一类泛函极小元的 H^2 收敛性

雷雨田

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 本文证明了一类泛函 $E_\varepsilon(u,G)$ 于集合 $H_g^2(G,C)$ 中的极小元 u_ε 当 $\varepsilon\to 0$ 时,在 H^2 中收敛到以 g 为边值的 G 上的双重调和映射.

[关键词] 泛函的极小元,收敛性,双重调和映射

[中图分类号]O175.2, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)03-0009-03

设 C 为复平面,G 是 R^2 中有界光滑单连通区域,$g:\partial G\to S^1\subset C$ 为光滑函数且满足 $d=\deg(g,\partial G)=0$. 关于 Ginzburg-Landau 型泛函

$$E_\varepsilon(u)=\frac{1}{2}\int_G|\nabla u|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G(1-|u|^2)^2$$

于 $H_g^1(G,C)=\{v\in H^1(G,C);v|_{\partial G}=g\}$ 中极小元当 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近性质的研究,已有较系统的工作[1]. 他们的工作表明:当 $\varepsilon\to 0$ 时,极小元以 G 上的取 g 为边值的调和映射为极限. 本文,我们考虑泛函

$$E_\varepsilon(u,G)=\frac{1}{2}\int_G|\Delta u|^2+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_G(1-|u|^2)^2$$

在 $H_g^2(G,C)=\{v\in H^2(G,C);v|_{\partial G}=g\}$ 中的极小元 u_ε 当 $\varepsilon\to 0$ 时的极限行为. 我们将证明:当 $\varepsilon\to 0$ 时,极小元 u_ε 在 $H^2(G,C)$ 中收敛到 G 上的以 g 为边值的双重调和映射. 顺便指出:这里泛函 $E_\varepsilon(u,G)$ 是[2]中所研究泛函的特例. 但类似上述的结果在[2]中并未给出.

首先证明极小元 u_ε 的存在性.

命题 1 泛函 $E_\varepsilon(u,G)$ 于 $H_g^2(G,C)$ 中可达极小.

证明 首先,容易看出 $H_g^2(G,C)$ 是 $H^2(G,C)$ 的凸闭子集,从而是弱闭子集. 其次,利用[3]中 146 页的附注和内插不等式,可以证明 $E_\varepsilon(u,G)$ 是强制的泛函. 下面只需证明 $E_\varepsilon(u,G)$ 是弱下半连续的. 设当 $k\to\infty$ 时,

$$u_k\xrightarrow{w}u,\text{于 } H^2(G,C). \tag{1}$$

由此和紧嵌入定理可导出:当 $k\to\infty$ 时,

$$u_k\to u,\text{于 } C(\bar G,C). \tag{2}$$

记 $G_K=\{x\in G;\|u(x)\|_{H^2}\leqslant K,K>0\}$. 从 $u\in H^2(G,C)$ 知,当 $K\to\infty$ 时,$|G\setminus G_K|\to 0$. 又不等式 $|a|^2+|b|^2\geqslant 2ab$ 蕴含 $|a|^2-|b|^2\geqslant 2b(a-b)$,故

$$\int_{G_K}(|\Delta u_k|^2-|\Delta u|^2)\geqslant 2\int_{G_K}\Delta u(\Delta u_k-\Delta u).$$

因此在 G_K 上,对任意 K,我们利用(1)(2)可以得到:当 $k\to\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
&E_\varepsilon(u_k,G_K)-E_\varepsilon(u,G_K)\\
&=\frac{1}{2}\int_{G_K}(|\Delta u_k|^2-|\Delta u|^2)+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{G_K}[(1-|u_k|^2)^2-(1-|u|^2)^2]\\
&\geqslant\int_{G_K}\Delta u(\Delta u_k-\Delta u)+\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{G_K}(2-|u_k|^2-|u|^2)(|u|+|u_k|)(|u|-|u_k|)\to 0,
\end{aligned}$$

此即

收稿日期:2004-02-01.

基金项目:数学天元基金(A0324628)和'211'工程重点学科建设资助项目.

作者简介:雷雨田,1971-,南京师范大学数学与计算机科学学院副教授,主要从事偏微分方程的教学与研究,E-mail:lythxl@163.com

$$\varliminf_{k\to\infty} E_\varepsilon(u_k, G) \geqslant \varliminf_{k\to\infty} E_\varepsilon(u_k, G_K) \geqslant E_\varepsilon(u, G_K).$$

令 $K \to \infty$,我们有 $\varliminf_{k\to\infty} E_\varepsilon(u_k, G) \geqslant E_\varepsilon(u, G)$. 至此命题得证.

其次,我们刻划极限函数,即双重调和映射. 由 $d = 0$,我们知存在着以 g 为边值的弱调和映射,并且它是光滑的. 这一事实蕴含 $H_g^2(G, S^1) \neq \varnothing$. 因此我们可以考虑极小化问题

$$\min\left\{\int_G |\Delta u|^2 ; u \in H_g^2(G, S^1)\right\}. \tag{3}$$

我们称极小化问题(3) 的解为 G 上的以 g 为边值的双重调和映射.

由于 $d = 0$, $g: \partial G \to S^1$ 光滑,故存在 ∂G 上的光滑函数 θ_0,使 g 可表为 $g = e^{i\theta_0}$. 又因为 G 单连通,所以存在 $\theta \in H^2(G, \mathbf{R})$, $\theta|_{\partial G} = \theta_0$ 使得 $u \in H_g^2(G, S^1)$ 可表为 $u = e^{i\theta}$. 注意到一方面 $|\Delta u|^2 = |\Delta\theta|^2 + |\nabla\theta|^4$. 另一方面,若 $\theta \in H^2(G, \mathbf{R})$,则 $u = e^{i\theta} \in H_g^2(G, S^1)$. 反之,若 $u \in H_g^2(G, S^1)$,则存在 $\theta \in H^2(G, R)$ 使得 $u = e^{i\theta}$. 因此,

$$\min\left\{\int_G (|\Delta\theta|^2 + |\nabla\theta|^4) ; \theta \in H_{\theta_0}^2(G, \mathbf{R})\right\} = \min\left\{\int_G |\Delta u|^2 ; u \in H_g^2(G, S^1)\right\},$$

其中 $H_{\theta_0}^2(G, \mathbf{R}) = \{\theta \in H^2(G, \mathbf{R}) ; \theta|_{\partial G} = \theta_0\}$. 于是,求问题(3) 的解可以转化为求如下问题的解:

$$\min\left\{\int_G (|\Delta\theta|^2 + |\nabla\theta|^4) ; \theta \in H_{\theta_0}{}^2(G, \mathbf{R})\right\}. \tag{4}$$

从命题 1 的证明可以看出 泛函 $\int_G |\Delta u|^2$ 是弱下半连续的 ;且问题(3)(4) 的解存在.

命题 2　问题(4) 的解必是如下方程的弱解.

$$\Delta^2\theta = 2\mathrm{div}(|\nabla\theta|^2\nabla\theta) \tag{5}$$

证明　对任意 $\varnothing \in H_0^2(G, \mathbf{R})$, $t \in \mathbf{R}$,有 $\theta + t\varnothing \in H_{\theta_0}^2(G, \mathbf{R})$,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\int_G |\Delta(\theta + t\phi)|^2 + |\nabla(\theta + t\phi)|^4 = 0.$$

经计算可得

$$2\int_G \Delta\theta\Delta\phi + 4\int_G |\nabla\theta|^2\nabla\theta\nabla\phi = 0.$$

命题 3　(5) 的弱解于 $H_{\theta_0}^2(G, \mathbf{R})$ 中存在惟一.

证明　问题(4) 的解存在,蕴含着(5) 的弱解存在. 下面证明惟一性. 设 θ_1, θ_2 均为(5) 于 $H_{\theta_0}^2(G, \mathbf{R})$ 中的弱解,则对任意 $\phi \in H_0^2(G, \mathbf{R})$,

$$\int_G \Delta\theta_i\Delta\phi + 2\int_G |\nabla\theta_i|^2\nabla\theta_i\nabla\phi = 0,\ i = 1, 2.$$

两式相减后,取 $\phi = \theta_1 - \theta_2$,得

$$\int_G |\Delta(\theta_1 - \theta_2)|^2 + 2\int_G (|\nabla\theta_1|^2\nabla\theta_1 - |\nabla\theta_2|^2\nabla\theta_2)\nabla(\theta_1 - \theta_2) = 0.$$

利用[4] 中 129 页(2.1.1) 式,我们知存在某正常数 C,使得

$$(|\nabla\theta_1|^2\nabla\theta_1 - |\nabla\theta_2|^2\nabla\theta_2)\nabla(\theta_1 - \theta_2) \geqslant C|\nabla(\theta_1 - \theta_2)|^4.$$

将此式代入上式中可见

$$\int_G |\Delta(\theta_1 - \theta_2)|^2 + C\int_G |\nabla(\theta_1 - \theta_2)|^4 \leqslant 0.$$

由此及边值条件,我们不难得到惟一性.

命题 3 蕴含着问题(4) 解 Θ 的惟一性. 从而(3) 的解亦惟一,我们记这个惟一的双重调和映射为 $u_* = e^{i\Theta}$.

最后我们证明收敛性.

定理 4　设 u_ε 是 $E_\varepsilon(u, G)$ 于 $H_g^2(G, C)$ 中的极小元. 则当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$u_\varepsilon \to u_*,\text{于 } H^2(G, C).$$

证明　由于 $u_* \in H_g^2(G, S^1)$, u_ε 是极小元,所以 $E_\varepsilon(u_\varepsilon, G) \leqslant E_\varepsilon(u_*, G) \leqslant C$,其中 C 与 ε 无关. 此即

$$\int_G |\Delta u_\varepsilon|^2 \leqslant \int_G |\Delta u_*|^2 = C. \tag{6}$$

$$\int_G (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leqslant C\varepsilon^2. \tag{7}$$

从(7)不难推出 $\int_G |u_\varepsilon|^2 \leqslant C$. 此与(6)结合,并利用内插不等式,我们可得 $\|u_\varepsilon\|_{H^2(G,C)} \leqslant C$. 由此知存在 $u_0 \in H^2(G,C)$,及 u_ε 的子列 u_{ε_k},使当 $\varepsilon_k \to 0$ 时,

$$u_{\varepsilon_k} \xrightarrow{w} u_0, \text{于 } H^2(G,C), \tag{8}$$

$$u_{\varepsilon_k} \to u_0, \text{于 } C(\bar{G},C), \tag{9}$$

这便蕴含 $u_0 \in H_g^2(G,S^1)$.

由(8)和 $\int_G |\Delta u|^2$ 的弱下半连续性,可得

$$\int_G |\Delta u_0|^2 \leqslant \underline{\lim}_{\varepsilon_k \to 0} \int_G |\Delta u_{\varepsilon_k}|^2.$$

$$\int_G |\Delta u_0|^2 \leqslant \underline{\lim}_{\varepsilon_k \to 0} \int_G |\Delta u_{\varepsilon_k}|^2 \leqslant \overline{\lim}_{\varepsilon_k \to 0} \int_G |\Delta u_{\varepsilon_k}|^2 \leqslant \int_G |\Delta u_*|^2.$$

由此便知 u_0 也是(3)的解. 由于以 g 为边值的双重调和映射是惟一的,所以 $u_0 = u_*$,且

$$\lim_{\varepsilon_k \to 0} \int_G |\Delta u_{\varepsilon_k}|^2 = \int_G |\Delta u_*|^2.$$

以此结合(8)得

$$\Delta u_{\varepsilon_k} \to \Delta u_* \text{ 于 } L^2(G,C).$$

再利用(6)知:u_{ε_k} 有子列,不妨仍记为它本身,使当 $\varepsilon_k \to 0$ 时,

$$\nabla u_{\varepsilon_k} \to \nabla u_*, \text{ 于 } L^2(G,C).$$

综合上面的讨论,再结合(9)我们便得,

$$u_{\varepsilon_k} \to u_*, \text{ 于 } H^2(G,C).$$

由双重调和映射的惟一性,便知上面的收敛不仅对子列 $u_{\varepsilon k}$ 成立,而且对 u_ε 本身也成立. 定理证毕.

[参考文献]

[1] Bethuel F, Brezis H, Helein F. Asymptotics for the minimization of a Ginzburg – Landau functional[J]. Calc Var PDE, 1993, 1(2): 123—148.

[2] Fonseca I, Manteguzza C. Second order singular perturbation models for phase transitions[J]. SIAM J Math Anal, 2000, 31(5): 1121—1143.

[3] 陈亚浙,吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组[M]. 北京:科学出版社, 1991.

[4] Tolksdorf P. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations[J]. J Diff Equa, 1984, 51(1): 126—150.

[5] 雷雨田. 具变系数的 Ginzburg-Landau 泛函的径向极小元[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2004, 27(1): 1—6.

H^2 Convergence of the Minimizers for a Class of Functionals

Lei Yutian

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: Let u_ε be minimizers for the functional $E_\varepsilon(u,G)$ in $H_g^2(G,C)$. It is proved that u_ε convergent to the double harmonic map in H^2 as $\varepsilon \to 0$.

Key words: minimizer of functional, convergence, biharmonic map

[责任编辑 陆炳新]