微动脉血流离散模型的构建与分析

周玲[1],张建国[1],陈凌孚[2]

(1.南通工学院基础部,226007,江苏,南通)

(2.南京师范大学物理科学与技术学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 微动脉内的血液流动对生物体起着重要的作用,为了研究血浆和红细胞对血流的影响,建立了血液流动离散模型,运用差分法得到血浆速度与血压之间的关系以及红细胞与血浆之间的交换关系式,解释了红细胞在微动脉内运动聚集——叠连现象,并发现由于红细胞的叠连而引起的某些疾病(如活动性肺结核、风湿热等)是由于血浆的变化,而不是红细胞本身导致血沉的加快,不同地区的重力加速度是导致地区性疾病的一个重要原因.

[关键词] 血浆,红细胞,交换源项,血流离散模型

[中图分类号]O351, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)02-0051-04

0 引言

血液是一种由血浆和红细胞组成的流体组织,在心血管系统内循环流动,体内任何器官的血流不足,均可能造成严重的组织损伤甚至危及生命.血浆和红细胞在血管中流动的形式比较复杂,其两者之间和相互之间的碰撞经常发生,能量经常相互交换,从而导致细观层次上的红细胞运动具有复杂性.随着计算机硬件的发展,离散模型的研究日益受到重视,并已运用于许多工程技术领域,但在生物领域尚未有相关报道.因为血浆的主要成分是水、低分子物质、蛋白质和 O_2、CO_2 等,血浆中含水在 90% 以上[1],所以可作为连续介质;红细胞在血浆中具有悬浮稳定性(因为血液中的红细胞数量多,红细胞与血浆之间的摩擦阻碍红细胞的下沉[1]),所以可视作颗粒体,作为离散介质;白细胞和血小板约占血液总量的 1%,在计算容积时可忽略不计.因此我们在流体力学的基础上构建了血流离散模型,用以模拟微动脉中血液的流动过程.实践表明,这种模型的建立是合理的.

1 血流离散模型

血液在动脉血管中的流动规律可用血浆与红细胞耦合的质量守恒方程和动量守恒方程进行描述.这里取动脉血管为微动脉管,直径在 $3\times10^{-4}\sim4\times10^{-5}$ m 范围内,血液流动是层流[2].

质量守恒方程的矢量形式为:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\nabla\cdot\rho\boldsymbol{u})=0 \tag{1}$$

动量守恒方程的矢量形式为:

$$\frac{\partial\rho\boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})=-\nabla p-\boldsymbol{S}_p-\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}+\rho\boldsymbol{g} \tag{2}$$

这里粘性应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 为:

$$\boldsymbol{\tau}=-\left[\left(\lambda-\frac{2}{3}\mu\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{I}+\mu((\nabla\boldsymbol{u})+(\nabla\boldsymbol{u})^T)\right]$$

方程(1)、(2)在二维空间运动的标量形式为:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho u_y}{\partial y}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial\rho u_x}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\beta(u_x-v_x)+\frac{\mu}{3}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\right] \tag{4}$$

收稿日期:2003-11-25.

作者简介:周玲,女,1972-,南通工学院基础部讲师,主要从事凝聚态物理和生物物理的教学与研究,E-mail:zl71023@163.com

$$\frac{\partial \rho u_y}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_y u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y u_y)}{\partial y}$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial y}-\beta(u_y-v_y)+\frac{\mu}{3}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]+\mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]-\rho g \tag{5}$$

其中,t 为时间,ρ 为血浆密度,u 为血浆的运动速度,g 为重力加速度,p 为血浆的压强,μ 为血浆粘性系数,v 为红细胞的运动速度.$\boldsymbol{S}_p=\beta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ 为血浆与红细胞相互交换的交换源项.参考拟流体模型[3,4],动量交换源项是从流体运动出发而定义的,如果从颗粒运动出发,则动量交换源项可以表示为:

$$\boldsymbol{S}_p=\int\frac{1}{V_{\text{fluid}}}\sum_{K=1}^{N}\frac{V_p\beta_K}{1-\varepsilon_K}(\boldsymbol{u}_K-\boldsymbol{v}_K)\mathrm{d}\Omega$$

此处 V_{fluid} 为三维流场中某控制体的体积,N 为该控制体中红细胞的数目,$\int \mathrm{d}\Omega$ 为对所有控制体求和,V_p 为红细胞体积,ε_K 为局部空隙率,β_K 为局部交换系数.$\boldsymbol{S}_p$ 反映了流体对单个红细胞的作用叠加后反作用到血浆.而在二维空间中,若从颗粒运动出发定义交换源项,则需引入拟三维控制体,这样模拟计算将依赖于流场网格部分,所以取 $\boldsymbol{S}_p=\beta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$.综上所述,它表示流场计算的每个网格上,红细胞对血浆的作用与该网格中血浆对所有单个红细胞的作用服从牛顿第三定律.

当血浆的密度 ρ 为一常数时,令 Δx、Δy 分别表示流场计算中控制体在水平与垂直方向的边长,运用差分方法对方程(3) ~ (5) 进行分析.

质量守恒方程(3) 在(i,j) 点离散化的近似质量守恒方程为:

$$\frac{(u_x)_{i+1,j}^{n+1}-(u_x)_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x}+\frac{(u_y)_{i,j+1}^{n+1}-(u_y)_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y}=0 \tag{6}$$

令 $P=\dfrac{p}{\rho}$,对动量守恒方程(4)、(5) 式进行差分,则可近似得到动量守恒方程在$(i+1,j)$,$(i,j+1)$ 处的差分格式:

$$(u_x)_{i+1,j}^{n+1}=\xi_{i+1,j}-\frac{\Delta t}{\Delta x}(P_{i+2,j}-P_{i,j}) \tag{7}$$

$$(u_y)_{i,j+1}^{n+1}=\xi_{i,j+1}-\frac{\Delta t}{\Delta y}(P_{i,j+2}-P_{i,j}) \tag{8}$$

等式左边的量均指 t_{n+1} 时刻的值,右边的量均指 t_n 时刻的值.当 t_n 时刻的血浆速度及压力已知时,由此两式可直接得出 t_{n+1} 时刻的血浆速度.

将(7)、(8) 代入(6),则可得到血浆压力所满足的方程为:

$$\frac{1}{\Delta x}\left\{\xi_{i+1,j}-\xi_{i-1,j}-\frac{\Delta t}{\Delta x}[(P_{i+2,j}-P_{i,j})-(P_{i,j}-P_{i-2,j})]\right\}$$
$$+\frac{1}{\Delta y}\left\{\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j-1}-\frac{\Delta t}{\Delta y}[(P_{i,j+2}-P_{i,j})-(P_{i,j}-P_{i,j-2})]\right\}=0$$

即

$$\frac{P_{i+2,j}-2P_{i,j}+P_{i-2,j}}{\Delta x^2}+\frac{P_{i,j+2}-2P_{i,j}+P_{i,j-2}}{\Delta y^2}=\frac{\xi_{i+1,j}-\xi_{i-1,j}}{\Delta x\Delta t}+\frac{\xi_{i,j+1}-\xi_{i,j-1}}{\Delta y\Delta t} \tag{9}$$

其中

$$\xi_{i+1,j}=(u_x)_{i+1,j}-\frac{\Delta t}{\Delta x}[(u_x^2)_{i+2,j}-(u_x^2)_{i,j}]-\frac{\Delta t}{\Delta y}[(u_xu_y)_{i+1,j+1}-(u_xu_y)_{i+1,j-1}]$$
$$-\frac{\beta\Delta t}{\rho}[(u_x)_{i+1,j}-(v_x)_{i+1,j}]$$
$$+\frac{\Delta t\mu}{3\rho}\left\{\frac{(u_x)_{i+3,j}-2(u_x)_{i+1,j}+(u_x)_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{[(u_y)_{i+2,j+1}-(u_y)_{i,j+1}]-[(u_y)_{i+2,j-1}-(u_y)_{i,j-1}]}{\Delta x\Delta y}\right\}$$
$$+\frac{\Delta t\mu}{\rho}\left\{\frac{(u_x)_{i+3,j}-2(u_x)_{i+1,j}+(u_x)_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{(u_x)_{i+1,j+2}-2(u_x)_{i+1,j}+(u_x)_{i+1,j-2}}{\Delta y^2}\right\} \tag{10}$$

$$\xi_{i,j+1}=(u_y)_{i,j+1}-\frac{\Delta t}{\Delta x}[(u_xu_y)_{i+1,j+1}-(u_xu_y)_{i-1,j+1}]-\frac{\Delta t}{\Delta y}[(u_y^2)_{i,j+2}-(u_y^2)_{i,j}]$$
$$-\frac{\beta\Delta t}{\rho}[(u_y)_{i,j+1}-(v_y)_{i,j+1}]$$

$$+\frac{\Delta t\mu}{3\rho}\left\{\frac{[(u_x)_{i+1,j+2}-(u_x)_{i+1,j}]-[(u_x)_{i-1,j+2}-(u_x)_{i-1,j}]}{\Delta x\Delta y}+\frac{(u_y)_{i,j+3}-2(u_y)_{i,j+1}+(u_y)_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right\}$$

$$+\frac{\Delta t\mu}{\rho}\left\{\frac{(u_y)_{i+2,j+1}-2(u_y)_{i,j+1}+(u_y)_{i-2,j+1}}{\Delta x^2}+\frac{(u_y)_{i,j+3}-2(u_y)_{i,j+1}+(u_y)_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right\}-g\Delta t \tag{11}$$

2 结果与讨论

2.1 血浆速度与血压的关系

运用差分方法对血流离散模型的分析表明:血浆速度与压强之间成线性变化的关系.当血液在 $3\times10^{-4}\sim4\times10^{-5}$ m 微动脉血管范围内作层流流动时,符合(7)、(8)和(9)式的运动规律.若取血管直径 $d=0.01$ cm,长度 $L=1\sim10$ cm,血浆密度 $\rho=1.030\times10^3$ kg/m^3,粘度 $\mu=1.6$ cp,全血密度为 $\rho_c=1.050\times10^3$ kg/m^3,重力加速度为 $g=9.8$ m/s^2,起始端的血压为 $p_0=1.133\times10^4$ Pa,血液流过微动脉后压力降落 7.33×10^3 Pa,故微动脉的末端压强 $p_{末}=4\times10^3$ Pa,$u=0.3$ m/s,根据(6)~(11)式,可用迭代算法得出血浆流动速度随压强的变化关系,如表1所示.

表1 血浆流动速度随压强的变化关系

$p/10^3$ Pa	4.00	4.36	4.72	5.08	5.44	5.80	6.16	6.52	6.88	7.24	7.60
$u/$(m/s)	0.300	0.326	0.352	0.377	0.403	0.429	0.455	0.481	0.506	0.532	0.558
$p/10^3$ Pa	7.96	8.32	8.68	9.04	9.40	9.76	10.12	10.48	10.84	11.20	11.56
$u/$(m/s)	0.584	0.610	0.635	0.661	0.687	0.713	0.739	0.764	0.790	0.816	0.842

2.2 血浆密度、速度、粘性系数、重力加速度对动量交换源项的影响

动量交换源项 S_p 是一个非常关键的量,由(10)和(11)式,可知

当 $(u_x)_{i+1,j}=\xi_{i+1,j}$ 时,有

$$S_{px}=-\rho\left[\frac{(u_x^2)_{i+2,j}-(u_x^2)_{i,j}}{\Delta x}+\frac{(u_xu_y)_{i+1,j+1}-(u_xu_y)_{i+1,j-1}}{\Delta y}\right]$$
$$+\frac{\mu}{3}\left\{\frac{4(u_x)_{i+3,j}-8(u_x)_{i+1,j}+4(u_x)_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{[(u_y)_{i+2,j-1}-(u_y)_{i,j+1}]-[(u_y)_{i+2,j-1}-(u_y)_{i,j-1}]}{\Delta x\Delta y}\right.$$
$$\left.+\frac{3(u_x)_{i+1,j+2}-6(u_x)_{i+1,j}+3(u_x)_{i+1,j-2}}{\Delta y^2}\right\} \tag{12}$$

当 $(u_y)_{i,j+1}=\xi_{i,j+1}$ 时,有

$$S_{py}=-\rho\left[\frac{(u_xu_y)_{i+1,j+1}-(u_xu_y)_{i-1,j+1}}{\Delta x}+\frac{(u_y^2)_{i,j+2}-(u_y^2)_{i,j}}{\Delta y}\right]$$
$$+\frac{\mu}{3}\left\{\frac{3(u_y)_{i+2,j+1}-6(u_y)_{i,j+1}+3(u_y)_{i-2,j+1}}{\Delta x^2}+\frac{[(u_x)_{i+1,j+2}-(u_x)_{i+1,j}]-[(u_x)_{i-1,j+2}-(u_x)_{i-1,j}]}{\Delta x\Delta y}\right.$$
$$\left.+\frac{4(u_y)_{i,j+3}-8(u_y)_{i,j+1}+4(u_y)_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right\}-\rho g \tag{13}$$

上两式表明,动量交换源项与血浆流动速度 u、血浆密度 ρ、血浆粘性系数 μ、微动脉血管直径 d、长度 L 以及重力加速度 g 有关.血浆流动速度可由(7)、(8)两式得到,若 ρ、μ、d、L、g 为某一常数,则可求得动量交换源项 S_p,在此不再计算,只要把有关数值代入(12)、(13)即可得到.

若在(12)、(13)式中忽略二阶无穷小量,则可得到

$$S_{px}=-\rho\left[\frac{(u_x^2)_{i+2,j}-(u_x^2)_{i,j}}{\Delta x}+\frac{(u_xu_y)_{i+1,j+1}-(u_xu_y)_{i+1,j-1}}{\Delta y}\right] \tag{14}$$

$$S_{py}=-\rho\left[\frac{(u_xu_y)_{i+1,j+1}-(u_xu_y)_{i-1,j+1}}{\Delta x}+\frac{(u_y^2)_{i,j+2}-(u_y^2)_{i,j}}{\Delta y}+g\right] \tag{15}$$

在这种情况下,动量交换源项仅与 ρ、u、g 以及路径有关.ρ 前面的负号,符合牛顿第三定律,即血浆对红细胞作用后反作用到血浆,完成血浆和红细胞的相互交换形式.当 ρ、u、g 或者路径发生变化时,血浆与红细胞的相互交换会发生改变,从而导致某些疾病的产生,这就从物理上解释了为什么这些因素的改变会引起各种疾病.

上述讨论的是单个红细胞,对数量较多的红细胞在微动脉内的运动,可用封闭形式描述,即

$$S_p = \int \frac{1}{V_{\text{fluid}}} \sum_{K=1}^{N} \frac{V_p \beta_K}{1 - \varepsilon_K} (\boldsymbol{u}_K - \boldsymbol{v}_K) \mathrm{d}\Omega,$$

这说明在连续循环血液流动中会产生聚集体——红细胞的叠连.红细胞本身的形状是双凹碟形,直径在 $7 \times 10^{-6} \sim 8 \times 10^{-6}$ m,周边最厚处为 2.5×10^{-6} m,中央最薄处约 1×10^{-6} m,极易向水平方向的中心轴靠近(即轴流现象),因此红细胞的少量叠连仍可以很容易地通过微动脉,但过多的叠连会使微动脉内的血流阻力增大.

3 结论

上面的分析概括起来可得到以下一些结论:(1) 血浆在微动脉中的流动速度与血压成线性变化关系,可以通过血压求出血浆的流动速度,有了血浆流动速度就可以得到动量交换源项;(2) 动量交换源项给出了血浆与红细胞的相互交换形式,血浆与红细胞在微动脉中流动符合牛顿第三定律;(3) 动量交换源项与血浆密度 ρ 有关,它是决定红细胞叠连、沉降快慢的主要因素,而红细胞本身并不是决定红细胞叠连、沉降快慢的主要因素.当血浆密度 ρ 增大,即血浆中纤维蛋白原、球蛋白及胆固醇含量增多时,可加速红细胞叠连、沉降,使得血流中阻力急剧增大,从而影响正常循环,导致各种疾病,比如说脑中风、脑缺氧、活动性肺结核,风湿热等;(4) 动量交换源项与速度有关,当心脏功能发生改变,即血流速度或血压发生改变时,会导致某些疾病直接发生;(5) 动量交换源项与路径有关,当路径不同(血管的直径、长度不同)时,血浆与红细胞的相互交换形式会有所改变,从而可能导致某些局部疾病的发生,例如毛细血管瘤等;(6) 动量交换源项与重力加速度有关,不同地区的重力加速度不同,会导致血浆与红细胞的相互交换发生改变,从而产生某些地区性疾病.以上结论证实了用血流离散模型来解释微动脉内血液的流动过程是完全有效可行的.

[参考文献]

[1] 姚泰.生理学[M].北京:人民卫生出版社,2000.

[2] 柳兆荣.心血管流体力学[M].上海:复旦大学出版社,1986.

[3] Kuipers J A M, Van Duin K J, Van Beckum F P H, *et al*. A numerical model of gas-fluidized beds[J]. Chem Eng Sci,1992,47(5):1913—1924.

[4] Hoomans B P B, Kuipers J A M, Briels W J, *et al*. Discrete particle simulation of bubble and slug formation in a two-dimensional gas-fluidized bed:a hard-sphere approach[J]. Chem Eng Sci,1996,51(1):99—108.

The Construction and Analysis on Blood Flow Discrete Model in Micro-Arteries

Zhou Ling[1], Zhang Jianguo[1], Chen Lingfu[2]

(1. Basic Department of Nantong Institute of Technology, 226007, Nantong, China)

(2. School of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: Flood flow in micro-arteries takes great efforts on organisms. In order to study how plasma and red blood cells affect blood flow, a flood flow discrete model is established. Both the relationship between velocity of plasma and pressure and exchange relational express between plasma and red blood cells are obtained by using difference methods. In this model, red blood cells' movement and gathering-folded phenomenon are explained. Some diseases (such as activated pulmonary tuberculosis and rheumatic fever etc.) caused by red blood cells' fold are not due to red blood cells themselves but due to the change of plasma that quicken erythrocyte sedimentation rate. Acceleration of gravity in different regions is an important reason that causes regional diseases.

Key words: plasma, red blood cells, flood flow discrete model, momentum exchange item

[责任编辑:丁蓉]