关于无 6-,8-和 9-圈平面图的 3-选色

张海辉[1,2],沈邦玉[1,2]

(1.淮阴师范学院数学系,223001,江苏,淮安)

(2.南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 图 G 的选色数,记为 $ch(G)$,定义为最小的自然数 k,使得满足:对任一顶点给定 k 种颜色的列表,且染色时每个顶点的颜色只能从自身的颜色列表中选择时,总存在图 G 顶点的一个正常着色.文章证明了每个围长至少为 4 且不含 6-圈,8-圈和 9-圈的平面图是 3-可选色的.

[关键词] 圈,围长,选色,平面图

[中图分类号]O157.5, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)02-0039-04

0 引言

文中所考虑的图都是有限、简单平面图.$G=(V,E,F)$ 表示一个平面图,V,E,F 分别为其顶点集,边集和面集.若 $uv\in E(G)$,则称 u,v 在 G 中相邻.若 u 是边 e 的一个端点,则称顶点 u 与这条边 e 相关联.若两个面至少有一条公共边,则这两个面称为是相邻的.一个面 f 边界记为 $b(f)$,任何面 f 与 $b(f)$ 上所有顶点及边都相关联.v 的邻集 $N_G(v)$(即 G 中与 v 相邻的顶点集)中元素的个数即为顶点 v 的度数.度数为 k 的项点称为 k- 顶点.若 $r\leqslant k$ 或 $1\leqslant k\leqslant r$,此时 k- 顶点 v 分别称之为 r^+ - 或 r^- - 顶点.G 中顶点的最大与最小度分别记为 $\Delta(G)$,$\delta(G)$.与 f 关联的边的数目(割边按两次算)记为面 f 的度数,记作 $d_G(f)$.若 $d_G(f)=k$,则 f 叫做 k- 面.若 $r\leqslant k$ 或 $3\leqslant k\leqslant r$,则 k- 面 f 分别称之为 r^- - 或 r^- - 面.有 k 个顶点的圈称为 k- 圈.G 中所有 k- 圈的集记为 C_k.若 $C_k=\phi$,则称图 G 是 C_k-free.G 中最短圈的长度称为 G 的围长.

定义 若与一个 h- 面相关联的所有顶点均为 3^- - 顶点,则称这个 h- 面为 light h- 面,否则称为是一个 non-light h- 面.若 f 是一个 non-light h- 面,且 $b(f)$ 上除了一个 4 度点外,其余点均为 3^- - 顶点,则称此 h- 面为 minimal h- 面,否则若 h- 面至少与两个 4^+ - 顶点相关联,则称此 h- 面为 non-minimal h- 面.

对 G 中所有顶点 $v\in V(G)$ 的一个颜色安排,使得每个顶点能从其关联的色表中选色并且相邻的两个顶点选择不同的颜色称为 G 的一个 L- 着色.若对图 G 的每个满足 $L=\{L(v)\mid |L(v)|=k,v\in V(G)\}$,图 G 总存在 L- 着色,则称图 G 是 k- 可选色.定义使得图 G 是 k- 可选色的最小的自然数 k 为图 G 的选色数,记为 $ch(G)$.

关于 2- 可选色的图,Erdös 等人在[1]中已作了特征化的论述.Thomassen 在[2]中证明了每个平面图是 5- 可选色的且在[3]中证明了每个围长至少为 5 的平面图是 3- 可选色的.关于平面图的四选色性,Lam 等人在[4,5]中证明了每个没有 k 圈的平面图是 4- 可选色的,$k=3$ 或 4 或 5 或 6;Xu 在[6,7]中证明了每个特征数为正的可曲面嵌入图,如没有两个三角形共点,则是 4- 可选色的.然而,即使限制在二部图中来考虑,关于 3- 选色的图的特性也没有较完备的论述.

在这篇文章里,我们继续研究了一个相似的间题,即围长至少为 4 的平面图的 3- 选色性.证明了每个围长至少为 4 且无 6-,8- 和 9- 圈的平面图是 3- 可选色的.

1 基本引理

在证明定理之前,首先给出以下的 2 个引理:

引理 1[8] 若 G 是一个长度为偶数的圈,则 G 是 2- 可选色的.

收稿日期:2003-05-23.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10001035).

作者简介:张海辉,1979 - ,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,主要从事图论的学习与研究,E - mail:hhzhang79@163.com

通讯联系人:许宝刚,1965 - ,南京师范大学数学与计算机科学学院教授,博士生导师,主要从事图论方面的研究,E - mail:baogxu@pine.njnu.edu.cn

引理2　若 G 是一个非-3-可选色图,且 G 的每一个非空真子集 $V^* \subset V$ 的导出子图 $G[V^*]$ 是3-可选色的,则 G 的任何一个长度为偶数的圈 C 必至少含有一个 4^+ -顶点.

证明　设 C 为长度为 $2n$ 的偶圈,且设对所有的 $v \in C$ 均有 $2 \leqslant d_C(v) \leqslant 3$,$L$ 是 G 的一个色表簇且 $|L(v)| = 3, \forall v \in V(G)$.由假设,存在一个在映射 ϕ_0 下 $G_0(G_0 = G - C)$ 的 L_0-着色.

令 $L' = \{L'(v_i):1 \leqslant i \leqslant 2n\}$ 并且 $L'(v_i) = L(v_i) \setminus \{\phi_0(u):u \in N_G(v_i) \setminus C\}$.

易见 $|L'(v)| \geqslant 2$.又由引理1,每一个偶圈是2-可选色的,所以长度为偶数的圈 $v_1v_2v_3\cdots v_{2n}v_1$ 是2-可选色的.即存在一个在映射 ϕ' 下偶圈 C 的 L'-着色,由两个映射 ϕ_0 及 ϕ' 的合成立即可以得到图 G 的一个 L-着色,矛盾.

2　主要结论

定理1　若 G 是一个围长至少为4的平面图,且 G 中无6-,8-和9-圈,则 G 是3-可选色的.

证明　G 是一个满足条件的阶最小的反例,易见 $\delta(G) \geqslant 3$,对所有 $x \in V \cup F$ 定义一个权值 ω,令

$$\omega(x) = \frac{3d_G(x)}{10} - 1 \text{ 若 } x \in V;\ \omega(x) = \frac{d_G(x)}{5} - 1 \text{ 若 } x \in F;$$

根据欧拉公式 $|V|+|F|-|E| = 2$,有:

$$\sum_{v \in V(G)}\left(\frac{3d_G(v)}{10} - 1\right) + \sum_{v_f \in F(G)}\left(\frac{d_G(f)}{5} - 1\right) = -2 \tag{1}$$

根据 G 不含长度为6-,8-和9-的圈,有以下的断言:

(O_1) 一个4-面不能和另一个4-面相邻;

(O_2) 一个5-面不能和另一个5-面相邻;

(O_3) 一个7-面不能和另一个4-面相邻;

(O_4) 一个5-面至多只能与一个4-面相邻;

(O_5) 一个 10^+ -面的边界上两条连续的边 uv,vw 分别与两个4-面或者是两个5-面相邻,则 v 必为一个 4^+ -顶点;

对所有的 $x \in V \cup F$ 通过移动元素之间的权则可以得到一个新的权函数 $\omega^*(x)$,则同样应该有 $\sum_{x \in V \cup F} \omega^*(x) = -2$.若权的移动导致对所有的 $x \in V \cup F, \omega^*(x) \geqslant 0$,则得到矛盾,从而完成定理的证明.权的移动根据以下规则:

(R_1) 从每个 4^+ -顶点到每个关联的 4^+ -面,移 $\frac{1}{20}$;

(R_2) 从每个 4^+ -面到每个关联的3-顶点,移 $\frac{1}{30}$;

(R_3) 从每个5-面到每个相邻的4-面,移 $\frac{1}{30}$;

(R_4) 从每个7-面到每个相邻的5-面,移 $\frac{1}{18}$;

(R_5) 从每个 10^+ -面到每个相邻的4-面,移 $\frac{11}{120}$;

(R_6) 从每个 10^+ -面到每个相邻的5-面,移 $\frac{1}{20}$;

令 v 是图 G 的一个 k-顶点:当 $k = 3$ 时,则 v 和3个 4^+ -顶点相关联,由 R_2 有:$\omega^*(v) = \omega(v) + \frac{3}{30} = 0$;当 $k \geqslant 4$ 时,则 v 和 k 个 4^+ -面相关联,由 R_1 有:$\omega^*(v) = \omega(v) - \frac{k}{20} = \frac{5k-20}{20} \geqslant 0 (k \geqslant 4)$.

令 f 是图 G 的一个 h-面($h = 4,5,7$ 或 10^+).

情形1　当 $h = 4$ 时.由引理2,f 至少与一个 4^+ -顶点相关联,又由 O_1 和 O_3 可知,f 只能与5-面或

10^+ - 面相邻.由于从一个5- 面移给4- 面的权是$\frac{1}{30}$,小于从一个10^+ - 面传给4- 面的权值$\frac{11}{120}$,应该考虑与4- 面相邻的10- 面数尽可能少的情况.

情形 1.1 若f是一个 minimal 4- 面,由 O_2 及定义,f最多和两个不相邻的5- 面相邻,另外的两个与f相邻的面为10^+ - 面,如图1(a),所以由 R_1,R_2,R_3 和 R_5 有:$\omega^*(f) \geq \omega(f) - \frac{1}{30}\cdot 3 + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}\cdot 2 + \frac{11}{120}\cdot 2 = 0$.

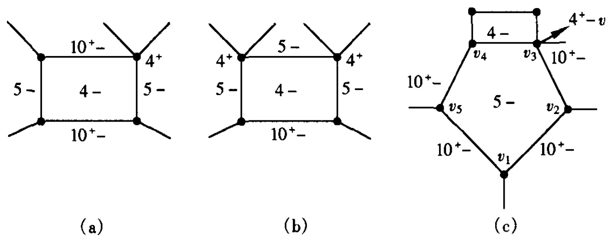

图1 $h = 4$ **和** $h = 5$

情形 1.2 若f是一个 non-minimal 4- 面.则由定义,f至少与两个4^+ - 顶点相关联.若恰好为2,分两种情况:如果两个4^+ - 顶点恰好是同一条边的两个端点,如图1(b),此时分析可知f至多与三个5- 面相邻,所以由 R_1,R_2,R_3 和 R_5 有 $\omega^*(f) \geq \omega(f) - \frac{1}{30}\cdot 2 + \frac{1}{20}\cdot 2 + \frac{1}{30}\cdot 3 + \frac{11}{120}\cdot 1 = \frac{1}{40} > 0$.若两个$4^+$ - 顶点不位于同一条边的两个端点,此时由 O_5,f至多只能与两个5- 面相邻,更有 $\omega^*(f) > 0$.

情形 1.3 若f和4个5面相邻,则f必定与4个4^+ - 顶点相关联,此时易见:$\omega^*(f) = \omega(f) + \frac{1}{20}\cdot 4 + \frac{1}{30}\cdot 4 > 0$.

情形 2 当 $h = 5$时.由 O_2,f只与4- 面或者7^+ - 面相邻.由于从一个7- 面移给5- 面的权是$\frac{1}{18}$,大于从一个10^+ - 面传给5- 面的权值$\frac{1}{20}$,所以我们应考虑与f相邻的7- 面尽可能少的情况,即,仅需考虑与5- 面相邻的面全为10^+ - 面或4- 面.

情形 2.1 若f是一个 light 5- 面.此时若f不和任何4- 面相邻,则由 R_2 和 R_6,$\omega^*(f) \geq \omega(f) - \frac{1}{30}\cdot 5 + \frac{1}{20}\cdot 5 > 0$;若存在4- 面与$f$相邻,此时由 O_4 可知,f只能与一个4- 面相邻,并且其余与f相邻的面均为7^+ - 面,由上面的权值移动分析可知,应该考虑另外的四个面是10^+ - 面.所以由 R_2,R_3 和 R_6 有:$\omega^*(f) \geq \omega(f) - \frac{1}{30}\cdot 5 - \frac{1}{30} + \frac{1}{20}\cdot 4 = 0$.

情形 2.2 若f是一个 non-light 5- 面.由定义1,f至少与1个4^+ - 顶点相关联.若恰好为1个4^+ - 顶点时,如图1(c),此时若f不和任何4- 面相邻,则由 R_1,R_2 和 R_6,$\omega^*(f) \geq \omega(f) - \frac{1}{30}\cdot 4 + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}\cdot 5 > 0$;若存在4- 面与$f$相邻,此时由 O_4 可知,f只能与一个4- 面相邻,并且其余与f相邻的面均为7^+ - 面,运用和上面类似的权移动分析有:$\omega^*(f) \geq \omega(f) - \frac{1}{30}\cdot 4 - \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20}\cdot 4 > 0$.若$4^+$ - 顶点的个数至少为两个,由于向相邻面移动的权值没有变大,最多为$\frac{1}{30}$,而从顶点移向f的权值有增加,则更有:$\omega^*(f) > 0$.

情形 3 当 $h = 7$时.若f是一个 light 7- 面.此时由 R_4,只有当f与5- 面相邻时,才有权从f移至5- 面.由 O_2,当f是一个 ligbt 7- 面时,此时f至多与3个5- 面相邻,所以此时由 R_2 和 R_4 有:$\omega^*(f) \geq \omega(f) - \frac{7}{30} - \frac{1}{18}\cdot 3 = 0$.

若f和r个5-面相邻,其中$4 \leqslant r \leqslant 7$,则由$O_5$可知,与7-面$f$关联的3-顶点的个数至多为$14-2r$个.由于至少有一个$4^+$-顶点,由$(R_1)$,$(R_2)$ and (R_4):$\omega^*(f) \geqslant \omega(f) - \frac{14-2r}{30} + \frac{1}{20} - \frac{1}{18} \cdot r = \frac{2r-3}{180} > 0$.

情形4　当$h \geqslant 10$时,若相关联顶点全是3-顶点,即使4-面与5-面交替出现,此时亦有关系式:$\omega^*(f) \geqslant \omega(f) - \frac{h}{30} - \lfloor \frac{h}{2} \rfloor \cdot (\frac{1}{20} + \frac{11}{120}) = \frac{23h-240}{240} > 0 (h \geqslant 11)$成立.

由于当恰好为10时,此时由引理2,f至少有一个4^+-顶点,又由R_1,所以此时有:$\omega^*(f) \geqslant \frac{23h-240}{240} + \frac{1}{20} = \frac{1}{120} > 0$;易见$h \geqslant 11$时,不等式(2)恒成立.当$f$至少与1个$4^+$-顶点相关联时,此时,由$R_5$及$R_6$分析可知,$f$仅向相邻的4-面或5-面转移权值,由于$R_5 > R_6$,所以应考虑4-面尽可能多的情况.即使在四面与五面交替相邻的情况下,由O_1及O_5可知,每增加一个4-面,至少应增加一个4^+-顶点,此时相应就减少一个3-顶点,此时对应一个5-面变为4-面所多移的电荷为$\frac{11}{120} - \frac{1}{20} = \frac{1}{24}$,小于多一个$4^+$-顶点与同时少一个3-顶点后,本身所增加的电荷值$\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$.所以无论关联的顶点及相邻的面如何,总有$\omega^*(f) \geqslant 0$.

这样证得了$\omega^*(f) \geqslant 0$对所有的$x \in V \cup F$,所以有:

$$0 \leqslant \sum_{x \in V \cup F} \omega^*(x) = \sum_{x \in V \cup F} \omega(x) = -2 \tag{2}$$

矛盾,得证

[参考文献]

[1] Erdös P, Rubin A L, Taylor H. Choosability in graphs[J]. Congr Numer, 1979, 26:125—157.

[2] Thomassen C. Every planar graph is 5-choosable[J]. Journal of Combinatorial Theory Ser (B), 1994, 62(1): 180—181.

[3] Thomassen C. 3-list-coloring planar graphs of girth 5[J]. Journal of Combinatorial Theory Ser (B), 1995, 64(1): 101—107.

[4] Peter C B Lam, Xu B, Liu J. The 4-choosability of plane graphs without 4-cycles[J]. Journal of Combinatorial Theory Ser (B), 1999, 76(2): 117—126.

[5] Peter C B Lam, Shiu W C, Xu B. On structure of some plane graphs with application to choosability[J]. Journal of Combinatorial Theory Ser (B), 2001, 82(2): 285—297.

[6] Xu B. (4m, m)-choosability of plane graphs[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2001, 14(2):174—178.

[7] Xu B. On structure of graphs embedded on surfaces of nonnegative characteristic with application to choosability [J]. Discrete Math, 2002, 248(1—3): 283—291.

[8] N Alon, M Tarsi. Colorings and orientations ofgraphs[J]. Combinatorica, 1992, 12(2):125—134.

On 3-Choosability of Plane Graphs without 6-, 8-and 9-Cycles

Zhang Haihui[1,2], Shen Bangyu[1,2]

(1. Department of Mathematics, Huaiyin Teachers College, 223001, Huaian, China)

(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: The choice number of a graph G, denoted by ch(G) is the minimum number k such that if we give lists of k colors to each vertex of G, there is a vertex coloring of G where each vertex receives a color from its own list no matter what the lists are. In this paper, it is shown that ch(G)$\leqslant$3 for each plane graph of girth not less than 4 which contains no 6-, 8-and 9-cycles.

Key words: cycle, girth, choosable, plane graph

[责任编辑:陆炳新]