

关于 $p + a^k$ 型整数

孙学功

(淮海工学院数理系 222005 连云港)

[摘要] 对于任给定的正整数 $a \geq 2$ 给出了一个明确的常数 $c > 0$, 使得对于充分大的 x , 在不超过 x 的正整数中, 能表成 a 的方幂与一个素数之和的数的个数不少于 cx . 即给出了 Romanoff 定理的定量形式.

[关键词] Romanoff 定理, 常数, 素数, 整数

[中图分类号] O156, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2004)01-0020-04

0 引言

设 $A(x) = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq x, \text{ 且存在素数 } p \text{ 及正整数 } k, \text{ 使得 } n = p + 2^k\}$. 在 1934 年, Romanoff^[5] 证明了: 存在常数 $c > 0$, 使得对于充分大的 x , 有 $|A(x)| \geq cx$. 1950 年 P Erdős^[4] 引见同余覆盖系, 证明了存在一个由正奇数组成的等差数列, 其中每一项都不能表成 2 的方幂与一个素数之和. 由此引起人们对同余覆盖系及相关的不相交系等的研究. 如 [2][8][9]. 最近, 陈永高与孙学功^[3] 证明了: 对于充分大的 x , 有 $|A(x)| \geq 0.08x$. 在本文中, 我们研究了一般形式的 $p + a^k$ 型整数, 证明了如下结果:

定理 设 $a \geq 2, a \in \mathbb{Z}, A(x) = \{n \mid n \leq x, \text{ 且存在素数 } p \text{ 及正整数 } k, \text{ 使得 } n = p + a^k\}$,
$$\frac{1}{c} = \frac{2\pi^2}{3} \prod_{p \mid a} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \{303\,948\,985 + 12\,119\,178 \log \log a + 12\,119\,178 \log \log(38\,807\,930\,000 \log a)\} + \log a,$$
 则对于充分大的 x , 有 $A(x) \geq cx$.

1 若干引理

引理 1 设 $a \geq 2, a \in \mathbb{Z}$ 则 $\#\{p \mid p \mid \prod_{k \leq e^{12}} (a^k - 1), k \in \mathbb{Z}^+\} \geq 17$.

证明 由于 $a^{2^n} + 1 \not\equiv 1 \pmod{4}$ 及 $a^{2^n} + 1 > 2$, 故存在奇素数 q 使得 $q \mid (a^{2^n} + 1)$. 又 $a^{2^n} - 1 = a^{2^{n-1}} + 1 - 2$, 故 $q \nmid (a^{2^{n-1}} - 1)$. 因此存在不同的素数 p_1, p_2, \dots, p_{17} 使得 $p_1 \mid (a^2 - 1), p_2 \mid (a^{2^2} - 1), \dots, p_{17} \mid (a^{2^{17}} - 1)$. 由 $e^{12} \geq 2^{17}$ 知引理 1 得证.

引理 2 设 $a \geq 2, a \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^+, (a, d) = 1, \ell(d)$ 表示使得 $a^k \not\equiv 1 \pmod{d}$ 的最小的正整数 k , 则

$$\sum_{\substack{d=1 \\ (a,d)=1, \ell^2(d)=1}}^{\infty} \frac{1}{d\ell(d)} \leq 303\,948\,985 + 12\,119\,178 \log \log a + 12\,119\,178 \log \log(38\,807\,930\,000 \log a).$$

证明 对于任给的 k , 由于 $a^k - 1$ 只有有限多个因子, 所以只有有限多个 d 使得 $\ell(d) = k$. 记 $D = \prod_{k \leq x} (a^k - 1)$, $n = \omega(D)$ 表示 D 的不同素数因子个数, $E(x) = \sum_{k \leq x} \sum_{\substack{\ell(d)=k \\ (a,d)=1, \ell^2(d)=1}} \frac{1}{d}$. 由于 d 在 $E(x)$ 中至多出现一次, 并且如果 d 出现, 那么存在 $k \leq x$ 使得 $d \mid (a^k - 1)$, 因此 $d \mid D$, 所以

$$E(x) \leq \sum_{\substack{d \mid D \\ \ell^2(d)=1}} \frac{1}{d} \leq \prod_{p \mid D} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{p_i}\right),$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_n 为最小的 n 个素数. 由于

$$2^n = 2^{\omega(D)} \leq D = \prod_{k \leq x} (a^k - 1) < \prod_{k \leq x} a^k \leq a^{\frac{x(x+1)}{2}} \leq a^{x^2},$$

收稿日期 2003-10-11.

基金项目 国家自然科学基金资助项目(10171046).

作者简介 孙学功, 1972 - 淮海工学院数理系教师, 从事数论的教学与研究, E-mail: xgsunlyg@163.com

通讯联系人 陈永高, 1962 - 南京师范大学数学与计算机科学学院教授, 博士生导师, 从事数论的教学与研究, E-mail: ygchen@njnu.edu.cn

所以 $n \leq \frac{\log a}{\log 2} x^2$. 当 $x \geq e^{12}$ 时, 由引理 1 知 $n \geq 17$, 从而 $p_n \geq e^4$. 又当 $x \geq 6$ 时(见 [6]),

$$\pi(x) \leq \frac{x}{\log x - 1 - (\log x)^{-0.5}},$$

故

$$\begin{aligned} \log E(x) &\leq \sum_{p \leq p_n} \log \left(1 + \frac{1}{p}\right) \leq \sum_{p \leq p_n} \frac{1}{p} \leq \int_1^{p_n} \frac{1}{t} d\pi(t) \leq \frac{n}{p_n} + \int_1^{p_n} \frac{\pi(t)}{t^2} dt \\ &\leq \frac{n}{p_n} + \int_1^{e^4} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{e^4}^{p_n} \frac{1}{t \log t} \frac{1}{1 - (\log t)^{-1} - (\log t)^{-1.5}} dt \\ &\leq \frac{n}{p_n} + \int_1^{e^4} \frac{\pi(t)}{t^2} dt + \int_{e^4}^{p_n} \frac{1}{t \log t} dt + \int_{e^4}^{p_n} \frac{1}{t \log t} \left(\frac{1}{1 - (\log t)^{-1} - (\log t)^{-1.5}} - 1 \right) dt \\ &\leq \frac{n}{p_n} + \pi(e^4)(1 - e^{-4}) + \log \log p_n - \log 4 + \frac{12}{5} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\log p_n} \right) \\ &\leq \frac{n}{p_n} + \pi(e^4)(1 - e^{-4}) + \log \log p_n - \log 4 + 0.6. \end{aligned}$$

由于 $n \geq 2$ 时(见 [7]), 有 $p_n \leq n \log n + n(\log \log n + 8)$. 因此当 $x \geq e^{12}$ 时,

$$\begin{aligned} \log E(x) &\leq 1 + \pi(e^4)(1 - e^{-4}) + \log \log(n \log n + n(\log \log n + 8)) - \log 4 + 0.6 \\ &\leq 1 + 1(1 - e^{-4}) + \log \log \left(\frac{2 \log a}{\log 2} x^2 \log \left(\frac{\log a}{\log 2} x^2 \right) \right) - \log 4 + 0.6 \\ &\leq 16.3 + \log \log \left(\frac{2 \log a}{\log 2} x^2 \log \left(\frac{\log a}{\log 2} x^2 \right) \right), \end{aligned}$$

所以 $E(x) \leq 12\,119\,178 \log \left(\frac{2 \log a}{\log 2} x^2 \log \left(\frac{\log a}{\log 2} x^2 \right) \right)$.

由于

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq x} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\mathcal{A}(d)=k \\ \mathcal{A}(a,d)=1 \\ \mathcal{A}^2(d)=1}} \frac{1}{d} &\leq \int_1^x \frac{1}{t} dE(t) + E(1) \leq \frac{E(x)}{x} + \int_1^x \frac{E(t)}{t^2} dt \leq \frac{E(x)}{x} + \int_1^{e^{12}} \frac{E(t)}{t^2} dt + \int_{e^{12}}^x \frac{E(t)}{t^2} dt \\ &\leq \frac{E(x)}{x} + E(e^{12}) \int_1^{e^{12}} \frac{1}{t^2} dt + 12\,119\,178 \int_{e^{12}}^x \frac{1}{t^2} \log \left(\frac{2 \log a}{\log 2} t^2 \log \left(\frac{\log a}{\log 2} t^2 \right) \right) dt \\ &\leq \frac{E(x)}{x} + E(e^{12})(1 - e^{-12}) + 12\,119\,178(e^{-12} \log \left(\frac{2 \log a}{\log 2} \right) + 26e^{-12} \\ &\quad + e^{-12} \log \log \left(\frac{e^{24} \log a}{\log 2} \right) + \int_{e^{12}}^x \frac{2}{t^2 \log(t^2 \log a \log 2)} dt) \\ &\leq \frac{E(x)}{x} + E(e^{12})(1 - e^{-12}) + 12\,119\,178(e^{-12} \log \left(\frac{2 \log a}{\log 2} \right) + 26e^{-12} \\ &\quad + e^{-12} \log \log \left(\frac{e^{24} \log a}{\log 2} \right) + (\log(e^{24} \frac{\log a}{\log 2}))^{-1} \int_{e^{12}}^x \frac{2}{t^2} dt) \\ &\leq \frac{E(x)}{x} + 303\,948\,985 + 12\,119\,178 \log \log a + 12\,119\,178 \log \log(38\,807\,930\,000 \log a), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{\mathcal{A}(d)=1 \\ \mathcal{A}(a,d)=1 \\ \mathcal{A}^2(d)=1}} \frac{1}{d \mathcal{A}(d)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{\substack{\mathcal{A}(d)=k \\ \mathcal{A}(a,d)=1 \\ \mathcal{A}^2(d)=1}} \frac{1}{d} \\ &\leq 303\,948\,985 + 12\,119\,178 \log \log a + 12\,119\,178 \log \log(38\,807\,930\,000 \log a). \end{aligned}$$

引理 2 证毕.

引理 3 设 h 为偶数, p 为素数, 则

$$\prod_{2 < p \mid h} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) \leq \frac{\pi^2}{12} \prod_{p \mid h} \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

证明 由于

$$\prod_{2 < p \mid h} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) = \prod_{2 < p \mid h} \left(1 - \frac{1}{p-1} \right)^{-1} \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \prod_{2 < p|h} (1 + \frac{1}{p-1}) \leq \prod_{2 < p|h} (1 + \frac{1}{p-1}) \chi \prod_{2 < p|h} (1 + \frac{1}{p})^{-1} (\frac{2}{3} \prod_{p|h} (1 + \frac{1}{p})) \\ &\leq \frac{2}{3} \prod_{2 < p|h} (1 - \frac{1}{p^2})^{-1} \prod_{p|h} (1 + \frac{1}{p}) \leq \frac{2}{3} \prod_{p>2} (1 + \frac{1}{p^2} + \dots) \prod_{p|h} (1 + \frac{1}{p}) \leq \frac{2}{3} (\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}) \prod_{p|h} (1 + \frac{1}{p}), \end{aligned}$$

又由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 因此

$$\prod_{2 < p|h} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} (1 - \frac{1}{(p-1)^2}) \leq \frac{\pi^2}{12} \prod_{p|h} (1 + \frac{1}{p}).$$

引理 3 证毕.

引理 4 设 h 为偶数 则

$$\pi_h(x) \leq \frac{2\pi^2}{3} \frac{x}{(\log x)^2} \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \prod_{p|h} (1 + \frac{1}{p})$$

其中 O 和 h 无关.

证明 由 [1]

$$\pi_h(x) \leq 8 \prod_{2 < p|h} \frac{p-1}{p-2} \prod_{p>2} (1 - \frac{1}{(p-1)^2}) \frac{x}{(\log x)^2} \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\}$$

和引理 3 故引理 4 得证.

引理 5 设 $a \geq 2, a \in Z, \pi(N) = \#\{p, k) | N = p + a^k, p \text{ 为素数}, k \text{ 为正整数}\}$ 则

$$\sum_{N \leq x} \pi(N) \chi (\pi(N) - 1) \leq \frac{2\pi^2}{3} \frac{x}{(\log a)^2} \prod_{p|a} (1 + \frac{1}{p})$$

$$\{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \chi 303\,948\,985 + 12\,119\,178 \log \log a + 12\,119\,178 \log \log (38\,807\,930\,000 \log a)).$$

证明 对于给定的正整数 $k_1, k_2, k_1 > k_2$, 记 $h = a^{k_1} - a^{k_2}$, 由引理 4 得

$\#\{p_1, p_2) | p_2 - p_1 = a^{k_1} - a^{k_2} = h, p_1, p_2 \text{ 为小于等于 } x \text{ 的素数}\}$

$$\leq \frac{2\pi^2}{3} \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{p|h} (1 + \frac{1}{p}) \chi \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\},$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{N \leq x} \pi(N) \chi (\pi(N) - 1) &\leq 2 \sum_{1 \leq k_2 < k_1 \leq \frac{\log x}{\log a}} \frac{2\pi^2}{3} \frac{x}{(\log x)^2} \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \prod_{p|(a^{k_1} - a^{k_2})} (1 + \frac{1}{p}) \\ &\leq \frac{4\pi^2}{3} \frac{x}{(\log x)^2} \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \prod_{p|a} (1 + \frac{1}{p}) \sum_{1 \leq k_2 < k_1 \leq \frac{\log x}{\log a}} \prod_{p|(a^{k_1} - a^{k_2} - 1)} (1 + \frac{1}{p}) \\ &\leq \frac{4\pi^2}{3} \frac{x}{(\log x)^2} \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \prod_{p|a} (1 + \frac{1}{p}) \sum_{1 \leq k \leq \frac{\log x}{\log a}} ([\frac{\log x}{\log a}] - k) \prod_{p|(a^k - 1)} (1 + \frac{1}{p}) \\ &\leq \frac{4\pi^2}{3} \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{p|a} (1 + \frac{1}{p}) \chi \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \sum_{1 \leq k \leq \frac{\log x}{\log a}} ([\frac{\log x}{\log a}] - k) \sum_{d|(a^k - 1), \mu^2(d)=1} \frac{1}{d} \\ &\leq \frac{4\pi^2}{3} \frac{x}{\log x} \prod_{p|a} (1 + \frac{1}{p}) \chi \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \sum_{\mu^2(d)=1, (a, d)=1} \frac{1}{d} \sum_{1 \leq k \leq \frac{\log x}{\log a}, d|(a^k - 1)} ([\frac{\log x}{\log a}] - k) \\ &\leq \frac{4\pi^2}{3} \frac{x}{(\log x)^2} \prod_{p|a} (1 + \frac{1}{p}) \chi \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \sum_{\mu^2(d)=1, (a, d)=1} \frac{1}{d} \sum_{1 \leq k \leq \frac{\log x}{\log a}, d|(a^k - 1)} ([\frac{\log x}{\log a}] - k) \\ &\leq \frac{2\pi^2}{3} \frac{x}{(\log a)^2} \{1 + O(\frac{\log \log x}{\log x})\} \prod_{p|a} (1 + \frac{1}{p}) \sum_{d=1, (a, d)=1, \mu^2(d)=1}^{\infty} \frac{1}{d \chi(d)}. \end{aligned}$$

引理 5 证毕.

引理 6 设 $a \in Z, a \geq 2, \pi(N) = \#\{p, k) | N = p + a^k, p \text{ 为素数}, k \text{ 为正整数}\}$ 则

$$\sum_{N \leq x} \pi(N) = \frac{x}{\log a} + O(x).$$

证明 若 $p \leq x - \frac{x}{\log x}, a^k \leq \frac{x}{\log x}$ 则 $p + a^k \leq x$. 所以

$$\sum_{N \leq x} \pi(N) \geq \left[\frac{\log(x/\log x)}{\log a} \right] \left(x - \frac{x}{\log x} \right) > \frac{1}{\log a} \left(x - \frac{x}{\log x} \right) \left(\log \left(\frac{x}{\log x} \right) - \log a \right).$$

由于

$$\sum_{N \leq x} \pi(N) \leq \# \{p \mid p \leq x, p \text{ 为素数} \} \# \{k \mid a^k \leq x, k \text{ 为正整数} \},$$

因此

$$\sum_{N \leq x} \pi(N) \leq \pi(x) \frac{\log x}{\log a}.$$

由素数定理知引理 6 得证.

2 定理的证明

由引理 5 和引理 6 得到 对于充分大的 x ,有

$$\sum_{N \leq x} \pi(N)^2 \leq \frac{2\pi^2}{3} \frac{x}{\log^2 a} \prod_{p|a} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

$$\left(303\,948\,985 + 12\,119\,178 \log \log a + 12\,119\,178 \log \log (38\,807\,930\,000 \log a) \right) + \frac{x}{\log a} + o(x).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式及引理 6 得到 对于充分大的 x ,有

$$\left(\frac{x}{\log a} + o(x) \right)^2 \leq \left(\sum_{N \leq x} \pi(N) \right)^2 \leq A(x) \sum_{N \leq x} \pi(N)^2.$$

因此

$$A(x) \geq \left(\frac{x}{\log a} + o(x) \right) \left(\sum_{N \leq x} \pi(N)^2 \right)^{-1}.$$

综上 ,定理证毕.

致谢 :衷心感谢导师陈永高教授的指导和帮助.

[参考文献]

- [1] Chen J R. On the Goldbach 's problem and the sieve method[J]. Sci Sin , 1978 , 21 :701—739.
- [2] Chen Y G. On m-Harmonic Sequences[J]. Discrete Math , 1996 , 162 :273—280.
- [3] Chen Y G , Sun X G. On Romanoff 's Constan[J]. J Number Theory , to appear.
- [4] Erdős P. On integers of the form $2^r + p$ and some related problems[J]. Somma Brasil Math , 1950 , 2 :113—123.
- [5] Romanoff N P. über einige sätze der additiven Zahlentheorie[J]. MathAnn , 1934 , 57 :668—678.
- [6] Laurentiu P. Inequalities concerning the function $\pi(x)$:applications[J]. Acta Arith , 2000 , 94(4) :373—381.
- [7] Ribenboin P. The book of prime number record[M]. 2nd ed. , Springer-Verlag , New York , 1999.
- [8] 孙茂荣. 关于调和的一些结果[J]. 南京师大学报(自然科学版) , 2002 , 25(4) :31—35.
- [9] Sun Z W. On disjoint residue classes[J]. Discrete Math , 1992 , 104 :321—326.

On Integers of the Form $p + a^k$

Sun Xuegong

(Department of Mathematics and Science , Huaihai Institute of Technology , 222005 , Lian Yungang , PRC)

Abstract :In this paper , we give a quantitative version of Romanoff 's Theorem. The following result is proved : For any given integer $a \geq 2$, there exists an explicit constant $c > 0$, such that $\# \{n \mid n = p + a^k, p \text{ is a prime and } k \text{ is an integer}, n \leq x\} \geq cx$ for all sufficiently large x .

Key words :Romanoff 's Theorem , constant , prime , integer

[责任编辑 :陆炳新]