亚纯函数族的几个正规定则

陈晓绚

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 设 k 为一正整数, b 为一非零常数, $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数, $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 为 D 上的全纯函数.若对 $\mathscr{F}$ 中任意函数 f, f 在 D 内的零点重数至少为 $k+2$,且对 $\mathscr{F}$ 中的任意两个函数 f,g, f,g 在 D 内分担 0, $f_k(z)$ 与 $g_k(z)$ 在 D 内分担 1,其中 $f_k(z)=f^{(k)}(z)+a_1(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f(z)$, $g_k(z)=g^{(k)}(z)+a_1(z)g^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)g(z)$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

[关键词] 亚纯函数,全纯函数,正规族

[中图分类号]O174.52, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)02-0034-05

0 引言

设 D 为 $\mathscr{C}$ 上的一个区域. $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的亚纯函数族.若每一个 $\mathscr{F}$ 中的序列 $\{f_n\}$ 都存在一个子序列 $\{f_{n_j}\}$ 按球面距离局部一致收敛到一个亚纯函数或是 ∞.则称 $\mathscr{F}$ 在 D 上正规[1-3].

设 f,g 都是 D 内的亚纯函数, $a\in\mathscr{C}\cup\{\infty\}$.若 $g(z)=a$ 时当且仅当 $f(z)=a$,则称 f,g 在 D 内分担 a.

1912 年,[4] 证明了如下一个著名的正规定则.

定理 A 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的亚纯函数族, a,b 和 c 为复平面上三个互相判别的值.若对任意 $f\in\mathscr{F}$, $f\neq a,b,c$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

1994 年,[5] 推广定理 A,证明了

定理 B 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的亚纯函数族, a,b 和 c 为复平面上三个互相判别的值.若 $\mathscr{F}$ 内的任意一对函数 f,g 在 D 内分担 a,b 和 c,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

1979 年,[6] 证明了如下结果.

设 k 为一正整数, b 为一非零常数, $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数.若对任意的 $f\in\mathscr{F}$, $f\neq 0$, $f^{(k)}\neq b$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

最近,[7] 推广了定理 C,证明了

定理 D 设 k 为一正整数, b 为一非零常数, $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数.若对任意 $f\in\mathscr{F}$ 其零点重数至少为 $k+2$,且对任意两个函数 $f,g\in\mathscr{F}$, f,g 在 D 内分担 0, $f^{(k)},g^{(k)}$ 分担 b,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

定理 E 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数.若对族中每个函数 f, f 在 D 内的零点重数至少为 $k+1$,极点重数至少为 2.且对任意两个函数 $f,g\in\mathscr{F}$, f,g 在 D 内分担 0, $f^{(k)},g^{(k)}$ 分担 b,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

1985 年,[8] 和[9] 证明了

定理 F 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数, $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 为 D 上的全纯函数.若对族中每个函数 f, $f\neq 0$, $f_k(z)\neq 1$,其中 $f_k(z)=f^{(k)}(z)+a_1(z)f^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f(z)$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

由定理 C ~ 定理 F,我们自然问如下问题:将定理 D 与定理 E 中的 $f^{(k)}(z)$ 与 $g^{(k)}(z)$ 换成 $f_k(z)$ 与 $g_k(z)$,结论是否仍成立?本文给出肯定的回答,我们证明了

定理 1 设 k 为一正整数, b 为一非零常数, $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数, $a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 为 D 上的全纯函数.若对 $\mathscr{F}$ 中任意函数 f, f 在 D 内的零点重数至少为 $k+2$,且对 $\mathscr{F}$ 中的任意两个函数 f,g,

---

收稿日期:2003-10-11.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10071038).

作者简介:陈晓绚,女,1979-,南京师范大学数学与计算机科学学院在读硕士,从事亚纯函数值分布的学习和研究,E-mail:CXX7910@sina.com

f,g 在 D 内分担 0,$f_k(z)$ 与 $g_k(z)$ 在 D 内分担 1,其中 $f_k(z) = f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z)$,$g_k(z) = g^{(k)}(z) + a_1(z)g^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)g(z)$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

定理2 设 k 为一正整数,b 为一非零常数,$\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数,$a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 为 D 上的全纯函数.若对 $\mathscr{F}$ 中任意函数 f, f 在 D 内的零点重数至少为 $k+1$,极点重数至少为 2,且对 $\mathscr{F}$ 中的任意两个函数 f,g,f,g 在 D 内分担 0,$f_k(z)$ 与 $g_k(z)$ 在 D 内分担 1,其中 $f_k(z) = f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z)$,$g_k(z) = g^{(k)}(z) + a_1(z)g^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)g(z)$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

推论3 设 k 为一正整数,b 为一非零常数,$\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族全纯函数,$a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 为 D 上的全纯函数.若对 $\mathscr{F}$ 中任意函数 f,f 在 D 内的零点重数至少为 $k+1$,且对 $\mathscr{F}$ 中的任意两个函数 f,g,f,g 在 D 内分担 0,$f_k(z)$ 与 $g_k(z)$ 在 D 内分担 1,其中 $f_k(z) = f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z)$,$g_k(z) = g^{(k)}(z) + a_1(z)g^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)g(z)$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

1 重要引理

引理1[10] 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数,$a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 为 D 上的全纯函数.对族中每个函数 f,f 在 D 内的零点重数至少为 $k+2$,若对任意函数 $f \in \mathscr{F}$,$f_k(z) \neq 1$,其中 $f_k(z) = f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z)$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

引理2[10] 设 $\mathscr{F}$ 为区域 D 上的一族亚纯函数,$a_1(z),a_2(z),\cdots,a_k(z)$ 为 D 上的全纯函数.若对族中每个函数 f,f 在 D 内的零点重数至少为 $k+1$,极点重数至少为 2.若对任意函数 $f \in \mathscr{F}$,$f_k(z) \neq 1$,其中 $f_k(z) = f^{(k)}(z) + a_1(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z)f(z)$,则 $\mathscr{F}$ 在 D 内正规.

引理3[7] 设 f 为区域 D 上的一亚纯函数.l 为一满足 $l > k + 4 + \dfrac{2}{k}$ 的正整数.若 $f \neq 0$ 且 $f^{(k)} - 1$ 的零点重数至少为 l,则 f 为一常数.

引理4[11] 设 f 为一超越亚纯函数,b 为一非零值,则对每个正整数 k,f 或者 $f^{(k)} - b$ 有无穷多个零点.

引理5[12,13] 设 $\mathscr{F}$ 为单位圆盘上的一族亚纯函数.且对任意 $f \in \mathscr{F}$,$f \neq 0$.若 $\mathscr{F}$ 在 D 内不正规,则对每个 $\alpha \geqslant 0$,必存在

a) 实数 r,$0 < r < 1$,

b) 复数 z_n,$|z_n| < r$,

c) 函数列 $f_n \in \mathscr{F}$,

d) 正数 $\rho_n \to 0$,

使得 $\rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) = g_n(\zeta)$ 在开平面的任意紧子集上按球面距离一致收敛到一个非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$.

2 定理1和2的证明

由于定理1和定理2的证明类似,以下我们只证明定理1.

设 z_0 是 D 内任意一定点.以下证明 $\mathscr{F}$ 在 z_0 正规.$f \in \mathscr{F}$.我们考虑两种情况.

情形1 $f_k(z_0) \neq 1$.则存在 z_0 的邻域 $D_\delta = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ 使得在 D_δ 上,$f_k(z_0) \neq 1$.从而,对任意的 $g \in \mathscr{F}$,g 的零点重数至少为 $k+2$ 且 $g_k \neq 1$.于是由引理1知,$\mathscr{F}$ 在 D_δ 上正规,即 $\mathscr{F}$ 在 z_0 正规.

情形2 $f_k(z_0) = 1$.则由定理条件,$f(z_0) \neq 0$.从而存在 z_0 的邻域 $D_\delta = \{z : |z - z_0| < \delta\}$ 使得在 D_δ 上,$f \neq 0$,在 $D_\delta{}^0 = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 上 $f_k(z_0) \neq 1$.则由引理1可知,$\mathscr{F}$ 在 $D_\delta{}^0$ 正规.下面我们用杨[14]的方法来完成定理证明.

设 $\{f_n\}$ 为 $\mathscr{F}$ 中的任意一列函数,则存在 $\{f_n\}$ 的一列子序列(这里,不失一般性,我们仍用 $\{f_n\}$ 表示)在 $D_\delta{}^0$ 上按球面距离局部一致收敛到一个函数 g.下面,我们再分两种情况讨论.

情形2.1 $g \neq 0$.则由 Hurwitz 定理可知,在 $D_\delta{}^0$ 上,$g \neq 0$.因此,存在常数 A 使得

$$\min_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} \left| g\left(z_0 + \frac{\delta}{2} e^{i\theta}\right) \right| > A > 0$$

于是,对充分大的 n,有

$$\min_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\left|f_n\left(z_0+\frac{\delta}{2}e^{i\theta}\right)\right|>\frac{A}{2}>0,$$

因为 f_n 为 D_δ 上的亚纯函数,且 $f_n\neq 0$,则 $1/f_n$ 在 D_δ 上全纯,即 $1/f_n$ 在 $\overline{D}_{\frac{\delta}{2}}=\{z:|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{2}\}$ 上全纯.从而有

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\frac{1}{\left|f_n\left(z_0+\frac{\delta}{2}e^{i\theta}\right)\right|}<\frac{2}{A}.$$

由最大模原理,有

$$\max_{|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{2}}\frac{1}{|f_n(z)|}<\frac{2}{A},$$

于是,

$$\min_{|z-z_0|\leqslant\frac{\delta}{2}}|f_n(z)|>\frac{A}{2}>0.$$

故存在 $\{f_n\}$ 的子序列在 $D_{\frac{\delta}{2}}$ 上按球面距离局部一致收敛.

情形 2.2　$g\equiv 0$.则 $\{f_n\}$ 在 $D_\delta{}^0$ 上局部一致收敛到 0.从而 $\{f_n{}^{(k)}\}$,$\{f_n{}^{(k+1)}\}$ 也局部一致收敛到 0,即 $f_{n_k}(z)$,$(f_{n_k}(z))'$ 也局部一致收敛到 0.于是,对充分大的 n,由辐角原理,我们有

$$\left|N\left(\frac{\delta}{2},z_0,f_{n_k}-1\right)-N\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{1}{f_{n_k}-1}\right)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\frac{\delta}{2}}\frac{(f_{n_k}(z))'}{f_{n_k}(z)-1}dz\right|<1$$

即

$$N\left(\frac{\delta}{2},z_0,f_{n_k}-1\right)=N\left(\frac{\delta}{2},z_0,\frac{1}{f_{n_k}-1}\right).$$

因为 $f_k(z)-1$ 的极点重数至少为 $k+1$,所以,$f_{n_k}(z)-1$ 的零点重数也至少为 $k+1$.下面再分两种情况讨论:

情形 2.2.1　存在无限多个正整数 n 使得 $f_{n_k}(z)-1=f_n{}^{(k)}(z)+a_1(z)f_n{}^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f_n(z)-1$ 在 z_0 的零点重数大于 $k+4+\frac{2}{k}$.我们说 $G=\{f_n,n\in S\}$ 在 $D_{\frac{\delta}{2}}$ 上正规.事实上,假设 G 在 $D_{\frac{\delta}{2}}$ 上不正规.则由引理 5,我们有,$f_n\in G$,$z_n\in D_{\frac{\delta}{2}}$,$\rho_n\to 0^+$ 使得 $\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)=g_n(\zeta)$ 按球面距离局部一致收敛到非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$.所以,

$$g_j^{(k)}(\zeta)-1=\left[f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)+\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-l)}(z_j+\rho_j\zeta)-1\right]-\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-l)}(z_j+\rho_j\zeta)$$

并有,

$$\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-l)}(z_j+\rho_j\zeta)=\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)\rho_j^{(l)}g_j^{(k-l)}(\zeta)$$

因为 $a_0(z),a_1(z),\ldots,a_{k-1}(z)$ 在 D 上解析.所以,当 j 充分大时有,

$$\left|a_i(z_j+\rho_j\zeta)\right|\leqslant M\left(\frac{1+r}{2},a_i(z)\right)<\infty\qquad(i=0,1,\cdots,k-1)$$

因为 $\sum_{l=0}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)\rho_j^{(l)}g_j^{(k-l)}(\zeta)$ 在 $D_{\frac{1}{2}\delta}=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<\frac{1}{2}\delta\}$ 上一致收敛到 0.

所以

$$g_j^{(k)}(\zeta)+\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-l)}(z_j+\rho_j\zeta)-1$$

在 $D_{\frac{1}{2}\delta}=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<\frac{1}{2}\delta\}$ 上局部一致收敛到 $g^{(k)}(\zeta)-1$.即 $f_k(z)-1$ 在 $D_{\frac{1}{2}\delta}=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<$

$\frac{1}{2}\delta\}$ 上一致收敛到 $g^{(k)}(\zeta)-1$.

于是,由 Hurwitz 定理知,$g\neq 0$ 且 $g^{(k)}-1$ 的零点重数大于 $k+4+\frac{2}{k}$.从而,由引理3知,g 为常数.矛盾.所以,存在 $\{f_n\}$ 的子序列在 $D_{\frac{1}{2}\delta}$ 内按球面距离局部一致收敛.

情形 2.2.2 存在无限多个正整数 n 使得 $f_{n_k}(z)-1=f_n^{(k)}(z)+a_1(z)f_n^{(k-1)}(z)+\cdots+a_k(z)f_n(z)-1$ 在 z_0 的零点重数为 $l(k+1\leqslant l\leqslant k+4+\frac{2}{k})$.我们说 $G=\{f_n,n\in S_l\}$ 在 $D_{\frac{\delta}{2}}$ 内正规.假设不正规,则由引理5,我们有 $f_n\in G,z_n\in D_{\frac{\delta}{2}},\rho_n\to 0^+$ 使得 $\rho_n^{-k}f_n(z_n+\rho_n\zeta)=g_n(\zeta)$ 按球面距离局部一致收敛到非常数的亚纯函数 $g(\zeta)$.所以,

$$g_j^{(k)}(\zeta)-1=\left[f_j^{(k)}(z_j+\rho_j\zeta)+\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-l)}(z_j+\rho_j\zeta)-1\right]-\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-l)}(z_j+\rho_j\zeta)$$

并有,

$$\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-l)}(z_j+\rho_j\zeta)=\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)\rho_j^{(l)}g_j^{(k-l)}(\zeta)$$

因为 $a_0(z),a_1(z),\ldots,a_{k-1}(z)$ 在 D 上解析.所以,当 j 充分大时有,

$$|a_i(z_j+\rho_j\zeta)|\leqslant M\left(\frac{1+r}{2},a_i(z)\right)<\infty\qquad(i=0,1,\cdots,k-1)$$

因为 $\sum_{l=0}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)\rho_j^{(l)}g_j^{(k-l)}(\zeta)$ 在 $D_{\frac{1}{2}\delta}=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<\frac{1}{2}\delta\}$ 上一致收敛到0.

所以

$$g_j^{(k)}(\zeta)+\sum_{l=1}^{k-1}a_l(z_j+\rho_j\zeta)f_j^{(k-l)}(z_j+\rho_j\zeta)-1$$

在 $D_{\frac{1}{2}\delta}=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<\frac{1}{2}\delta\}$ 上一致收敛到 $g^{(k)}(\zeta)-1$.即 $f_k(z)-1$ 在 $D_{\frac{1}{2}\delta}=\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<\frac{1}{2}\delta\}$ 上一致收敛到 $g^{(k)}(\zeta)-1$.

于是,由 Hurwitz 定理可知,$g\neq 0$ 且 $g^{(k)}-1$ 的零点重数至少为 l.我们说 $g^{(k)}-1$ 只有一个零点.事实上,假设 ζ_1 和 ζ_2 为 $g^{(k)}-1$ 的2个互相判别的零点.则 $g^{(k)}-1$ 在 ζ_1 和 ζ_2 的零点重数至少为 l.令 γ 为含有 ζ_1 和 ζ_2 的简单闭曲线,且 g 在 γ 上无零点,在 γ 上及 γ 内无极点.则 $g_n(\zeta)$ 在 γ 内和 γ 上一致收敛到 $g(\zeta)$,所以,$f_k(z)-1$ 在 γ 内和 γ 上一致收敛到 $g^{(k)}-1$.由辐角原理,对充分大的 n,在 γ 内,$f_k(z)-1$ 与 $g^{(k)}-1$ 有相同的零点数(计重数).但是,$f_k(z)-1$ 只有 l 个零点(计重数),$g^{(k)}-1$ 却有至少 $2l$ 个零点(计重数),矛盾.

由上述讨论可知,$g^{(k)}-1$ 只有一个零点且重数为 l.因为 $g_n^{(k)}$ 在 $D_{\frac{1}{2}\delta}$ 内有 l 个极点(计重数),$g^{(k)}$ 在 $\mathscr{C}$ 内至多有 l 个极点(计重数).假设 $g^{(k)}$ 的极点个数大于 l.选择 $R>0$,使得 $g^{(k)}$ 在 $D_R=\{z:|z|<R\}$ 内的极点个数至少为 $l+1$.且在 $\gamma_R=\{z:|z|=R\}$ 上 $g^{(k)}\neq\infty,g^{(k)}\neq 1$.因为 g_n 在 γ_R 上一致收敛到 g,所以,在 γ_R 上 $g_n^{(k)}-1$ 一致收敛到 $g^{(k)}-1$.从而,对充分大的 n,

$$|[g_n^{(k)}(\zeta)-1]-[g^{(k)}(\zeta)-1]|<|g^{(k)}(\zeta)-1|,\zeta\in\gamma_R$$

由儒歇定理[1]可知,在 D_R 内,$g^{(k)}$ 和 $g_n^{(k)}$ 的极点个数相同(计重数).但 $g_n^{(k)}$ 至多有 l 个极点,而 $g^{(k)}$ 却有 $l+1$ 个极点,矛盾.

从而有,

(i) $g\neq 0$

(ii) $g^{(k)}-1$ 只有一个零点且重数为 l

(iii) $g^{(k)}$ 至多有 l 个极点(计重数).

我们说没有这样的函数存在,其证明与[7]中定理1的证明完全类似,故从略.

[参考文献]

[1] Hayman W K. Meromorphic Functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
[2] Schiff J. Normal Families[M]. Berlin:Springer-Verlag, 1993.
[3] Yang L. Value Distribution Theory[M]. Berlin: Springer-Verlag&Science Press,1993.
[4] Montel P. Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valuers exceptionnelles dans un domaine[J]. Ann E'cole Norm. Sup. 1912,29(3):487—535.
[5] Sun D C. The shared value criterion for normality[J]. J Wuhan Univ Natur Sci Ed, 1994,40(3):9—12.
[6] Gu Y X. Un Critère de normalité de fonctions méromorphes[J]. Sci Sinica,1979,(Special Issue):267—274.
[7] Fang M L, Zalcman L. A note on normality and shared values[J]. J Aust Math Soc,2004,76:141—150.
[8] Yang L. A general criterion of normality[J]. Acta Math. Sinica (New series),1985,2(1):181—193.
[9] 朱经浩.亚纯函数的一个总的正规定则[J].科学通报,1986,31(3):174—177.
[10] 王跃飞,方明亮. 涉及零点重数的亚纯函数的值分布[J]. 数学学报, 1998,41(4):743—748.
[11] Xue G F, Pang X C. A criterion for normal families of meromorphic functions[J]. J East China Norm Univ Natur Sci Ed,1988,(2):15—22.
[12] Zalcman L. Normal families:new perspectives[J]. Bull Amer Math Soc,1998,35(3):215—230.
[13] Yang L. Normality for families of meromorphic functions[J]. Sci Sinica,1986,29(12):1263—1274.
[14] Fang M L, Hong W. Some restults on normal family of meromorphic functions[J]. Bull Malays Math Sci Soc,2000,23(2):143—151.
[15] Conway J B. Functions of one complex variable[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1973.
[16] Schiwick W. Normality criterion for families of meromorphic functions[J]. J Analyse Math,1989,52:241—289.
[17] Hayman W K. Picard values of meromorphic functions and their derivatives[J]. Ann of Math,1959,70(2):9—42.

Some Normality Criteria for Families of Meromorphic Functions

Chen Xiaoxuan

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: Let k be a positive integer and b a nonzero constant. Suppose that $\mathscr{F}$ is a family of meromorphic functions ina domain D, $a_1(z), a_2(z), \cdots, a_k(z)$ are holomorphic functions . If each function $f \in \mathscr{F}$ has onlyzeros of multiplicity at least $k+2$ and for any two functions $f, g \in \mathscr{F}$, f and g share 0 in D ,$f_k(z)$ and $g_k(z)$ share 1 in D, where $f_k(z) = f^{(k)}(z) + a_1(z) f^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z) f(z)$ and $g_k(z) = g^{(k)}(z) + a_1(z) g^{(k-1)}(z) + \cdots + a_k(z) g(z)$, then $\mathscr{F}$ is normal in D.

Key words: Meromorphic functions, normality, shared values

[责任编辑:陆炳新]