求解具有长条型内边界的二维调和外问题的一种非重叠型区域分解算法

黄红英,朱薇

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 以二维调和外问题为例,提出一种带椭圆型人工边界的非重叠型区域分解算法.理论分析及数值实验表明,用该方法求解带长条型内边界的外问题是十分有效的.

[关键词] 椭圆型人工边界,区域分解算法,有限元,调和外问题

[中图分类号]O241.8, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)02-0027-07

0 引言

许多科学和工程计算问题都归结为无界区域上的偏微分方程边值问题.边界归化是求解某些无界区域边值问题的强有力的手段.有限元与边界元耦合法已逐渐成为求解无界区域问题的主要方法.尤其是自然边界元与有限元耦合法有许多独特的特点,但耦合法刚度矩阵已不再是带状稀疏的,已有的有限元标准程序也不能被直接利用.近几年随着区域分解算法的兴起,人们对无界区域问题的区域分解算法表现出浓厚的兴趣.于是人们又提出了基于自然边界归化的一类重叠型和不重叠型区域分解算法[5—11].这些算法中,人们通常选取圆周或球面作为人工边界,但对具有长条型内边界外问题,以圆周或球面作为人工边界并非最佳选择,将会导致大量的计算,甚至无法获得满意的结果,而采用椭圆型人工边界能大大缩小计算区域.

本文在文[2,3]的基础上,以二维调和外问题为例,提出一种基于椭圆型人工边界的非重叠型区域分解算法,并讨论其离散问题迭代的收敛性,证明其收敛速度与有限元网格粗细无关,数值例子的计算结果与理论分析完全一致.

1 椭圆外区域上的 Poisson 积分公式和自然积分方程

首先利用椭圆坐标的一些性质导出椭圆外区域上的 Poisson 积分公式和自然积分公式,这为本文的算法奠定基础.对平面上一点,其椭圆坐标 (μ,φ) 与直角坐标(x,y) 的关系如下:

$$\begin{cases} x = f_0 \cosh\mu \cos\varphi, \\ y = f_0 \sinh\mu \sin\varphi, \end{cases} \tag{1}$$

其中 f_0 为正常数,cosh,sinh 为分别表示双曲余弦和双曲正弦.当 μ 取不同的正常数时,(1) 描述了平面上的一族共焦椭圆,它们的公共焦点是$(\pm f_0,0)$. 据文[2] 可知

定理 1.1[2] 变换(1) 有下列性质:

1) 变换(1) 的 Jacobi 行列式为:

$$J = {f_0}^2\cosh^2\mu\sin^2\varphi + {f_0}^2\sinh^2\mu\cos^2\varphi. \tag{2}$$

$J = 0$ 当且仅当$(x,y) = (\pm f_0,0)$.

2) 对 $u \in C^2(\mathbf{R}^2)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = J\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{3}$$

收稿日期: 2003-05-30.

作者简介: 黄红英,女,1974 - ,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,主要从事微分方程数值解的学习与研究,E - mail: huanghongying262@sohu.com

通讯联系人: 杜其奎,1963 - ,南京师范大学数学与计算机科学学院教授,主要从事微分方程数值解的研究.

3) 设 $\Gamma_a := \{(\mu,\varphi):\mu = \alpha, \varphi \in [0,2\pi]\}$ 为椭圆外区域 $\{(\mu,\varphi):\mu > \alpha > 0, \varphi \in [0,2\pi]\}$ 的内边界, ν 为 Γ_a 上的单位外法向量,则

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{\sqrt{J}}\frac{\partial u}{\partial \mu}. \tag{4}$$

设 Γ_0 是平面内分段光滑(或光滑)闭曲线, Ω 是不含原点的以 Γ_0 为边界的外部区域. 考虑Poisson方程Dirichlet外问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{in } \Omega, \\ u = u_0, & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \tag{5}$$

附加 u 有界这一无穷远边界条件,问题(5)存在惟一解. 若 $\Gamma_0 = \{(\mu,\varphi):\mu = \alpha, \alpha > 0, \varphi \in [0,2\pi]\}$ 为椭圆时,且 u_0 为(5)的解在 Γ_0 上的Dirichlet边值,根据自然边界归化原理(见[1—3,10]),有Poisson积分公式

$$u = Pu_0, \ \mu > \alpha \tag{6}$$

及自然积分方程

$$u_\nu = \kappa u_0, \ \mu = \alpha \tag{7}$$

其中 P 为Poisson积分算子, κ 为自然积分算子. 应用分离变量法可得

$$Pu_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{|n|(\alpha-\mu)+in\varphi}, \tag{8}$$

及

$$\kappa u_0 = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| a_n e^{in\varphi}, \tag{9}$$

其中 $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(\alpha,\varphi')e^{-in\varphi'}d\varphi'$, $J_0 = f_0{}^2(\cosh^2\alpha\sin^2\varphi + \sinh^2\alpha\cos^2\varphi)$, $i = \sqrt{-1}$.

2 D-N交替法的构造及其收敛性

下面给出求解一般外区域的边值问题(5)基于自然边界归化的非重叠型区域分解算法(即D-N交替法). 以原点为中心,作椭圆 $\Gamma_1 = \{(\mu,\varphi):\mu = \mu_1, \mu_1 > 0, \varphi \in [0,2\pi]\}$ 包围内边界 Γ_0,且 $\mathrm{dist}(\Gamma_1,\Gamma_0) > 0$. 椭圆 Γ_1 将外区域 Ω 分成由 Γ_1 与 Γ_0 围成的有界区域 Ω_1 及以 Γ_1 为内边界的外区域 Ω_2,且 Ω_2 和 Ω_1 互不重叠. 现构造D-N交替算法如下:

步1 选初始值 $\lambda^0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, $n = 0$.

步2 在 Ω_2 上解Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\Delta u_2^n = 0, & \text{in } \Omega_2, \\ u_2^n = \lambda^n, & \text{on } \Gamma_1. \end{cases} \tag{10}$$

步3 在 Ω_1 上解混合边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u_1^n = 0, & \text{in } \Omega_1, \\ u_1^n = u_0, & \text{on } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u_1^n}{\partial n_1} = -\dfrac{\partial u_2^n}{\partial n_2}, & \text{on } \Gamma_1. \end{cases} \tag{11}$$

步4 在 Γ_1 上令 $\lambda^{n+1} = \theta_n u_1^n + (1-\theta_n)\lambda^n$.

步5 置 $n = n+1$,转第2步.

注意到第2步是求解椭圆外区域的Dirichlet问题. 而第3步仅需问题(10)的解在 Γ_1 上的外法向导数. 于是不需要直接求解(10)式,只要应用自然积分公式(7)由 λ^n 求出 $\frac{\partial u_2^n}{\partial n_2}$,即 $\frac{\partial u_2^n}{\partial n_2} = \kappa(\lambda^n) = \frac{1}{\sqrt{J_0}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n| b_n e^{in\varphi}$, $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda^n e^{-in\varphi'}d\varphi'$, J_1 为椭圆坐标变换在 Γ_1 上的Jacobi行列式. 第3步用标准有限元求解 Ω_1 内

的混合边值问题.由于 Ω_1 是较"小"的有界区域,应用标准有限元程序求解时计算量与存储量均较小,易于实现.

3 D-N 交替算法的离散格式及其收敛性分析

问题(11)的变分形式为:求 $u_1^n \in H^1(\Omega_1)$,且 $u_1^n|_{\Gamma_0} = u_0$,使得

$$a(u_1^n, v) = \int_{\Gamma_1} v \frac{\partial u_1^n}{\partial \nu} ds = -\int_{\Gamma_1} \kappa(\lambda^n) v ds, \forall v \in V_0^1(\Omega_1), \tag{12}$$

其中 $a(u_1^n, v) = \int_{\Omega_1} \nabla u \cdot \nabla v dxdy, V_0^1(\Omega_1) = \{v \in H^1(\Omega_1): v|_{\Gamma_0} = 0\}$.

下面研究该变分形式的离散格式.把区间$[0,2\pi]$分成 N 等分,相应的椭圆 Γ_1 上有 N 个节点,同时在 Ω_1 内作三角形或四边形的有限元剖分,使其在 Γ_1 上的有限元节点与上面 Γ_1 上所得的节点重合.设$\overline{S^h} \subset H'(\Omega_1)$ 为关联于上述剖分的有限元空间,$S^h \subset \overline{S^h} \cap V_o^1(\Omega_1)$.问题(2.12)的离散变分问题为:求 $u_{1h}^n \in \overline{S^h}$,且 $u_{1h}^n|_{\Gamma_o} = u_o$,使得

$$a(u_{1h}^n, v_n) = -\int_{\Gamma_1} K(\lambda^n) v_h ds, \forall v_h \in S^h. \tag{12a}$$

经过对(12a)约束处理后,D-N 交替算法的离散化迭代过程可写为:

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{1i} \\ Q_{i1} & Q_{ii} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B\Lambda^n \\ F_0 \end{pmatrix}, \tag{13a}$$

及

$$\Lambda^{n+1} = \theta_n U_1^n + (1 - \theta_n)\Lambda^n, \tag{13b}$$

其中 U_1^n, U_i^n 分别为在人工边界Γ_1 上,区域 Ω_1 上的相应解函数的近似值向量. Λ^n 为λ^n 在人工边界Γ_1 上的相应的函数值向量.B 正好是人工边界Γ_1 上的自然边界元刚度矩阵且为半正定矩阵,而(13a)式左端的总刚度矩阵则由 Ω_1 上去掉边界 Γ_0 的有限元得到,它是带状稀疏的且为正定矩阵.此外,在整个迭代过程中总刚度矩阵与自然边界元刚度矩阵实际上只需要形成一次.

下面研究 D-N 交替算法的收敛性.以下定理的证明类似文[5]中的证明方法.只是人工边界 Γ_1 的选择有所不同,在文[5]中 Γ_1 是圆,而此处 Γ_1 是椭圆.但文[5]的收敛性分析适用于一般的人工边界.这里不再证明.

定理 3.1 离散的 D-N 算法(13)与如下的预处理 Richardson 迭代法等价

$$S_h^{(1)}(\Lambda^{n+1} - \Lambda^n) = \theta_n(\tilde{F} - S_h\Lambda^n), \tag{14}$$

其中 $S_h^{(1)} = Q_{11} - Q_{1i}Q_{ii}^{-1}Q_{i1}, S_h = S_h^{(1)} + B, \tilde{F} = -Q_{1i}Q_{ii}^{-1}F_0$.

定理 3.2 设预处理 Richardson 迭代法(14)的迭代矩阵的谱半径为 σ,则存在与子区域 Ω_1 上的有限元网格参数无关的正数 β,使得 $\sigma \leqslant \beta$.

定理3.3 若取 $\theta_n = \theta(n = 0,1,2,\cdots)$,则存在一个与子域 Ω_1 上的有限元网格参数 h 无关的参数$\delta(0 < \delta < 1)$,使得当 $0 < \theta < \delta$ 时,预处理 Richardson 迭代法(14)收敛,并且收敛速度与网格参数 h 无关.

4 椭圆外区域上 D-N 交替算法的收敛性及松驰因子的选取

对一般的无界区域 Ω,定量分析上述交替算法的收敛速度较困难.今考虑 Ω 为以原点为中心,$\mu = \mu_0$ 的椭圆 Γ_0 的外部区域,Γ_1 是与 Γ_0 同心且共焦的椭圆且 $\mu = \mu_1$,满足 $0 < \mu_0 < \mu_1$.

引理 4.1 以 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ 为边界的区域 Ω_1 上的调和方程边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{in } \Omega_1, \\ u = u_0, & \text{on } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{on } \Gamma_1. \end{cases} \tag{15}$$

存在惟一解 $u \in H^1(\Omega_1)$,且

$$u(\mu,\varphi) = \sum_{\substack{-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty}\left(\frac{c_m(e^{|m|(\mu-\mu_1)} + e^{|m|(\mu_1-\mu)}) + d_m(e^{|m|(\mu-\mu_0)} - e^{|m|(\mu_0-\mu)})}{e^{|m|(\mu_1-\mu_0)} + e^{|m|(\mu_0-\mu_1)}}\right)e^{im\varphi} + c_0 + d_0(\mu - \mu_0), \tag{16}$$

其中 $u_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\varphi} \in H^{1/2}(\Gamma_0)$, $g = \frac{1}{\sqrt{J_1}}(\sum_{\substack{-\infty \\ m\neq 0}}^{+\infty} d_m |m| e^{im\varphi} + d_0) \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$, J 为椭圆坐标变换的Jacobi行列式, J_1 为 J 在 Γ_1 上的值.

证明　用分离变量法,即可得此结果.

设 $e_2^n|_{\Gamma_1} = \lambda - \lambda^n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{im\varphi} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$,则

$$\frac{\partial e_1^n}{\partial \nu} = -\kappa(\lambda - \lambda^n) = -\frac{1}{\sqrt{J_1}}\sum_{m=-\infty}^{\infty} |m| a_m \exp^{im\varphi}.$$

再求 e_1^n,利用引理4.1,及

$$\frac{\partial e_1^n}{\partial \nu} = -\frac{1}{\sqrt{J_1}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |m| a_m e^{im\varphi},\ 在\ \Gamma_1\ 上,$$

$$e_1^n|_{\Gamma_0} = 0.$$

在 Ω_1 上得

$$e_1^n = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m H_m(\mu) e^{im\varphi},$$

其中

$$H_m(\mu) = \frac{e^{|m|(\mu-\mu_0)} - e^{|m|(\mu_0-\mu)}}{e^{|m|(\mu_1-\mu_0)} + e^{|m|(\mu_0-\mu_1)}}.$$

于是,在 Γ_1 上有

$$e_1^n = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m H_m(\mu_1) e^{im\varphi}.$$

从而

$$\kappa(e_1^n) = -\frac{1}{\sqrt{J_1}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |m| a_m H_m(\mu_1) e^{im\varphi}.$$

于是有

$$\frac{\partial e_1^{n+1}}{\partial \nu} = -\kappa(\lambda - \lambda^{n+1}) = \kappa(\theta_n u_1^n + (1-\theta_n)\lambda^n - \lambda) = \frac{1}{\sqrt{J_1}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |m| a_m(\theta_n H_m(\mu_1) - 1 + \theta_n) e^{im\varphi}.$$

若令 $E^n := \left\|\frac{\partial e_1^n}{\partial \nu}\right\|^2_{-\frac{1}{2},\Gamma_1}$ 则有 $E^n = 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}|a_m|^2$.

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}|a_m|^2(\theta_n H_m(\mu_1) - 1 + \theta_n)^2 \\ &= (1-\theta_n)^2 E^n + 2\pi\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}|a_m|^2\theta_n H_m(\mu_1)(\theta_n H_m(\mu_1) + 2\theta_n - 2). \end{aligned}$$

设

$$\delta_1 = \inf_{\substack{m\in \mathbf{Z} \\ m\neq 0}}\frac{2}{2 + H_m(\mu_1)},$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是全体非零整数的集合.由计算得 $\delta_1 = 2/3$.

如果取 $\theta_n = \theta(n = 0,1,2,\cdots)$ 满足

$$0 < \theta_n < \delta_1. \tag{17}$$

则有

$$E^{n+1} < (1-\theta_n)^2 E^n. \tag{18}$$

若设

$$G_m(\mu_1) = 1 - H_m(\mu_1) = \frac{2}{e^{2|m|(\mu_1-\mu_0)+1}}.$$

则有

$$E^{n+1} = (1-2\theta_n)^2 E^n + 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}} | a_m |^2 \theta_n G_m(\mu_1)(\theta_n G_m(\mu_1) - 4\theta_n + 2).$$

又设

$$\delta_2 = \sup_{\substack{m\in Z\\ m\neq 0}} \frac{2}{4 - G_m(\mu_1)},$$

由计算得 $\delta_2 = \dfrac{2\,e^{2(\mu_1-\mu_0)}+2}{4\,e^{2(\mu_1-\mu_0)}+2}$,若取 $\theta_n(n=1,2,\cdots)$ 满足

$$\delta_2 \leqslant \theta_n < 1. \tag{19}$$

则有

$$E^{n+1} < (1-2\theta_n)^2 E^n. \tag{20}$$

综上所述,只要 $\theta_n \in (0,1)$,当 $n\to\infty$ 时,E^n 单调下降趋于零.又由 $e_1^n |_{\Gamma_0}=0$ 及有限元理论知

$$\| e_1^n \|_{1,\Omega_1} \leqslant C_1(| e_1^n |_{1,\Omega_1} + | \int_{\Gamma_0} e_1^n \mathrm{d}s |) = C_1 | e_1^n |_{1,\Omega_1}.$$

和

$$| e_1^n |_{1,\Omega_1} \leqslant C_2 \left\| \frac{\partial e_1^n}{\partial v} \right\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_1}.$$

于是有

$$\| e_1^n \|_{1,\Omega_1}^2 \leqslant C\cdot E^n \to 0, n\to\infty.$$

从而 D-N 交替算法收敛.

注 1 由式(17)~(20)可知,当 $\theta_n \in (0.5,0.66)$ 时,D-N 交替算法收敛的更快.第 5 节的数值例子也证实了这一点.

5 数值例子

在下面的数值例子中,区域 Ω 为椭圆周 $\Gamma_0 = \{(\mu,\varphi) | \mu_0 = \mu_0, \varphi\in[0,2\pi]\}$ 的外部区域.取人工边界为椭圆 $\Gamma_1 = \{(\mu,\varphi) | \mu=\mu_1, \varphi\in[0,2\pi]\}$.对有界区域 Ω_1 作如下有限元剖分:先将区间$[0,2\pi]$分成 N 等分,相应的在椭圆周 Γ_0,Γ_1 上各有 N 个分点,让边界 Γ_0 和 Γ_1 上的节点与这些分点重合.连接 Γ_0 和 Γ_1 上对应节点,得到 N 条径向线段,再将这些径向线段 M 等分得其余节点,最后通过这些节点得到 Ω_1 上的一个三角形单元剖分.计算 B 的元素时,用 $\sum_{n=0}^{20}$ 替换公式中的 $\sum_{n=0}^{+\infty}$.用 m 表示 $\bar{\Omega}_1$ 上的节点总数.

我们用 e 表示 $\bar{\Omega}_1$ 上的最大节点误差 $e(n) = \sup_{P_i\in\bar{\Omega}_1} | u(P_i) - u_{1h}^n(P_i) |$.用 e_h 表示前后两步解在节点上的差的绝对值的最大值 $e_h(n) = \sup_{P_i\in\bar{\Omega}_1} | u_{1h}^{n+1}(P_i) - u_{1h}^n(P_i) |$.并用 q_h 表示模拟收敛速度 $q_h(n) = \dfrac{e_h(n-1)}{e_h(n)}$.

例 1 用本文的离散 D-N 交替算法求解外边值问题(5),$u_0 = \dfrac{\cosh\mu_0\cos\varphi}{f_0(\cosh^2\mu_0 - \sin^2\varphi)}$,其真解 $u = \dfrac{\cosh\mu\cos\varphi}{f_0(\cosh^2\mu - \sin^2\varphi)}$.取 $\mu_0 = 0.5, \mu_1 = 1.5, N = 32, M = 5, m = 192, \theta_n = \theta(n=0,1,2,\cdots)$,$\theta$ 取不同的数值时,节点的最大相对误差、收敛速度,精度一定时迭代次数与 θ 的关系分别由表 1,表 2 和表 3 所示:

表1　$\bar{\Omega}_1$ 上的节点最大相对误差

θ	迭代次数(n)					
	0	1	2	3	4	5
0.50	6.770 7e - 1	9.795 4e - 2	3.829 1e - 2	3.326 5e - 2	3.266 0e - 2	3.258 6e - 2
0.56	6.770 7e - 1	2.953 3e - 2	3.358 8e - 2	3.250 0e - 2	3.258 2e - 2	3.257 6e - 2
0.60	6.770 8e - 1	3.768 5e - 2	3.692 7e - 2	3.201 4e - 2	3.269 4e - 2	3.259 0e - 2
0.64	6.770 8e - 1	8.485 6e - 2	4.539 5e - 2	3.019 0e - 2	3.310 2e - 2	3.249 5e - 2
0.68	6.770 7e - 1	1.320 2e - 1	6.077 2e - 2	2.591 1e - 2	3.435 9e - 2	3.207 5e - 2
0.70	6.770 7e - 1	1.556 0e - 1	7.108 7e - 2	2.392 5e - 2	3.559 1e - 2	3.163 2e - 2

表2　收敛速度与松弛因子的关系

θ	n	0	1	2	3	4	5
0.58	e	2.613 1e - 1	8.157 1e - 3	8.500 1e - 3	8.475 6e - 3	8.478 5e - 3	8.478 1e - 3
	e_h		2.668 1e - 1	6.188 8e - 3	4.732 0e - 4	1.215 8e - 4	3.635 3e - 5
	q_h			43.111	13.079	3.892 0	3.344 5
0.62	e	2.613 1e - 1	2.389 6e - 2	9.047 5e - 3	8.461 8e - 3	8.480 8e - 3	8.477 6e - 3
	e_h		2.852 1e - 1	2.625 3e - 2	2.535 8e - 3	3.576 5e - 4	9.563 2e - 5
	q_h			10.864	10.353	7.090 2	3.739 8
0.64	e	2.613 1e - 1	3.310 0e - 2	1.060 6e - 2	8.445 4e - 3	8.485 4e - 3	8.477 9e - 3
	e_h		2.944 1e - 1	3.747 1e - 2	4.900 3e - 3	7.463 1e - 4	1.716 0e - 4
	q_h			7.856 9	7.646 6	6.566 1	4.349 2
0.68	e	2.613 1e - 1	5.149 7e - 2	1.557 5e - 2	8.375 2e - 3	8.503 2e - 3	8.471 6e - 3
	e_h		3.128 1e - 1	6.185 2e - 2	1.238 7e - 2	2.625 3e - 3	6.539 8e - 4
	q_h			5.057 4	4.993 1	4.718 5	4.014 3
0.70	e	2.613 1e - 1	6.069 7e - 2	1.883 9e - 2	8.318 2e - 3	8.522 2e - 3	8.465 4e - 3
	e_h		3.220 1e - 1	7.501 4e - 2	1.764 7e - 2	4.318 6e - 3	1.179 9e - 3
	q_h			4.292 6	4.250 9	4.086 2	3.660 3

例2　为了得到收敛速度与网格及收敛速度与人工边界上的 μ 值的关系,取 $u_0 = \dfrac{\cosh\mu_0\cos\varphi}{f_0(\cosh^2\mu_0 - \sin^2\varphi)}$,松弛因子 $\theta_n = 0.58$,再分别取 $N = 8, M = 2, m = 24; N = 16, M = 4, m = 80; N = 32, M = 8, m = 288$.并分别用 $h, h/2, h/4$ 表示这三套网格,$\mu_0 = 0.5$ 时相关的数值结果分别由表4、表5和表6所示:

表3　$\|u - u_k\|_\infty \simeq p$ 时迭代次数与松弛因子的关系

μ_1	松弛因子(θ)									
	p	0.3	0.4	0.5	0.55	0.58	0.60	0.65	0.7	0.8
1.5	0.001	7	5	3	3	2	3	4	4	6
2	0.015	5	4	3	2	3	3	4	4	7
4	0.020	3	2	2	2	2	2	2	3	5

表4　$\mu_1 = 2$ 时节点最大误差

网格	迭代次数(n)					
	0	1	2	3	4	5
h	2.911 2e - 1	5.949 5e - 2	7.890 2e - 2	7.669 4e - 2	7.699 0e - 2	7.693 9e - 2
$h/2$	2.182 7e - 1	2.885 6e - 2	2.112 4e - 2	1.947 9e - 2	1.948 8e - 2	1.949 0e - 2
$h/4$	1.986 4e - 1	2.287 2e - 2	7.999 9e - 3	7.959 3e - 3	7.962 8e - 3	7.962 8e - 3

表5　$\mu_1 = 4$ 时节点最大误差

网格	迭代次数(n)					
	0	1	2	3	4	5
h	1.605 6e - 1	1.042 4e - 1	1.079 4e - 1	1.038 7e - 1	1.054 4e - 1	1.046 1e - 1
$h/2$	6.138 2e - 2	3.410 1e - 2	3.366 9e - 2	3.376 0e - 2	3.373 4e - 2	3.374 5e - 2
$h/4$	3.734 5e - 2	1.359 6e - 2	1.361 6e - 2	1.361 8e - 2	1.361 4e - 2	1.361 7e - 2

表 6　$\mu_1 = 1.5$ 时收敛速度与网格的关系

网格	n	0	1	2	3	4	5
	e	3.040 6e - 1	7.010 8e - 2	7.138 4e - 2	7.143 1e - 2	7.142 2e - 2	7.12 3e - 2
h	e_h		2.878 0e - 1	5.825 4e - 3	8.094 8e - 4	1.283 0e - 4	2.368 7e - 5
	q_h			49.403	7.196 5	6.309 5	5.416 2
	e	2.703 9e - 1	1.475 7e - 2	1.845 3e - 2	1.820 4e - 2	1.822 2e - 2	1.822 1e - 2
$h/2$	e_h		2.741 2e - 1	6.763 5e - 3	3.697 1e - 4	5.587 9e - 5	1.153 3e - 5
	q_h			40.530	18.294	6.616 2	4.845 0
	e	2.591 4e - 1	5.834 7e - 3	6.039 6e - 3	6.025 1e - 3	6.026 8e - 3	6.026 6e - 3
$h/4$	e_h		2.632 8e - 1	6.277 8e - 3	5.017 4e - 4	6.411 7e - 5	9.402 4e - 6
	q_h			41.939	12.512	7.825 4	6.819 2

从以上数值计算结果来看:1.迭代序列是几何收敛的;2.网格越细,迭代收敛解与准确解的误差越小,误差阶接近于 $O(h^2)$;3.表3说明:为达到要求的精度,所需迭代次数与松弛因子选取密切相关;一般 θ 在0.55左右取值效果较好.4.表2 ~ 5说明:收敛速度与人工边界上的 μ 值有关,μ 值越大,收敛越慢;5.适当选取松弛因子,收敛速度极快,且收敛速度与有限元网格粗细无关.

[参考文献]

[1] 余德浩,贾祖朋.椭圆边界上的自然积分算子及各向异性外问题的耦合算法[J].计算数学,2002,24(3):375—384.

[2] 邬吉明,余德浩,椭圆外区域上的自然边界元法[J].计算数学,2000,22(3):355—368.

[3] Ben-Porat G, Givoli D. Solution of unbounded domain problems using elliptic artificial boundaries[J]. Communications in numerical methods in engineering,1995,11(9):735—741.

[4] 邬吉明.求解具有长条型内边界的外问题的一种重叠型区域分解算法[J].工程数学学报,2001,18(2):123—126.

[5] 余德浩.无界区域非重叠区域分解算法的离散化及其收敛性[J].计算数学,1996,18(3):328—336.

[6] 余德浩.无界区域 D-N 区域分解算法的松弛因子选取与收敛速率[J].计算物理,1998,15(1):53—56.

[7] Du Qikui, Yu Dehao. Dirichlet-Neumann alternating algorithm based on the natural boundary reduction fortime-dependent problems over an unbounded domain[J]. Applied Numerical Mathematics,2003,44(4):471—486.

[8] 余德浩,贾祖朋. 二维 Helmholtz 方程外问题基于自然边界归化的非重叠型区域分解算法[J].计算数学,2000,22(2):227—240.

[9] 杨敏,张磊.无穷凹角型区域椭圆边值问题的非重叠区域分解算法[J].南京师大学报(自然科学版),2002,25(4):10—16.

[10] 余德浩.自然边界元方法的数学理论[M].北京:科学出版社,1993.

[11] 余德浩.无界区域上基于自然边界归化的一种区域分解算法[J].计算数学,1994,16(4):448—459.

[12] 吕涛,石济民,林振宝.区域分解算法——偏微分方程数值解新技术[M].北京:科学出版社,1992.

An Non-overlapping Domain Decomposition Algorithm for Exterior Two-dimesional Harmonic Problems in Elongated Domains

Huang Hongying, Zhu Wei

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: A non-overlapping domain decomposition algorithm which is based on the elliptic artifial boundary for solving the two-dimensional harmonic problems over unbounded domain is offered and iterative convengence of its discreted form is discussed. Theoretical analysis as well as numerical results show that this method is very efficient for exterior two-dimentional harmonic problems in elongted domains.

Key words: elliptic artifial boundary, domain decomposition algorithm, finite element, exterior harmonic problem

[责任编辑:陆炳新]