关于 Gross 问题的一个结果

仇惠玲

(江苏教育学院数学系,210013,江苏,南京)

[摘要] 研究了亚纯函数的惟一性,得到了如下结果:设 $S_1 = \left\{0, \frac{n-1}{n}\right\}$, $S_2 = \{z: z^n - z^{n-1} - 1 = 0\}$, n 为正整数,且 $n \geqslant 3$, $f(z)$, $g(z)$ 是任意两个非常数亚纯函数.如果 $E(S_i, f) = E(S_i, g)$, $(i = 1,2)$, $E_1(\infty, f) = E_1(\infty, g)$,且 $\delta(\infty, f) > \frac{1}{2}$, $\delta(\infty, g) > \frac{1}{2}$,则 $f(z) \equiv g(z)$.这个结果解决了 Gross 问题的一个结论.

[关键词] Gross 问题,亚纯函数,惟一性

[中图分类号]O174.52, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)02-0010-06

0 引言与主要结果

在本文中亚纯函数均指整个复平面上的亚纯函数,$f(z)$ 是非常数亚纯函数.以下将使用值分布论的标准记号[1]:

$$T(r,f), m(r,f), N(r,f), \overline{N}(r,f), \cdots,$$

我们用 $S(r,f)$ 表示任一满足如下条件的函数

$$S(r,f) = o\{T(r,f)\}, r \to +\infty, r \notin E$$

其中 E 是测度有穷的 r 值集.设 S 是一个复数集合,令

$$E(S,f) = \bigcup_{a \in S}\{z: f(z) - a = 0\}$$

其中 $f(z) - a$ 的 m 重零点在 $E(S,f)$ 中记 m 次.$f(z)$ 的所有简单极点组成的集记为 $E_1(\infty, f)$.

在 1968 年,Gross[2] 证明了如下结果:

定理 A 设 $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{-1\}$, $S_3 = \{a, b\}$,其中 a, b 满足 $a, b \neq 1$, $b \neq \frac{1}{a}$, $b \neq 1 + \frac{4}{a-1}$, $f(z)$ 和 $g(z)$ 是非常数整函数,若 $E(S_i, f) = E(S_i, g)$, $(i = 1,2,3)$,则 $f(z) \equiv g(z)$.

在 1976 年,Gross 提出了下述问题:是否存在两个有限集合 $S_i (i = 1,2)$,使得对于任何非常数整函数 $f(z)$ 与 $g(z)$,只要满足 $E(S_i, f) = E(S_i, g)$, $(i = 1,2)$,就有 $f(z) \equiv g(z)$?

仪洪勋[8] 解决了上述问题,他证明了:

定理 B 设 $S_1 = \{c\}$, $S_2 = \{a+b, a+bt, \cdots, a+bt^{n-1}\}$,,其中 $n > 4$, $t^n = 1$, $c \neq a$, $(c-a)^{2n} \neq b^{2n}$, $f(z)$ 和 $g(z)$ 是非常数整函数,若 $E(S_i, f) = E(S_i, g)$, $(i = 1,2)$,则 $f(z) \equiv g(z)$.

文[3]指出他和 S. Koot 已研究过元素个数均不超过两个的两个集合的情形,在这种情形下,Gross 问题的答案是否定的.但是如果两个集合中有一个集合中的元素个数超过两个时,Gross 问题的答案是怎样的呢?方明亮和徐万松回答了这个问题:

定理 C[4] 记 $S = \{z: z^3 - z^2 - 1 = 0\}$,设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是满足 $\theta(\infty, f) > \frac{1}{2}$, $\theta(\infty, g) > \frac{1}{2}$ 的两个非常数亚纯函数,若 $E(0,f) = E(0,g)$, $E(S,f) = E(S,g)$, $E(\infty, f) = E(\infty, g)$,则 $f(z) \equiv g(z)$.

本文对亚纯函数的 Gross 问题进一步作了研究,得到了下面的两个结论:

定理 1 设 $S_1 = \left\{0, \frac{n-1}{n}\right\}$, $S_2 = \{z: z^n - z^{n-1} - 1 = 0\}$, n 为正整数且 $n \geqslant 3$, $f(z)$ 和 $g(z)$ 是任意

收稿日期: 2003-11-20.

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金资助项目(03KJB110058).

作者简介: 仇惠玲,1957 - ,女,江苏教育学院数学系教授,南京师范大学数学与计算机科学学院博士生,主要从事函数论的教学与研究, E - mail: qiuhuiling1304@sina.com

两个非常数亚纯函数. 如果 $E(S_i,f)=E(S_i,g),(i=1,2),E_1(\infty,f)=E_1(\infty,g)$ 且 $\delta(\infty,f)>\frac{1}{2}$, $\delta(\infty,g)>\frac{1}{2}$, 则 $f(z)\equiv g(z)$.

定理 2 设 $S_1=\{0,1,-1\}, S_2=\left\{z:\frac{1}{n}z^n-\frac{1}{n-2}z^{n-2}-1=0\right\}$, n 为正整数且 $n\geqslant 3$, $f(z)$ 和 $g(z)$ 是任意两个非常数亚纯函数. 如果 $E(S_i,f)=E(S_i,g),(i=1,2),E_1(\infty,f)=E_1(\infty,g)$, 则

(1) 当 n 为奇数时, 有 $f(z)\equiv g(z)$.

(2) 当 n 为偶数时, 有 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)=-g(z)$.

1 一些引理

在本文的定理证明过程中要用到以下的引理:

引理 1[5] 设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数, a_i 为常数 $(i=0,1,2,\cdots,n)$, 则

$$T(r,a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\cdots+a_1f+a_0)=nT(r,f)+S(r,f)$$

引理 2[6] 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数, 且分担 1 CM. 如果 $\delta(\infty,f)=\delta(\infty,g)=1$ 且 $\delta(0,f)+\delta(0,g)>1$ 则 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)g(z)=1$.

显然, 引理 2 与下面的结论是等价的.

引理 2′ 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数, 且分担 1 CM. 如果 $\delta(0,f)=\delta(0,g)=1$ 且 $\delta(\infty,f)+\delta(\infty,g)>1$ 则 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)g(z)=1$.

引理 3 设 n 为正整数且 $n\geqslant 3$, $p_n(z)$ 为至少有三个不同根的 n 次多项式, $S=\{z:p_n(z)=0\}$, $f(z)$ 和 $g(z)$ 是任意两个非常数亚纯函数. 如果 $E(S,f)=E(S,g)$, 则 $T(r,f)=O(T(r,g)),T(r,g)=O(T(r,f))$.

证明 由 Nevanlinna 第二基本定理,

$$2T(r,f)\leqslant N\left(r,\frac{1}{p_n(f)}\right)+N(r,f)+S(r,f)=N\left(r,\frac{1}{p_n(g)}\right)+N(r,f)+S(r,f)$$
$$\leqslant nT(r,g)+T(r,f)+S(r,f)$$

从而

$$T(r,f)\leqslant nT(r,g)+S(r,f)$$

同理

$$T(r,g)\leqslant nT(r,f)+S(r,g)$$

所以

$$T(r,f)=O(T(r,g)),T(r,g)=O(T(r,f)).$$

2 定理 1 的证明

由引理 3, $T(r,f)=O(T(r,g))$

令

$$\phi(z)=\frac{(f^n-f^{n-1}-1)'}{f^n-f^{n-1}-1}-\frac{(g^n-g^{n-1}-1)'}{g^n-g^{n-1}-1}$$

情形 1 $\phi(z)\not\equiv 0$, 由于 $E(S_i,f)=E(S_i,g),(i=1,2),E_1(\infty,f)=E_1(\infty,g)$, 则

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-\frac{n-1}{n}}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{\phi}\right)\leqslant T(r,\phi)+O(1)\leqslant N(r,\phi)+S(r,f)\leqslant\overline{N}_{(2}(r,f)+\overline{N}_{(2}(r,g)$$
$+S(r,f)$, 由第二基本定理

$$T(r,f)\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-\frac{n-1}{n}}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\leqslant N(r,f)+\frac{1}{2}N(r,g)+S(r,f)$$

同理:$T(r,g) \leqslant \frac{1}{2}N(r,f)+N(r,g)+S(r,g)$,由于$\delta(\infty,f)>\frac{1}{2}$,$\delta(\infty,g)>\frac{1}{2}$,从而当$r$充分大时有:$T(r,f)+T(r,g) \leqslant \left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)(T(r,f)+T(r,g))+S(r,f)+S(r,g)$

其中ε是充分小的正数,矛盾.

情形2 $\phi(z) \equiv 0$,即:$\frac{(f^n-f^{n-1}-1)'}{f^n-f^{n-1}-1}-\frac{(g^n-g^{n-1}-1)'}{g^n-g^{n-1}-1} \equiv 0$

可得 $f(z)^n-f(z)^{n-1}-1 \equiv c(g(z)^n-g(z)^{n-1}-1)$

其中c是一个非零常数.下证:$c=1$

情形2.1 若存在z_1,z_2,使$f(z_1)=0,f(z_2)=\frac{n-1}{n}$

若$g(z_1)=0$或$g(z_2)=\frac{n-1}{n}$,都可推得$c=1$

若$g(z_1)=\frac{n-1}{n}$且$g(z_2)=0$,代入$f(z)^n-f(z)^{n-1}-1 \equiv c(g(z)^n-g(z)^{n-1}-1)$

得
$$\begin{cases} -1=c\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}-1\right) \\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}-1=-c \end{cases}$$

由上式得$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=0$或$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=2$,矛盾.

情形2.2 若$f(z) \neq 0$或$f(z) \neq \frac{n-1}{n}$

不妨设$f(z) \neq \frac{n-1}{n}$且存在z_1使$f(z_1)=0$

若$g(z_1)=0$,则可得$c=1$.

若$g(z_1)=\frac{n-1}{n}$且$g(z) \neq 0$,则

令 $F(z)=-\frac{n}{n-1}\left(f-\frac{n-1}{n}\right),G(z)=\frac{n}{n-1}g$

则 $F(z) \neq 0,G(z) \neq 0,\delta(\infty,F)+\delta(\infty,G)=\delta(\infty,f)+\delta(\infty,g)>1$且$F,G$分担1 CM,

由引理2′,$F(z) \equiv G(z)$或$F(z)G(z)=1$

即$f(z) \equiv \frac{n-1}{n}-g(z)$或$\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\left(f-\frac{n-1}{n}\right)g \equiv -1$

代入 $f(z)^n-f(z)^{n-1}-1 \equiv c(g(z)^n-g(z)^{n-1}-1)$

可得$f(z),g(z)$都为常数,矛盾.

情形2.3 若$f(z) \neq 0,\frac{n-1}{n}$,则$g(z) \neq 0,\frac{n-1}{n}$.

由于$f(z)^n-f(z)^{n-1}-1 \equiv c(g(z)^n-g(z)^{n-1}-1)$,所以$E(\infty,f)=E(\infty,g)$.

令 $F(z)=\frac{f}{f-\frac{n-1}{n}}$, $G(z)=\frac{g}{g-\frac{n-1}{n}}$

则 $F(z) \neq 0,\infty$, $G(z) \neq 0,\infty$且F,G分担1 CM,

由引理2,$F(z) \equiv G(z)$或$F(z)G(z)=1$.

即$f(z) \equiv g(z)$或$\frac{f(z)g(z)}{\left(f(z)-\frac{n-1}{n}\right)\left(g(z)-\frac{n-1}{n}\right)} \equiv 1$

若$\frac{f(z)g(z)}{\left(f(z)-\frac{n-1}{n}\right)\left(g(z)-\frac{n-1}{n}\right)} \equiv 1$,再由$f(z)^n-f(z)^{n-1}-1 \equiv c(g(z)^n-g(z)^{n-1}-1)$,可得$f(z)$,

$g(z)$ 都为常数,矛盾.

综上所述:$c=1$,即 $f(z)^n-f(z)^{n-1}\equiv g(z)^n-g(z)^{n-1}$.

从而 $E(0,f)=E(0,g),E(\infty,f)=E(\infty,g)$

若 $f(z)\not\equiv g(z)$.令 $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$,则 $h(z)\neq 0,\infty$,且 $h(z)\not\equiv 1$.

$$g(z)=\frac{h(z)^{n-1}-1}{h(z)^n-1}.$$

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_{n-1}$ 是平面上 $n-1$ 个不同的 n 次单位根且 $\varepsilon_i\neq 1,(i=1,2,\cdots,n-1)$ 因 $n\geqslant 3$,则

$$\begin{aligned}(n-1)T(r,h)&\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\overline{N}\left(r,\frac{1}{h-\varepsilon_i}\right)+S(r,h)\\&\leqslant N(r,g)+S(r,h)\\&\leqslant\frac{1}{2}T(r,g)+S(r,g)+S(r,h)\end{aligned}\tag{1}$$

所以 $T(r,g)\leqslant(n-2)T(r,g)+(n-1)T(r,g)\leqslant\dfrac{1}{2}T(r,g)+\dfrac{n-2}{2(n-1)}T(r,g)+S(r,g)+S(r,h)$.

可得 $T(r,g)\leqslant S(r,h)$.代入(1)有 $T(r,h)=o(T(r,h))$,从而 $h(z)$ 为常数.由 $g(z)=\dfrac{h(z)^{n-1}-1}{h(z)^n-1}$ 可推得 $g(z)$ 为常数,矛盾.所以 $f(z)\equiv g(z)$.证毕.

3 定理 2 的证明

由引理 3,$T(r,f)=O(T(r,g))$

令 $\phi(z)=\dfrac{(f^{n-1}-f^{n-3})f'}{\frac{1}{n}f^n-\frac{1}{n-2}f^{n-2}-1}-\dfrac{(g^{n-1}-g^{n-3})g'}{\frac{1}{n}g^n-\frac{1}{n-2}g^{n-2}-1}$

若 $\phi(z)\not\equiv 0$,由于 $E(S_i,f)=E(S_i,g),(i=1,2),E_1(\infty,f)=E_1(\infty,g)$,则

$$\begin{aligned}2T(r,f)&\leqslant\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f+1}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\\&\leqslant N\left(r,\frac{1}{\phi}\right)+\overline{N}(r,f)+S(r,f)\leqslant\overline{N}_{(2}(r,f)+\overline{N}_{(2}(r,g)+\overline{N}(r,f)+S(r,f)+S(r,g)\\&\leqslant N(r,f)+\frac{1}{2}N(r,g)+S(r,f)\end{aligned}$$

同理

$$2T(r,g)\leqslant N(r,g)+\frac{1}{2}N(r,f)+S(r,g)=N(r,g)+\frac{1}{2}N(r,f)+S(r,f)$$

于是

$$2\{T(r,f)+T(r,g)\}\leqslant\frac{3}{2}\{N(r,f)+N(r,g)\}+S(r,f)$$

矛盾.所以 $\phi(z)\equiv 0$,即 $\dfrac{1}{n}f(z)^n-\dfrac{1}{n-2}f(z)^{n-2}-1\equiv c\left(\dfrac{1}{n}g(z)^n-\dfrac{1}{n-2}g(z)^{n-2}-1\right)$

下证:$c=1$

情形 1 若 $f=0\Leftrightarrow g=0$,或 $f=1\Leftrightarrow g=1$,或 $f=-1\Leftrightarrow g=-1$, 都有:$c=1$.

情形 2 若存在 z_1,z_2,使 $f(z_1)=0,f(z_2)=1$,

若 $g(z_1)=1,g(z_2)=0$

即 $\begin{cases}-1=c\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-2}-1\right)\\ \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-2}-1=-c\end{cases}$ 从而可得 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-2}=0$,或 $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-2}=-2$ 矛盾.

若 $g(z_1)=-1,g(z_2)=0$

即$\begin{cases} -1 = c\left(\dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-2} - 1\right) \\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} - 1 = -c \end{cases}$ 可得 $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} = 0$,或 $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} = 2$ 矛盾.

若 $g(z_1) = 1, g(z_2) = -1$

即$\begin{cases} -1 = c\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} - 1\right) \\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} - 1 = c\left(\dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-2} - 1\right) \end{cases}$

可得$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} = 0$ 或 $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} = 3$,矛盾.

情形 3　若存在 z_1, z_2,使 $f(z_1) = 0, f(z_2) = -1$,

若 $g(z_1) = -1, g(z_2) = 0$

即$\begin{cases} -1 = c\left(\dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-2} - 1\right) \\ \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-2} - 1 = -c \end{cases}$,从而可得 $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} = (-1)^n \pm 1$, 矛盾.

若 $g(z_1) = -1, g(z_2) = 1$

即$\begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-2} - 1 = c\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} - 1\right) \\ -1 = c\left(\dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-2} - 1\right) \end{cases}$,可得$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} = 0$ 或 $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} = -3$ 矛盾.

情形 4　若存在 z_1, z_2,使 $f(z_1) = 1, f(z_2) = -1$,且 $g(z_1) = -1, g(z_2) = 1$

即$\begin{cases} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} - 1 = c\left(\dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-2} - 1\right) \\ \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^{n-2}}{n-2} - 1 = c\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-2} - 1\right) \end{cases}$

则可推得为 n 偶数,即　$c = 1$.

情形 5　若 $f(z), g(z)$ 不取 $0, 1, -1$ 中的任意两个值,不妨设 $f(z) \neq 0, 1, g(z) \neq 1, -1$,则

$$E(-1, f) = E(0, g)$$

令　$F = \dfrac{2f}{f-1}, G = \dfrac{1+g}{1-g}$　.则　$E(1, F) = E(1, G)$ 且 $F(z) \neq 0, \infty, G(z) \neq 0, \infty$.

由引理 2,有 $F(z)G(z) = 1$ 或 $F(z) \equiv G(z)$,即

$$\frac{2f}{f-1} \equiv \frac{1+g}{1-g} \text{或} \quad \frac{2f}{f-1}\frac{1+g}{1-g} \equiv 1$$

再由　$\dfrac{1}{n}f(z)^n - \dfrac{1}{n-2}f(z)^{n-2} - 1 \equiv c\left(\dfrac{1}{n}g(z)^n - \dfrac{1}{n-2}g(z)^{n-2} - 1\right)$

可得 f, g 都为常数,矛盾.

综上所述:$c = 1$,即 $\dfrac{1}{n}f(z)^n - \dfrac{1}{n-2}f(z)^{n-2} \equiv \dfrac{1}{n}g(z)^n - \dfrac{1}{n-2}g(z)^{n-2}$

令　$h = \dfrac{f}{g}$,则有 $h(z) \neq 0, \infty$ 且　$\dfrac{1}{n}(h^n - 1) = \dfrac{1}{g^2}\dfrac{1}{n-2}(h^{n-2} - 1)$.

如果 $n \geq 5$,当 n 为奇数且$h(z) \neq 1$时,则由 $g^2 = \dfrac{n}{n-2}\dfrac{h^{n-2} - 1}{h^n - 1}$,可知 $h(z)$ 至少有 6 个完全重值,矛盾.所以 $h(z) \equiv 1$,即 $f(z) \equiv g(z)$.当 n 为偶数且$h(z) \neq \pm 1$时,则 $h(z)$ 至少有 $2n - 6$ 个完全重值,而当 $n \geq 6$时,有 $2n - 6 \geq 6$ 矛盾.所以 $h(z) \equiv 1$ 或 $h(z) \equiv -1$,即 $f(z) \equiv g(z)$,或 $f(z) \equiv -g(z)$.

如果 $n = 4$,则有 $\dfrac{1}{4}f(z)^4 - \dfrac{1}{2}f(z)^2 \equiv \dfrac{1}{4}g(z)^4 - \dfrac{1}{2}g(z)^2$.若 $f^2(z) \neq g^2(z)$,则有 $f^2(z) \neq g^2(z) \equiv$

2.由 $E(S_1,f) = S(S_1,g)$,可知 $f(z) \neq 0, \infty, g(z) \neq 0, \infty$.设 $f(z) = e^{\alpha(z)}, g(z) = e^{\beta(z)}$,其中 $\alpha(z),\beta(z)$ 均为整函数,从而有 $e^{2\alpha(z)} + e^{2\beta(z)} = 2$.根据 Borel 定理[7],$\alpha(z),\beta(z)$ 均为常数,从而 $f(z), g(z)$ 均为常数.矛盾.所以 $f^2(z) \equiv g^2(z)$,即 $f(z) \equiv g(z)$,或 $f(z) \equiv -g(z)$.

如果 $n = 3$,则有 $\frac{1}{3}f^3(z) - f(z) \equiv \frac{1}{3}g^3(z) - g(z)$.

若 $f(z) \not\equiv g(z)$,则有 $f^2(z) + f(z)g(z) + g^2(z) = 3$.由 $E(S_1,f) = S(S_1,g)$,可知 $f(z) \neq 0, \infty, g(z) \neq 0, \infty$ 且 $f = 1 \Leftrightarrow g = 1, f = -1 \Leftrightarrow g = -1$.由 Nevanlinna 四值定理,$f(z) \equiv L(g(z))$,其中 L 为一个分式线性变换,再根据 $f^2(z) + f(z)g(z) + g^2(z) = 3$,可得 $f(z), g(z)$ 均为常数,矛盾.所以 $f(z) \equiv g(z)$.

[参考文献]

[1] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[2] Gross F. On the distribution of values of meromorphic functions[J]. Trans Amer Math Soc, 1968, 131: 199—214.

[3] Gross F. Factorization of meromorphic functions and some open problems[C]. Proc Conf Univ Kentucky Lexington Ky, 1976, Lecture Notes in Math, Spring, Berlin, 1977, 599: 51—69.

[4] 方明亮,徐万松. 关于 Gross 问题的一个注记[J].数学年刊(A), 1997, 18(5): 263—268.

[5] Yang C C. On deficiencies of differential polynomials[J]. Math Z, 1972, 125: 107—112.

[6] Yi H X. Uniqueness Theorems for Meromorphic functions Whose N-th Derivatives Share the Same 1-Points[J]. Complex Variables, 1997, 34: 421—436.

[7] 庄圻泰,杨重骏. 亚纯函数的不动点与分解论[M]. 北京:北京大学出版社, 1988.

[8] Yi H X. Uniqueness of meromorphic functions and a question of Grosss[J]. Science in China (series A), 1994, 24(5): 457—466.

A Result on a Problem of Gross

Qiu Huiling

(Department of Mathematics, Jiangsu Education College, 210013, Nanjing, China)

Abstract: The uniqueness of meromorphic functions was studied and the following theorem was proved: let $S_1 = \left\{0, \frac{n-1}{n}\right\}$, $S_2 = \{z : z^n - z^{n-1} - 1 = 0\}$, $n \geqslant 3$ be positive integer and $f(z)$ and $g(z)$ be two nonconstant meromorphic functions. If $E(S_i, f) = E(S_i, g), (i = 1, 2), E_1(\infty, f) = E_1(\infty, g)$ and $\delta(\infty, f) > \frac{1}{2}, \delta(\infty, g) > \frac{1}{2}$, then $f(z) \equiv g(z)$. The result is an answer to a problem of Gross.

Key words: Gorss problem, meromorphic function, uniqueness

[责任编辑:陆炳新]