第 27 卷第 2 期　　南京师大学报(自然科学版)　　Vol.27 No.2
2004 年　　JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science)　　2004

二叉树上的二人对策着色

沈邦玉[1,2],周兴和[2]

(1.淮阴师范学院数学系,223001,江苏,淮安)

(2.南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 讨论在图上放松的二人对策着色,利用分裂已被着色顶点的方法,给出了 Alice 的获胜对策.证明了如果图 G 是二叉树,且 $t = 2, d \geq 2$,则 Alice 有一个获胜对策.

[关键词] 对策着色,放松对策着色,可行色,放松对策色数,二叉树

[中图分类号]O157.5, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)02-0019-04

0 引言

1990 年 Bodlaender 在关于计算机科学中的图理论专题讨论会上做了"关于某些着色策略的计算复杂性"的专题报告,基于图的正常顶点着色的概念,引入了图的对策着色的概念.随后 Faigle, Kern, Kierstead 和 Trotter 做了拓展.设 $G = (V, E)$ 是有限图,t, d 是正整数,X 是 t 种颜色的集合.图 G 的顶点着色是从图 G 的顶点集 V 到颜色集合 X 的一个映射 $C: V \to X$.如果对图 G 的任意一条边 $uv \in E$,顶点 u 和 v 都着不同颜色,则称图 G 的这种顶点着色为图 G 的正常顶点着色.图的对策着色是根据两个人(Alice 和 Bob)在图上做顶点着色提出的.即,由 Alice 开始,Alice 和 Bob 两个人轮流选取 X 中的颜色对图 G 的顶点进行着色,每次每人着一个顶点.Alice 试图给图 G 一个正常顶点着色,而 Bob 则设法阻止该事件发生.每一步都包括一个人选取一个位被着色的顶点,并从 X 中选取颜色来对它进行着色,使得它的颜色不同于它邻点的颜色.若 $n = |V(G)|$ 步后,G 被正常顶点着色,则 Alice 获胜.若在图 G 全部顶点被着色之前出现僵局,即在每一个尚未着色的顶点的邻点上出现了 X 中的所有颜色,则 Bob 获胜.图 G 的这种顶点对策着色称为图 G 的正常顶点对策着色.图 G 的对策色数 $\chi_g(G)$ 是图 G 的正常顶点对策着色所需的最少颜色数.

这篇文章讨论的是图的对策着色的变形,即放松度为 d 的对策着色:由 Alice 开始,Alice 和 Bob 两个人轮流选取 X 中的颜色对图 G 的顶点进行着色,每次每人着一个顶点.如果图 G 的顶点 x 着颜色 c 后,由图 G 着颜色 c 的顶点导出的子图的顶点最大度至多是 d,则称颜色 c 对顶点 x 来说是可行色.每次 Alice 和 Bob 必须用可行色对图 G 的未被着色的顶点进行着色.如果图 G 的所有顶点都被着色或者还有顶点没有可行色去着色,则着色结束.Alice 的目标是实现对图 G 的所有顶点进行可行着色,而 Bob 的目标就是要破坏 Alice 实现她的目标.如果经过 $n = |V(G)|$ 次着色,图 G 的所有顶点被可行着色了,则称 Alice 是获胜者.如果在图 G 的所有顶点未全部被可行着色之前出现了僵局,即图 G 还有顶点没有可行色去着色,则称 Bob 是获胜者.为了方便,称图 G 上的放松度为 d 的对策着色为 G 上的 (t, d) - 对策着色,其中 $t = |X|$.

放松度为 0 的对策着色就是一般的对策着色,在文[2,3,6]中有所论述.图 G 的放松度为 d 的对策色数 $\chi_g^{(d)}(G)$ 就是在图 G 上的放松度为 d 的对策着色过程中 Alice 能获胜所需的最少颜色数,即集合 X 的最小基数.$\chi_g^{(0)}(G)$ 就是 Bodlaender 在[2]中所引入的对策色数 $\chi_g(G)$.图的放松对策着色和图的放松对策色数起先由 X.Zhu 在[4]中所介绍.

图族 Γ 的放松度为 d 的对策色数定义为:

$$\chi_g^{(d)}(\Gamma) = \begin{cases} \max\{\chi_g^{(d)}(G): G \in \Gamma\} & \text{若 } \chi_g^{(d)}(G) \text{ 皆是有限值,} \\ \infty & \text{否则.} \end{cases}$$

收稿日期: 2003-10-11.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371055).

作者简介: 沈邦玉,1973 - ,淮阴师范学院数学系助教,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士生,主要从事图论与组合优化方面的学习和研究,E - mail: bangyshen@sohu.com

通讯联系人: 周兴和,1950 - ,南京师范大学数学与计算机科学学院教授,主要从事图论与组合优化的教学和研究,E - mail: xhzhou@njnu.edu.cn

万方数据

Bodlaender在[2]中讨论了树的着色对策,证明了树的对策色数最大值是5,并且存在一些树它们的对策色数是4.[7]中证明了树的对策色数最大值是4.C.Y.Chou,W.Wang和X.Zhu在[4]中证明了当 $d \geqslant 1$ 时,树的放松度为 d 的对策色数为3,外部平面图的放松度为 d 的对策色数最大值的上界为6.并提出是否存在整数 $d \geqslant 2$ 使得树的放松度为 d 的对策色数至多为2.

1　二叉树的放松度为2的对策色数

度为 k 的顶点称为 k - 点.树中度为1的顶点称为树叶.有一个顶点度为2且除树叶外其他顶点(如果还有的话)的度都为3的树称为二叉树.我们证明了如果图 G 是二叉树,且 $t = 2, d \geqslant 2$,则Alice有一个获胜对策.

图的放松度为2的着色对策的研究和[4]中图的着色对策的研究有些相似.对完全图 K_n,我们有 $\chi_g(K_n) = n, \chi_g^{(1)}(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \chi_g^{(2)}(K_n) = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$.乍一看似乎有如果 $d' \geqslant d$,则 $\chi_g^{(d')}(G) \geqslant \chi_g^{(d)}(G)$.其实并不总是如此.例如,如果 $n \geqslant 2$,则有 $\chi_g^{(0)}(K_{n,n}) = \chi_g(K_{n,n}) = 3, \chi_g^{(2)}(K_{n,n}) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,但是 $\chi_g^{(1)}(K_{n,n}) = n$.

定理1.1　如果 T 是二叉树且 $d \geqslant 2$,则 $\chi_g^{(d)}(T) \leqslant 2$.即对 T 上的 $(2,d)$ - 对策着色,Alice有一个获胜对策.

证明　对策着色中Alice所采取的对策和[4]中的对策相似.开始,Alice任选 T 的一个顶点来着色.假设在着色进行过程中,T 已被部分着色.我们定义 T 的树干为 T 的极大子树 T',使得 T' 的每个已被着色的顶点都是 T' 的树叶.T 的树干可通过如下方法得到:把 T 的每个已被着色的 k - 点 x 分裂成 k 个与 x 着同样颜色的顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_k$,每个顶点 x_i 恰好只与原来与 x 相关联的边中的一条边相关联.当把 T 的每个已被着色的顶点都分裂开后,我们就可得到更小的部分着色二叉树,设为 $T_1, T_2, \cdots, T_m$.不难看出 T 的边集等于所有 T_i 边集的并,而且每个 T_i 中只有一些树叶被着色了,T_i 的没有被着色的树叶必定是 T 的树叶.这些子树 T_i 都是部分着色二叉树 T 树干.

在对策着色过程中,把被Alice着色的顶点称为 A - 点,被Bob着色的顶点称为 B - 点.在 T_i 中,把在Alice或Bob选取下一个顶点之前刚被Alice着色的顶点称为 NA - 点,在Alice或Bob选取下一个顶点之前刚被Bob着色的顶点称为 NB - 点.用 P_{xy} 表示树 T 中从顶点 x 到顶点 y 的唯一的一条路,$d(x,y)$ 表示顶点 x 和 y 之间的距离.不难看出,树干 T_i 中两个顶点之间的路就是它们在树 T 中对应顶点之间的路,且 $d(x,y)$ 就等于 P_{xy} 上边的条数.

在Alice选取下一个顶点着色之后,为了方便,令:

$$M = \{\text{部分着色二叉树 } T \text{ 中恰有两个树叶被着色的树干}\}$$

$$Q = \{T_i \mid T_i \in M \text{ 且 } T_i \text{ 的被着色的树叶都是 } B - \text{点}\}$$

断言1　在Alice选点着色之后,部分着色二叉树 T 每个树干至多有两个已被着色的树叶.而且如果存在 $T_i \in M$ 且 T_i 有不止一条边,则 $T_i \notin Q$.

采用归纳法.

在着色开始时结论是成立的.假设在着色进行到第 k 步结论还是成立的.则在Bob给树干 T_j 的一个顶点着色后,T_j 又被进一步分成更小的树干.不管 T_j 被怎么分裂,在这些更小的树干中至多有一个树干有三个树叶被着色,或者恰有两个树叶被着色且都是 B - 点.

1) 如果有一个树干 T_{j1} 有三个树叶(设为 x,y,z)被着色,则Alice就选 P_{xy}, P_{yz} 和 P_{xz} 这三条路的唯一交点来着色.

2) 如果有一个树干 T_{j2} 恰有两个树叶(设为 x,y)被着色且都是 B - 点并有不止一条边.如果 $d(x,y) = 2$,则Alice就选路 P_{xy} 上未被着色的顶点来着色.如果 $d(x,y) > 2$,则Alice就选路 P_{xy} 上与 NB - 点的距离为2的顶点来着色.

3) 如果上述两种情况都不出现,而且 T 有一个树干 T_i 有两个树叶(设为 x,y)被着色且有不止一条

万方数据

边.若 $d(x,y)=2$,则 Alice 就选路 P_{xy} 上未被着色的顶点来着色(如果有多个这样的树干,Alice 可任选其一).如果树 T 的所有有两个树叶被着色的树干中两个已被着色的树叶之间的距离大于 2,则 Alice 就任选其中一个树干中连接两个已被着色的树叶的路上与 NA - 点距离为 2 的顶点来着色.

4) 如果树 T 的所有树干都只有一个树叶被着色,则 Alice 可任选一个未被着色的顶点来着色.

这样我们就证明了断言 1.

假设利用上述对策 Alice 选取了树干 T_i 的一个顶点 u.则 Alice 可通过下述方法为顶点 u 选色:

1) 如果 T_i 只有两个或三个树叶被着相同颜色,而且 u 的邻点都没被着色,则 Alice 也给 u 着同样的颜色.否则,Alice 就给 u 着另一种颜色.

2) 如果 T_i 有三个树叶(设为 x,y,z)被着不同的颜色,则一定有两个树叶(设为 x,y)着相同的颜色.如果 $d(x,u)>1,d(y,u)>1$,但是 $d(z,u)=1$,那么 Alice 给 u 着 x 的颜色.如果 $d(x,u)=d(y,u)=1$ 而 $d(z,u)>1$,或 $d(x,u)>1,d(z,u)>1$ 但是 $d(y,u)=1$,或 $d(x,u)>1,d(y,u)>1$ 且 $d(z,u)>1$,那么 Alice 给 u 着 z 的颜色.

3) 如果 T_i 只有两个树叶(设为 v,w)被着不同颜色且这两个树叶都是 B - 点.不失一般性,设 v 是 NB - 点.如果 $d(v,u)>1,d(w,u)>1$,那么 Alice 给 u 着 w 的颜色.

4) 如果 T_i 只有两个树叶(设为 x,y)被着不同颜色,$d(x,y)>2$ 且至少有一个树叶是 A - 点.不失一般性,设 x 是 NA - 点.如果 $d(x,u)>1,d(y,u)>1$,那么 Alice 给 u 着 y 的颜色.

上面没有讨论到的情形将在后面讨论.为此我们先证明下面的断言:

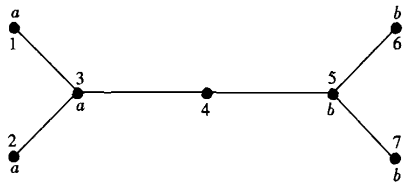

图 1　着色二叉树结构示意图

图 1 中数字是顶点的名称.a,b 是两种颜色.顶点标有 a 或 b 表明该顶点被着颜色 a 或 b.4 是未被着色的顶点.

断言 2　Alice 能避免部分着色二叉树 T 出现如图 1 的结构.

分下面三种情形来证明:

情形 1　如果顶点 3 和 5 都是 B - 点.不失一般性,设顶点 5 在顶点 3 之前被 Bob 着色.由断言 1 的证明可知,顶点 1 和 2 不可能都在顶点 3 被(Bob)着色之前被着色.否则,在 Bob 选点之前,亦即 Alice 选点之后,部分着色二叉树 T 有一个树干包含有三个已被着色的树叶,与断言 1 矛盾.由断言 1 的证明可知,在 Bob 给顶点 3 着色之后,Alice 必然会立即选顶点 4 来着色.

情形 2　如果顶点 3 和 5 中有一个(不妨设是顶点 3)是 A - 点,另一个顶点(顶点 5)是 B - 点.

1) 如果顶点 5 在顶点 3 之前被着色.由断言 1 的证明和上述 Alice 为自己选的顶点选色的方法可知,顶点 1 和 2 不可能都在顶点 3 被(Alice)着色之前被(Alice 或 Bob)选且被着颜色 a.否则,如果顶点 1 和 2 都在顶点 3 被着色之前被选且被着颜色 a,由上述 Alice 为自己选的顶点选色的方法可知,顶点 3 应被着颜色 b.如果顶点 1 和 2 都不在顶点 3 被着色之前被着色.如果在顶点 3 未被着色之前,部分着色二叉树 T 中的含有顶点 3 和顶点 5 的树干只有一个已被着色的树叶,即顶点 5,则 Alice 可先选顶点 4 来着色.如果在顶点 3 未被着色之前,部分着色二叉树 T 中的含有顶点 3 和顶点 5 的树干只有两个或有三个已被着色的树叶,由上述 Alice 为自己选的顶点选色的方法可知,顶点 3 应被着颜色 b.若顶点 1,2 中有一个顶点(不妨设点 1)在顶点 3 被着色之前被着颜色 a,若顶点 2 不在顶点 3 被着色之前被着色,由断言 1 的证明和上述 Alice 为自己选的顶点选色的方法可知,点 3 应被着颜色 b,或顶点 4 在顶点 3 被着色之前已经被着色.若顶点 2 在顶点 3 被着色之前被着色,由前面的论证知,顶点 2 只能着颜色 b.因为树 T 是二叉树,因此顶点 4 可着颜色 a.

2) 如果顶点 3 在顶点 5 之前被着色.由断言 1 的证明可知,顶点 6 和 7 不可能都在顶点 5 被(Bob)着色

万方数据

之前被着色.否则,顶点5就成了 A - 点了,矛盾.而且Bob给顶点5着色后部分着色二叉树 T 中没有含顶点6或7且有三个树叶已被着色的树干.因此Alice可在Bob给顶点5着色后立即选顶点4来着色.

情形3　如果顶点3和5都是 A - 点.不失一般性,设顶点5在顶点3之前被着色.由断言1的证明和上述Alice为自己选的顶点选色的方法可知,顶点1和2不可能都在顶点3被着色之前被着颜色 a.否则,如果顶点1和2都在顶点3被着色之前被着颜色 a,由上述Alice为自己选的顶点选色的方法可知,顶点3应被着颜色 b.如果顶点1和2都不在顶点3被着色之前被着色.如果在顶点3未被着色之前,部分着色二叉树 T 中的含有顶点3和顶点5的树干只有一个已被着色的树叶,即顶点5,则Alice可先选顶点4来着色.如果在顶点3未被着色之前,部分着色二叉树 T 中的含有顶点3和顶点5的树干只有两个或有三个已被着色的树叶,由上述Alice为自己选的顶点选色的方法可知,顶点3应被着颜色 b.若顶点1,2中有一个顶点(不妨设顶点1)在顶点3被着色之前被着颜色 a,若顶点2不在顶点3被着色之前被着色,由断言1的证明和上述Alice为自己选的顶点选色的方法可知,顶点3应被着颜色 b,或顶点4在顶点3被着色之前已经被着色.若顶点2在顶点3被着色之前被着色,由前面的论证知,顶点2只能着颜色 b.因为树 T 是二叉树,因此顶点4可着颜色 a.

这样我们就证明了断言2.

对于上面没有讨论到的情形,根据断言2,Alice能为顶点 u 选到可行色.

因此在这个对策着色中,Alice有一个获胜对策.

注　定理2.1的结论对所有顶点的度都不大于3的树也成立.

致谢:南京师范大学数学与计算机科学学院的许宝刚教授对本文提出了宝贵的修改意见,在此致衷心感谢.

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Application[M]. New York: The Macmillan Press Ltd,1976.
[2] Bodlaender H L. On the complexity of some coloring games[J]. Int J Found Comput Sci,1991,2(2):133—148.
[3] Guan D, Zhu X. The game chromatic number of outerplanargraphs[J]. J Graph Theory,1999,30(1):67—70.
[4] Chou C Y, Wang W, Zhu X. Relaxed game chromatic number of graphs[J]. Discrete Math,2003,262(1):89—98.
[5] Kierstead H A, Trotter W T. Planar graph coloring withan uncooperative partner[J]. J Graph Theory,1994,18(6):569—584.
[6] Dinski T, Zhu X. A bound for the game chromatic number of graphs[J]. Discrete Math,1999,196(2):109—115.
[7] Faigle U, Kern U, Kierstead H A, *et al*. On the game chromatic number of some classes of graphs[J]. Ars Combin,1993,35(2):143—150.
[8] Kierstead H A. A simple competitive graph coloring algorithm[J]. J Combin Theory Ser B, 2000,78(1):57—68.
[9] Zhu X. The game coloring number of planar graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1999,75(2):245—258.
[10] Zhu X. The game coloring number of pseudopartial k-trees[J]. Discrete Math,2000,215(3):245—262.

Relaxed Game Chromatic Number of Binary Trees

Shen Bangyu, Zhou Xinghe

(1.Department of Mathematics, Huaiyin Teachers College, 223001, Huaian, China)
(2.School of Mathematics & Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: In this paper, the relaxed two-person game coloring on graphs was discussed. By splitting colored vertices, the winning strategy for Alice was obtained. Meanwhile, it is proved that if G is a binary tree and $t=2$, $d\geqslant 3$, then Alice has a winning strategy.

Key words: game coloring, relaxed game coloring, feasible color, relaxed game chromatic number, binary tree

[责任编辑:陆炳新]

万方数据