets of primitive digraphs without loop[J]. 南京大学学报(数学半年刊), 1999, 16(1): 13—17.

[7] Miao Zhengke, Zhang Kemin. The second exponent set of primitive digraphs[J]. Chinese Ann of Math, 2000, 21(B)(2): 233—236.

[8] Miao Zhengke, Zhang Kemin. The local exponent sets of primitive digraphs[J]. Linear Algebra Appl, 2000, 307: 15—33.

[9] Shao Jiayu. On a conjecture about the exponent set of primitive matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1985, 65: 91—123.

[10] Shao Jiayu, Li Bin. The set of generalized exponents of primitive simple graphs[J]. Linear Algebra Appl, 1997, 258: 95—127.

[11] 邵嘉裕,王建中,李桂荣. 广义本原指数及其极图的完全刻划[J]. 数学年刊, 1994, 15A(5): 518—523.

[12] Shen Jian, Neufeld S. Local exponents of primitive digraphs[J]. Linear Algebra Appl, 1998, 268: 117—129.

[13] Zhang Kemin. On Lewin-Vitek's conjecture about exponent set of primitive matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1987, 96: 101—108.

[14] Wielandt H. Unzerlegbare, nicht negative matrizen[J]. Math Z, 1950, 52: 642—648.

(下转32页)

（上接 27 页）

The Local Exponent Sets of Symmetric Primitive Digraphs with Odd Girth 5

Xu Xinping

(Department of Mathematics, Jiangsu Education College, Nanjing, 210013, PRC)

Abstract: Let D be a primitive digraph and $u \in V(D)$. The exponent at u of D, denoted by $\exp_D(u)$, is defined to be the least positive integer k such that for any $v \in V(D)$, there is a directed walk of length k from u to v. Let $V(D) = \{1, 2, \cdots, n\}$ so that $\exp_D(1) \leqslant \exp_D(2) \leqslant \cdots \leqslant \exp_D(n)$. $\exp_D(k)$ is called the k th local exponent of D. In this paper, we consider the symmetric primitive digraphs of order n with odd girth 5 and obtain the local exponent sets of them.

Key words: directed graph; primitive; local exponent

[责任编辑：陆炳新]