Monte-Carlo 随机法与积分插值法在地下水流问题中的研究及应用

吴飞[1], 杨天行[2]

(1.中国地质大学信息工程学院,100083,北京)

(2.吉林大学地球探测科学与技术学院,130026,吉林,长春)

[摘要] 分别采用积分插值法与 Monte-Carlo 随机法对地下水流问题进行了理论研究,提出了 Monte-Carlo 随机差分法.并且选取了一个具有解析解的二维承压稳定地下水流数学模型作为例子,进行了数值计算.

[关键词] 积分插值法,Monte-Carlo 随机法

[中图分类号]O241.3, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)02-0043-03

0 引言

积分插值法是求解确定性数学模型的一种重要的数值方法,它不仅几何误差小,还能有效地统一处理自然边值条件和内边界条件.Monte-Carlo 方法假定随机变量的概率分布为已知的,且已知随机变量之间的相关结构,可用伪随机数产生出多组输入变量,对每组输入量进行数值模拟,可得若干组模型计算结果,从而可获得解的统计估计量,如均值等.近年来随机方法在许多领域中有着广泛的应用.

1 积分插值法与 Monte-Carlo 随机差分法

二维承压地下水稳定流定解问题,可概括为下列定解问题

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)+W=0 \quad (x,y)\in G & (1)\\ H(x,y)\Big|_{\Gamma_1}=H_1(x,y) & (2)\\ T\dfrac{\partial H}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=q(x,y) & (3)\end{cases}
$$

其中:T 为含水层导水系数,其量纲是 $[L^2/t]$;H 为地下水水头;$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$,$\bar{G}=G\cup\Gamma$ 为包含边界 Γ 的研究区域;n 为边界单位外法向量;$H_1(x,y)$ 为第一类边界上的水头;$q(x,y)$ 为第二类边界的法向单位流量;对隔水边界有 $q(x,y)=0$;W 为源汇项强度.

把这个定解问题看成确定性模型(即把 T,W 看成确定量)和随机性模型(即把 T,W 看成随机变量),分别用积分插值法和 Monte-Carlo 随机差分法求解.

1.1 差分格式的构造

对求解区域 G 以步长 h_1 和 h_2 进行矩形剖分及对偶剖分.记 $x_i=ih_1,y_j=jh_2$;矩形顶点 A,B,C,D 的内部区域记为 G_{ij}(见图 1),对(1)式于 G 于上积分并利用 Green 公式得积分守恒形式方程

$$
\int_{\widehat{ABCDA}} T\frac{\partial H}{\partial n}\mathrm{d}s+\iint_{G_{ij}} W\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{4}
$$

式中$\dfrac{\partial H}{\partial n}$表示 H 沿矩形 $ABCDA$ 的外法向导数,利用中矩形公式及中心差商对(4)式中第一项处理再代入(4)式整理得

$$
a_{i-1,j}H_{i-1,j}+a_{i,j-1}H_{i,j-1}+a_{i+1,j}H_{i+1,j}+a_{i,j+1}H_{i,j+1}-a_{i,j}H_{i,j}+W_{i,j}=0 \tag{5}
$$

收稿日期: 2003-10-11.

作者简介: 吴飞,女,1969 - ,中国地质大学信息工程学院教师、在职博士生,主要从事应用数学的研究,E - mail: wufei.jl@eyou.com

其中 $W_{i,j} \approx \frac{1}{h_1 h_2}\iint\limits_{G_{i,j}} W\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

对第一边值条件(2)式可采用线性插值法处理,如图 2,点(x_i, y_j)是非正则内点,沿 x 方向作线性插值,可整理得

$$H_{i,j} = (H_{i+1,j}\tilde{h}_1 + H_{i-1,j}h_1)/(\tilde{h}_1 + h_1) \tag{6}$$

其中 $\tilde{h}_1$ 是点(x_i, y_j)与(x_{i-1}, y_j)的距离,其误差为 $O(h^2)$.

对第二边值条件(3)式用差分逼近并用 Green 公式整理得(见图 3)差分方程

$$T_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{H_{i,j-i} - H_{i,j}}{h_2}\overline{AB} + T_{i+\frac{1}{2},j}\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h_1}\overline{BC} + q_{i,j}\overline{CA} + \iint\limits_{\Delta ABC} w\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \tag{7}$$

至此,利用积分插值法,得到了关于定解问题(Ⅰ)的差分方程(5)、(6)、(7).

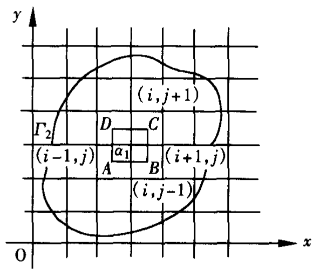

图 1　求解区域的矩形剖分图

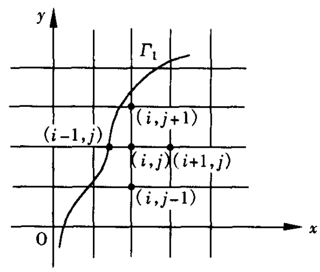

图 2　对第一边值条件的线性插值图

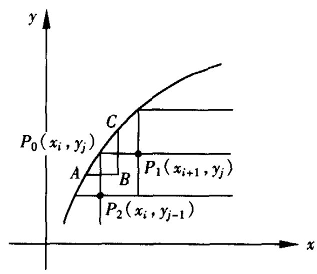

图 3　对第二边值条件的差分逼近图

1.2　解随机地下水流模型的 Monte-Carlo 随机差分法

应用 Monte-Carlo 方法的关键在于给出各变量已知分布下的随机数,为快速、高精度地产生具有任意分布的随机数,这里采用混合同余法,公式为:

$$x_i = \mathrm{mod}(Ax_{i-1} + C, M) \tag{8}$$

其中 A 为乘子,C 为增量;M 为模;A,C,M 均为正整数,再由上式推得的 x_i 得到随机数序列

$$r_i = x_i/M \tag{9}$$

(Ⅰ)中的(1)式的参数 W,T 取为随机变量,多次求解(Ⅰ)可得解的均值和方差等.

2　算例与分析

实例:有一承压的正方形区域,边长 $a = b = 100$ m,地下水呈二维承压稳定运动,边界上的水头值假定为 0,含水层导水系数 $T = 100\ \mathrm{m}^2/\mathrm{d}$,单位面积上降水入渗补给量 $W = 0.08$ m/d.其定解问题为:

$$(\mathrm{II})\begin{cases} T\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} + T\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} + W = 0 \quad (x,y)\in G & (10)\\ H(-50,y) = 0 \qquad y\in(-50,50) & (11)\\ H(50,y) = 0 \qquad y\in(-50,50) & (12)\\ H(x,-50) = 0 \qquad x\in(-50,50) & (13)\\ H(x,50) = 0 \qquad x\in(-50,50) & (14)\end{cases}$$

其解析解为

$$H(x,y) = -\frac{W}{2T}x^2 + \frac{W}{2T}L_1^2 + \frac{W}{TL_1}\sum\frac{[(-1)^n - 1]}{\lambda_n^3\mathrm{ch}(\lambda_n, L_2)}\mathrm{ch}(\lambda_n, y)\sin[\lambda_n(x + L_1)] \tag{15}$$

其中:$L_1 = a/2 = 50$, $L_2 = b/2 = 50$, $\lambda_n = (n\pi)/(2L_1)$.

用前述的差分格式求解,得定解问题(Ⅱ)的差分方程组为

$$(\mathrm{II})'\begin{cases} 4H_{i,j} - (H_{i+1,j} + H_{i-1,j} + H_{i,j+1} + H_{i,j-1}) = Wh^2/T, \quad i,j = 2,3,\cdots,10 & (16)\\ H_{1,j} = H_{11,j} = H_{i,1} = H_{i,11} = 0, \quad i,j = 1,2,\cdots,11 & (17)\end{cases}$$

对(Ⅱ)′本文采用 SOR 迭代法求解.

设定解问题(Ⅱ)中 T, W 为两个随机变量，用混合同余法产生关于 T, W 的若干组随机数，代入(Ⅱ)′中，经多次模拟，可得到水头的统计性质解.

通过编程计算，得(Ⅱ)的解析解，差分解及 Monte-Carlo 随机差分解(见表 1).从表 1 的误差比较看出：Monte-Carlo 随机差分解，差分解与解析解吻合甚好.Monte-Carlo 随机差分解与解析解相比误差很小(相对误差不超过 5%)，精度较高.说明该随机法对求解地下水流问题是可行的.

表 1 解析解、差分解与 Monte-Carlo 随机差分解计算结果比较

No	A.M.	F.D.M.	A.E.	R.E.	No	A.M.	F.D.M.	A.E.	R.E.
1	0.104 252	0.102 485	0.001 767	0.069 464 8	1	0.104 252	0.100 493	0.003 759	3.605 497
2	0.166 426	0.164 982	0.001 444	0.867 901	2	0.166 426	0.161 777	0.004 649	2.793 673
3	0.204 137	0.203 149	0.000 988	0.484 043	3	0.204 137	0.199 205	0.004 932	2.415 881
4	0.224 618	0.223 971	0.000 647	0.288 134	4	0.224 618	0.219 616	0.005 002	2.226 894
5	0.231 026	0.230 607	0.000 419	0.181 496	5	0.231 026	0.226 118	0.004 909	2.124 697
6	0.224 280	0.223 981	0.000 299	0.133 133	6	0.224 280	0.219 616	0.004 266	2.096 381
7	0.203 470	0.203 168	0.000 301	0.148 177	7	0.203 470	0.199 204	0.004 266	2.096 381
8	0.165 454	0.165 005	0.000 449	0.271 375	8	0.165 454	0.161 783	0.003 671	2.218 745
9	0.103 029	0.102 503	0.000 526	0.510 928	9	0.103 029	0.100 501	0.002 529	2.454 449

其中：No：节点号；A.M：解析解；F.D.M：差分解；A.E：绝对误差；R.E：相对误差(%)；M.C.F.D.M：Monte-Carlo 随机差分法.

[参考文献]

[1] 李荣华，冯果忱.微分方程数值解法[M].北京：高等教育出版社，1989.
[2] 杨天行，朱政嘉.水系统污染数学模型及应用[M].长春：吉林大学出版社，1990.
[3] 徐钟济.蒙特卡罗方法[M].上海：上海科学技术出版社，1995.
[4] 王文科.地下水流数值模拟的有限分析法[D].博士论文，1994.
[5] 孙纳正.地下水污染——数学模型和数值方法[M].北京：地质出版社，1989.

On the Research and the Application of Monte-Carlo Stochastic Method and Integral Interpolation Method for Solving Groundwater Problems

Wu Fei[1], Yang Tianxing[2]

(1. School of Information Engineering, China University of Geosciences, 100083, Beijing, China)
(2. School of Earth Exploring Sciences and Technology, Jilin University, 130026, Changchun, China)

Abstract: The integral interpolation method and Monte-Carlo Stochastic Method are adopted to study groundwater problems theoretically, and the Monte-Carlo Stochastic Difference Method (M.C.S.D..M.) is also developed. For a two-dimension confined stable groundwater flow mathematical model. We compared its analytical solutions with the results of M.C.S.D.M. They concide very well.

Key words: Integral interpolation method, Monte-Carlo stochastic method

[责任编辑：陆炳新]