代数注记两则

李 伟

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,南京)

[摘要] 给出了内域环的两个等价条件,完全刻划了内有限维 k-代数.

[关键词] 内域环,内有限维 k-代数.

[中图分类号]O153.3, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)01-0010-03

定义 1 一个结合环叫做内域环(内除环、内整环),如果它的每个真子环都是域(除环、整环)而它自身不是域(除环、整环).

文[1]给出了内域环的结构(见引理 1),下面我们再给出内域环的两个等价条件.

引理 1[1] 设 R 为结合环,则下列命题等价:

(1) $R = Z/pZ \oplus Z/qZ$,p、q 为素数;

(2) R 为内除环;

(3) R 为内域环.

命题 1 R 为内域环 $\Leftrightarrow R$ 为内整环.

证明:$\Rightarrow$.显然.

$\Leftarrow$.若 R 为有限环,则 R 的每个真子环为有限整环即为域,故 R 为内域环.

若 R 为无限环,则 R 必有无限直子环 R_1.若 R_1 的阶为 0,则 $2Z \subset Z \subseteq R_1$,$2Z$ 为 R 的真子环但不是整环,矛盾.若 R_1 的阶为素数 p,则 R_1 为有限域 F_p 上的无限维代数.任取 $\alpha \in R_1$,则 α 为 F_p 上的代数元.否则 α 为 F_p 上的超越元,从而 $\alpha F_p[\alpha] \subset F_p[\alpha] \subseteq R_1$,$\alpha F_p[\alpha]$ 为 R 的真子环但不是整环,矛盾.故 $F_p[\alpha]$ 为域,从而 R_1 为域.于是 R 为内域环,不可能为无限环,矛盾.

命题 2 设 R 为结合环,若 R 的每个真子环都没有零因子,则 R 为内域环.

证明 若 R 为有限环,则 R 的每个真子环为无零因子 Artin 环即为域,故 R 为内域环.

若 R 为无限环,则有 a、$b \in R^*$,使 $ab = 0$,作 $Z < a > = \{$有限和 $n_1 a + n_2 a^2 + \cdots + \mid n_i \in Z\}$.若 $Z < a >$ 有零因子,则 $R = Z < a >$,$b = f(a)$,于是 $b^2 = 0$.作 $Z < b >$,则 $Z < b > = \{nb \mid n \in Z\}$,因此 $R = Z < b >$.又 R 为无限环,故 b 的加法阶为 0,于是 $Z < 2b > \subset R$.但 $Z < 2b >$ 有零因子,矛盾.所以 $Z < a >$ 没有零因子.同理,$R = Z < b >$ 没有零因子.由 $ab = 0$,知 $ba = 0$.否则 $ba \neq 0$,有 $(ba)^2 = 0$,于是 $R = Z < ba >$ 有真子环 $Z < 2ba >$.但 $Z < 2ba >$ 有零因子,矛盾.综前所述,知 $Z < a > \oplus R = Z < b >$ 为 R 的子环并且有零因子,故 $R = Z < a > \oplus Z < b >$.又 R 为无限环,故 $Z < a >$、$R = Z < b >$ 中至少有一个是无限环.不妨设 $R = Z < b >$ 为无限环,则 $R = Z < b >$ 有真子环 S,于是 $Z < a > \oplus S$ 为 R 的真子环.但 $Z < a > \oplus S$ 有零因子,矛盾.所以 R 不可能为无限环.

定义 2 一个无限维结合 k – 代数叫做内有限维 k- 代数,如果它的每个真子代数都是有限维 k- 代数.一个无限域叫做内有限域,如果它的每个真子域都是限域.一个无限扩域 K/k 叫做内有限扩域,如果对每个真中间域 L,L/k 是有限扩域.

文[2]给出了内有限域的结构.下面我们来刻划内有限维 k- 代数.

引理 2[2] F 为内有限域 $\Leftrightarrow F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} GF(p^{r^n})$,$r$ 为素数.

收稿日期:2004-01-05.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10171046).

作者简介:李伟,1966 –,南京师范大学数学博士后流动站研究人员,主要从事代数学的研究,E – mail:Liwei66824@sohu.com

通讯联系人:陈永高,1962 –,南京师范大学数学与计算机科学学院教授,博士生导师.从事数论的研究,E – mail:ygchen@njnu.edu.cn

引理3 设 K/k 为无限扩域,则 K/k 为内有限扩域 $\Leftrightarrow$ 存在素数 p 和 k 上的 p 次代数元 α,使得 $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} k(\sqrt[p^n]{\alpha})$.

证明:$\Leftarrow$.显然.

$\Rightarrow$.对任意素数 P,令 $C_p = \{\alpha \mid \alpha \in K - k\}$,$\alpha$ 是 k 上的 p^n 次代数元,$n \in N\}$.若有无限多个 $C_{p_1}, C_{p_2}, \cdots$ 非空,令 $C = \bigcup_{i=2}^{\infty} C_{p_i}$,则 $k(C)$ 为 K 的真子域,并且 $k(C)/k$ 为无限扩域,矛盾.故仅有有限个 $C_{p_1}, C_{p_2}, \cdots, C_{p_t}$ 非空.若 $t > 1$,则 $k(C_{p_1})$ 和 $k(\bigcup_{i=2}^{t} C_{p_i})$ 均为 k 的真子域,并且至少有一个是 k 上的无限扩域,矛盾.故 $t = 1$,即存在素数 p,使得 $K - k$ 的每个元都是 k 上的 p^n 次代数元,$n \in N$.

令 $S_n = \{\alpha \mid \alpha \in K - k$,$\alpha$ 恰为 k 上的 p^n 次代数元$\}$.若对任意 $n \in N$,S_n 非空.令 $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^{p^{n-1}}$,$S_n^{p^{n-1}} = \{\alpha_n^{p^{n-1}} \mid \alpha_n \in S_n\}$,$S_{n+1}^{p^n} \subseteq S_n^{p^{n-1}}$,则 S 非空.任取 $\alpha \in S$,则有 k 上的 p 次代数元 α,使得 $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} k(\sqrt[p^n]{\alpha})$.

若存在 $l \in N$,使得 $n > l$ 时,S_n 为空.设 K 在 k 上的可分闭包为 L,则 K 为 L 上的纯不可分扩域.若 $K = L$,任取 $\alpha'_1 \in K - k$,作 $k(\alpha_1) = k(\alpha'_1)$.任取 $\alpha'_2 \in K - k(\alpha_1)$,作 $k(\alpha_2) = k(\alpha'_1, \alpha'_2)$.重复这个过程,我们有 $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} k(\alpha_n)$.对任意 $n \in N$,存在 $m > n$,使得 α_m 在 k 上的次数大于 p^n,即对任意 $n \in N$,S_n 非空,与假设矛盾.故 $K \neq L$,即 L 是 K 的真子域,于是 L/k 为有限扩域.重取 k 为 L,$S_1, S_2, \cdots, S_l$ 如前定义,则 K/k 为纯不可分扩域.我们断言,S_l 为无限集.否则 $k(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i) - k$ 中的元均为 k 上的纯不可分元,次数至多为 p^{l-1},于是 $k(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i))$ 为 K 的真子域,并且 $k(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i))/k$ 为无限扩域,矛盾.不失一般性,再重取 k 为 $k(\bigcup_{i=1}^{l-1} S_i))$,则 S_l 为 K 在 k 上的 p 次纯不可分元之集.任取 $\beta_1 \in S_l$,作 $k(\beta_1)$.任取 $\beta_2 \in S_l - k(\beta_1)$,则作 $k(\beta_1, \beta_2)$.重复这个过程,我们有 $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} k(\beta_1 \beta_2 \cdots, \beta_n)$.令 $T = \{\beta_1, \beta_2, \cdots\}$,$T_n = T - \{\beta_n\}$.若存在 $m \in N$,使得 $k(\beta_m) \not\subset k(T_m)$,则 $k(T_m)$ 为 k 的真子域,并且 $k(T_m)/k$ 为无限扩域,矛盾.故对任意 $n \in N$,有 $k(\beta_n) \subset k(T_n)$,于是 $\beta_n = f(\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_t}) \in k[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m-1}]$,并且 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m-1}$ 在单项中的次数小于 p.令 $m = \max\{n, i_1, i_2, \cdots, i_t\}$,则 β_m 是 $k(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m-1})$ 上的代数元.设 β_m 在 $k(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m-1})$ 上的极小多项式为1.因 β_m 在 k 上的极小多项式为 $(x - \beta_m)^p$,故 $g(x) \mid (x - \beta_m)^p$,于是 $g(x) = (x - \beta_m)^q$,$1 \leqslant p \leqslant q - 1$.这样 $\beta_m^q \in k(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m-1})$.又 $\beta_m^p \in k(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m-1})$,$(p, q) = 1$,故 $\beta_m \in k(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{m-1})$,矛盾.

内有限域是其每个真子域上的内有限扩域,又如 $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q(\sqrt[2^n]{2})$ 为 Q 上的内有限扩域.

命题3 设 A 为无限维结合 $k-$代数,则 A 为内有限维 $k-$代数 $\Leftrightarrow A/k$ 为内有限扩域.

证明:$\Leftarrow$.显然.

$\Rightarrow$.首先 A 不是幂零代数.若 A 为幂零代数,不妨设 A 为零乘代数(否则以 A/A^2 取代 A),则 A 为无限维 $k-$线性空间,于是 A 有无限维真子空间,即 A 有无限维真子代数,矛盾.

其次 A 作为 Artin 环,A 有幂等元 e,则 e 为 A 的单位元.若 $A \neq eA$,则 eA 为 A 的有限维真子代数,于是有无限多个 k-线性无关的 a_i,使得 $ea_i = 0$.显然 $A = a_1 A + a_2 A + \cdots$,于是 $e = \sum a_i x_i$,从而 $e = e^2 = e(\sum a_i x_i) = \sum (ea_i) x_i = 0$,矛盾.同样可证 $A = Ae$,由此知 A 为局部代数.

设 N 为 A 的幂零根.若 $N \neq 0$,则 N 为 A 的有限维真子代数.任取 $b \in N$,$b \neq 0$,则存在无限多个 k-线性无关的 a_i,使得 $a_i b = 0$.显然 $A = Aa_1 + Aa_2 + \cdots$,于是 $e = \sum x_i a_i$,从而 $b = eb = (\sum x_i a_i) b = \sum x_i (a_i b) = 0$,矛盾.所以 $N = 0$,A 为可除代数.

若 A 非交换,则 A 的中心 K 为 k 上的有限扩域,于是 A 为 K 上的有限维中心可除代数.设 L 为 A 的一个极大子域,则 L/K 为无限扩域,从而 L/k 为无限扩域,矛盾.所以 A 交换,A/k 为内有限扩域.

[参考文献]

[1] 李伟.关于内域环的注记[J].重庆师范学院学报(自然科学版),1997,14(2):38—39.
[2] 李伟.内有限环的结构[J].四川大学学报(自然科学版),1996,33(4):375—377.

Two Notes on Algebras

Li Wei

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, PRC)

Abstract: In this paper, we give two equivalent conditions of inner field ring and a complete description of inner finite dimensional k-algebra.

Key words: Inner field ring, inner finite dimensional k-algebra

[责任编辑:陆炳新]

(上接第9页)

[参考文献]

[1] Ben-Israd A, Greville T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications[M]. Wiley, New York, 1974.
[2] Cline R E. Representation for the generalized inverse of a partitioned matrix[J]. J Soc Ind Appl Math, 1964, 12: 588—600.
[3] Mihalyffy L. An alternative representation of the generalized inverse of partitioned matrices[J]. LAA, 1971, 4: 95—100.
[4] Greville T N E. Some applications of the pseudoinverse of a matrix[J]. SIAM Review, 1960, 2: 15—22.
[5] Chen Yonglin, Zhou Bingjun. On g-inverses and the nonsungularity of a boredered matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$[J]. LAA, 1990, 133: 133—151.
[6] 陈永林.加边矩阵与广义逆(Ⅰ)[J].南京师院学报(自然科学版),1984,7(4):14—24.
[7] 陈永林.加边矩阵与广义逆(Ⅱ)[J].南京师院学报(自然科学版),1985,8(3):9—20.
[8] 陈永林.计算加权MP逆的递推与反递推方法[J].南京师大学报(自然科学版),1986,9(4):31—39.
[9] Wei Yimin. Expressions for the Drazin inverse of a 2×2 block matrix[J]. LAMA, 1998, 45: 131—136.

Deduction of Expressions of the Moore-Penrose Inverse $[A, B]^{+}$

Chen Yonglin

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, PRC)

Abstract: This paper presents a simpler deduction method of the expression of the Moore-Penrose inverse for the partitioned matrix $[A, B]$.

Key words: Partitioned matrix, Moore-Penrose inverse

[责任编辑:陆炳新]