乘积图与正则图的满着色

董伟,许宝刚

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 图 $G=(V,E)$ 的一个正常着色就是将 G 的顶点划分为独立集,或称之为色类,记为 $\prod=\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$. 对于任一色类 V_i 中的点 v,如果它与其余色类中至少一个点相邻,则 v 被称为是满色的. 如果在一个正常着色中,所有点都是满色的,则称这样的着色是满着色. 如果一个图存在满着色,定义图的满着色数为使得图存在满着色的最小颜色数,记为 $\chi_f(G)$. 另外,记 $\psi_f(G)$ 为使图存在满着色的最大颜色数. 在这篇文章中,我们研究了一些乘积图的满着色,得出一些关于正则图的满着色的结果.

[关键词] 着色,乘积图,正则图

[中图分类号] O157, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2004)03-0017-05

0 引言

除特别声明,我们所使用的符号,概念都与[1] 中一致. 图 $G=(V,E)$ 的一个 k 正常着色就是 G 的顶点集的一个划分,记为 $\prod=\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$,其中,每个 V_i 都是独立集,称为一个色类. 图 G 的染色数 $\chi(G)$ 是使 G 存在正常着色的最小颜色数.

对于任一色类 V_i 中的点 v,如果它与其余色类中至少一个点相邻,则 v 被称为满色的. 如果图 G 的一个正常着色中,每个点都是满色的,则称这样的着色是 G 的一个满着色. 如果一个图存在满着色,定义图的满着色数为使图存在满着色的最小颜色数,记为 $\chi_f(G)$. 同样的,记 $\psi_f(G)$ 为使图存在满着色的最大颜色数.

设 S 是顶点集 V 的子集,如果对于任意 $v\in V-S$,都存在 $u\in S$,使得 $uv\in E(G)$,则称 S 是一个控制集. 图 G 中顶点个数最少的控制集的基数称为 G 的控制数,记为 $\gamma(G)$. 设 S 是顶点集 V 的子集,如果 S 中的任意两个顶点都不相邻,则称 S 为图 G 的一个独立集. 图 G 中顶点最少的独立控制集的基数称为 G 的独立控制数,记为 $i(G)$.

如果图 G 的顶点集能被划分为独立控制集,则这样的划分被称为一个独立控制划分. 图 G 的最大独立控制划分数被记为 $id(G)$. 显然,一个图 G 的满着色与 G 中独立控制集的存在性有紧密的联系. 如果 G 存在满着色,则图 G 的顶点集能够被划分成独立控制集.

S. M. Hedetniemi 等人在[3] 中给出了下面的结论:

定理 A[3] 对任意的图 G,$\psi_f(G)=id(G)$.

对于任意的图 G 和 H,我们定义 G 和 H 的乘积图,记为 $G\diamond H$,其中 $G\diamond H$ 的顶点集为 $\{(u,v)\mid u\in G, v\in H\}$,两个顶点 (u_1,v_1),(u_2,v_2) 相邻当且仅当至少满足下列其中一个条件:$u_1=u_2$,且在 H 中 v_1 与 v_2 相邻 或者 $v_1=v_2$,且在 G 中 u_1 与 u_2 相邻.

在[3] 中,S. M. Hedetniemi 等人研究了乘积图:$P_m\diamond P_n$, $C_m\diamond P_n$ 和 $C_m\diamond C_n$ 的满着色,并且得出了下列的一些结论:

定理 B[3] 对任意的正整数 m 和 n,乘积图 $P_m\diamond P_n$ 存在 2- 满着色,但当 $k\geqslant 3$ 时,$P_m\diamond P_n$ 不存在任何 k- 满着色.

收稿日期:2003-02-11.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371055).

作者简介:董伟,1979 -,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,主要从事图论与组合优化方面的学习与研究.

E - mail:weidong_79@163.com

通讯联系人:许宝刚,1965 -,南京师范大学数学与计算机科学学院教授,博士生导师,主要从事图论与组合优化方面的教学与研究.

E - mail:baogxu@pine.edu.cn

定理 C[3] 乘积图 $C_m \diamond C_n$ 存在 3- 满着色当且仅当 $m \equiv 0 \bmod 3$ 或者 $n \equiv 0 \bmod 3$.

定理 D[3] 如果图 G 存在一个 s- 满着色,图 H 存在一个 r- 满着色,且有 $s \geqslant r$,则乘积图 $G \diamond H$ 存在一个 s- 满着色.

最后,他们还提出这样一个问题:立方图存在怎样的满着色.

立方图 Q_n 定义如下:Q_n 有 2^n 个顶点,每个顶点都被一个 n 维的坐标标号,坐标的分量为 0 或 1,两个顶点相邻当且仅当它们的坐标只有一个分量不相同.

在这篇文章中,我们先研究了乘积图 $Q_3 \diamond P_n$, $Q_3 \diamond C_n$ 的满着色,然后对立方图的满着色做了一些探讨.

1 结论和证明

由定义易见,若一个图存在满着色,则 $\chi_f(G) \leqslant \delta(G) + 1$. Q_3 是有 8 个顶点,每个点度为 3 的正则图.

引理 1.1 Q_3 存在一个 n- 满着色,当且仅当 $n = 2, 4$.

引理 1.2 对于任意的正整数 n, $Q_3 \diamond P_n$ 存在 2,4- 满着色.

证明 因为 Q_3 存在 2,4- 满着色, P_n 存在 2- 满着色,由定理 1.4, $Q_3 \diamond P_n$ 存在 2,4- 满着色.证毕.

引理 1.3 对任何正整数 n, $Q_3 \diamond P_n$ 都不存在 3- 满着色.

证明 假设 Q_3 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_8\}$ 且有如下的关联关系:

v_1 与 v_2, v_4, v_8 相邻;
v_2 与 v_1, v_3, v_7 相邻;
v_3 与 v_2, v_4, v_6 相邻;
v_4 与 v_3, v_5, v_1 相邻;
v_5 与 v_4, v_6, v_8 相邻;
v_6 与 v_5, v_7, v_3 相邻;
v_7 与 v_6, v_8, v_2 相邻;
v_8 与 v_1, v_5, v_7 相邻;

假设 P_n 的顶点集为 $U = \{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n\}$.那么根据乘积图的定义, $Q_3 \diamond P_n$ 的顶点集为 $VU = \{v_i u_j \mid v_i \in V, u_j \in U\}$,且有以下的关联关系:

$v_i u_j$ 与 $v_i u_{j+1}$ 相邻, $j = 1, 2, \cdots, n$;

根据定义,如果 v_i 与 v_k 相邻,则 $v_i u_j$ 与 $v_k u_j$ 相邻;

显然,当 $n = 1$ 时,引理成立.

当 $n \geqslant 2$ 时,反证法.假设 $Q_3 \diamond P_n$ 存在一个 3- 满着色. $Q_3 \diamond P_n$ 的定义如上.那么,根据定义, $Q_3 \diamond P_n$ 由 n 列组成,每列 8 个顶点,每列是一个 Q_3.下面是一个 $Q_3 \diamond P_3$ 的表示:

$$\begin{pmatrix} v_1 u_1 & v_1 u_2 & v_1 u_3 \\ v_2 u_1 & v_2 u_2 & v_2 u_3 \\ v_3 u_1 & v_3 u_2 & v_3 u_3 \\ v_4 u_1 & v_4 u_2 & v_4 u_3 \\ v_5 u_1 & v_5 u_2 & v_5 u_3 \\ v_6 u_1 & v_6 u_2 & v_6 u_3 \\ v_7 u_1 & v_7 u_2 & v_7 u_3 \\ v_8 u_1 & v_8 u_2 & v_8 u_3 \end{pmatrix}$$

情况 1 假设第一列被着了 3 种颜色,设 3 种颜色为 1,2,3.因为 Q_3 不存在 3- 满着色,所以在第一列中至少有一个顶点,它的邻点被着了相同的颜色.不失一般性,不妨设 $v_2 u_1$ 是这样的点,且 $v_2 u_1$ 被着颜色 2,它的邻点 $v_1 u_1, v_3 u_1, v_7 u_1$ 被着同样的颜色 3.由假设,因为 $Q_3 \diamond P_n$ 存在 3- 满着色,所以每个顶点都是满色的,那么, $v_2 u_2$ 必须着颜色 1,而 $v_1 u_2, v_3 u_2, v_7 u_2$ 必须着颜色 2,也就是说在第二列中,存在一个顶点,其邻点着同样的颜色,同样的道理,为了保证每一个顶点都是满色的,到了最后一列,必定存在一个点,其邻

点着同样的颜色,不能使得每个点都是满色的,矛盾.

情况 2 假设第一列只用 2 种颜色着色,1 和 2.因为 Q_3 是二部图,所以,不妨假设 v_1u_1,v_3u_1,v_5u_1,v_7u_1 着颜色 1,第一列中的其他点着颜色 2.由假设,$Q_3\diamond P_n$ 存在一个 3 满着色,那么 v_2u_2 必须着颜色 3,并且,第二列中 v_2u_2 的邻点只能着颜色 2,以下讨论同情况 1.

根据以上的两种情况,可知假设不成立,则结论成立.证毕.

引理 1.4 对任何正整数 n,$Q_3\diamond P_n$ 都不存在 5- 满着色.

证明 $Q_3\diamond P_n$ 的定义如上.假设 $Q_3\diamond P_n$ 存在一个 5- 满着色.我们首先从第一列开始着色.显然,在第一列中,至少出现 4 种颜色.否则,不能保证第一列中的每个点都是满色的.

情况 1 假设在第一列中恰巧只出现 4 种颜色.不妨设为 1,2,3,4.为了使第一列中的点都是满色的,则第二列中的点都必须着颜色 5,矛盾.

情况 2 假设在第一列中 5 种颜色都出现.因为第一列中每个点度为 3,所以,第一列的每个顶点的邻点所着颜色必不同,且至少有两种颜色只出现一次.因为 Q_3 存在 4- 满着色,所以,只要在 4- 满着色的基础上将其中任一个点的颜色换为第五种颜色就可以了,并且,这样的着色是惟一的.显然,存在两个相邻的点,有同一种颜色都没有出现在它们或它们的邻点上.为使每个点满色,在第二列中,与它们相对应的两个点都必须着相同的颜色,而相对应的点是相邻的,矛盾.

据以上的两种情况,可知假设不成立,则结论成立.证毕.

由引理 1.1,引理 1.2,引理 1.3,引理 1.4,显然有

定理 1.1 $Q_3\diamond P_n$ 存在 k- 满着色,当且仅当 $k = 2,4$.

引理 1.5 $Q_3\diamond C_{2n}$ 存在 4- 满着色.

证明 因为 Q_3 存在 4- 满着色,且 C_{2n} 存在 2- 满着色,所以由定理 D,$Q_3\diamond C_{2n}$ 存在 4- 满着色.证毕.

引理 1.6 $Q_3\diamond C_{2n+1}$ 存在 4- 满着色.

证明 我们先证明当 $n = 1$ 时,结论成立.

设 Q_3 的顶点集为 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_8\}$ 且有如下的关联关系:

v_1 与 v_2,v_4,v_8 相邻;
v_2 与 v_1,v_3,v_7 相邻;
v_3 与 v_2,v_4,v_6 相邻;
v_4 与 v_3,v_5,v_1 相邻;
v_5 与 v_4,v_6,v_8 相邻;
v_6 与 v_5,v_7,v_3 相邻;
v_7 与 v_6,v_8,v_2 相邻;
v_8 与 v_1,v_5,v_7 相邻;

假设 C_3 的顶点集为 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$.那么根据乘积图的定义,$Q_3\diamond C_3$ 的顶点集为 $VU = \{v_iu_j \mid v_i \in V, u_j \in U\}$,且有以下的关联关系:

v_iu_j 与 v_iu_{j+1} 相邻,如果 $j+1 \geqslant 3$,则 $j+1 = j+1-3$;

根据定义,如果 v_i 与 v_k 相邻,则 v_iu_j 与 v_ku_j 相邻;

$Q_3\diamond C_3$ 由 3 列组成,每一列有 8 个顶点,并且每一列都是一个 Q_3.结构如下表:

$$\begin{pmatrix} v_1u_1 & v_1u_2 & v_1u_3 \\ v_2u_1 & v_2u_2 & v_2u_3 \\ v_3u_1 & v_3u_2 & v_3u_3 \\ v_4u_1 & v_4u_2 & v_4u_3 \\ v_5u_1 & v_5u_2 & v_5u_3 \\ v_6u_1 & v_6u_2 & v_6u_3 \\ v_7u_1 & v_7u_2 & v_7u_3 \\ v_8u_1 & v_8u_2 & v_8u_3 \end{pmatrix}$$

接着,我们构造出它的一个 4- 满着色.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

从上面的矩阵,很容易验证每一个点都是满色的,所以,上述的着色是满着色.当 $n>1$ 时,只要在上面的矩阵中取 n 个前两列的拷贝,然后在加上最后一列,就可以得到 $Q_3 \diamond C_{2n+1}$ 的一个 4- 满着色.证毕.

引理 1.7　对任意正整数 n,$Q_3 \diamond C_{3n}$ 存在 3- 满着色.

证明　因为 C_{3n} 存在满 3- 着色,Q_3 存在 2- 满着色,由定理 D,显然成立.证毕.

引理 1.8　对任何的正整数 n,$Q_3 \diamond C_{3n+1}$ 和 $Q_3 \diamond C_{3n+2}$ 都不存在 3- 满着色.

证明　反证法.乘积图 $Q_3 \diamond C_{3n+1}$ 由 $3n+1$ 列组成,每列 8 个顶点,且每列构成一个 Q_3.假设 $Q_3 \diamond C_{3n+1}$ 存在一个 3- 满着色.

情况 1　假设每一列只着两种颜色,类似引理 1.3 的证明,可以得到下面的矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & \cdots \\ 2 & 3 & 1 & 2 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \cdots \\ 2 & 3 & 1 & 2 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \cdots \\ 2 & 3 & 1 & 2 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \cdots \\ 2 & 3 & 1 & 2 & \cdots \end{pmatrix}$$

因为总共有 $3n+1$ 列,所以顶点 $v_2 u_{3n+1}$ 不可能是满着色的,与假设矛盾.

情况 2　假设 $Q_3 \diamond C_{3n+1}$ 中有一列被着了 3 种颜色,不失一般性,不妨假设第一列被着了 3 种颜色.因为 Q_3 不存在 3- 满着色,所以第一列中必有一点,其邻点着同样的颜色.假设 $v_2 u_1$ 是这样的顶点,且着颜色 2,它在第一列中的邻点 $v_1 u_1$,$v_3 u_1$,$v_7 u_1$ 着颜色 3.那么,为了使 $v_2 u_1$ 是满色的,则 $v_2 u_2$ 必着颜色 1,且与它在同列的邻点都必须着相同的颜色,依此,同样的讨论,$v_2 u_{3n+1}$ 着颜色 2,且与它同列的邻点都着颜色 3,因为 $v_2 u_1$ 与 $v_2 u_{3n+1}$ 相邻,但是却着相同的颜色,矛盾.

由上述两种情况,可得 $Q_3 \diamond C_{3n+1}$ 不存在 3- 满着色.

对于 $Q_3 \diamond C_{3n+2}$,可用同样的方法讨论.

综上,结论成立.证毕.

定理 1.2　$Q_3 \diamond C_n$ 存在 3- 满着色当且仅当 $n \equiv 0 \pmod 3$.

证明　由引理 1.5,引理 1.6,引理 1.7,引理 1.8,显然.证毕.

定理 1.3　对任意的正整数 m 和 n,$n>m$,如果 Q_m 存在一个 k- 满着色,那么 Q_n 也存在 k- 满着色.

证明　首先,我们先证明 $Q_n \diamond P_2 = Q_{n+1}$.根据定义,$Q_n$ 有 2^n 个顶点,每个顶点都被一个 n 维的坐标标号,坐标的分量为 0 或 1,两个顶点相邻当且仅当它们的坐标只有一个分量不相同.假设 Q_n 的顶点 $v_k = (a_1, \cdots, a_n)$,$a_i = 0$ 或 1,$1 \leqslant i \leqslant n$.再由乘积图的定义,$Q_n \diamond P_2$ 实际上由两列 Q_n 构成.我们选取两个 Q_n 的拷贝,它们的顶点分别为 v_k 和 u_k,不妨令 $v_k = (0, a_1, \cdots, a_n)$,$u_k = (1, a_1, \cdots, a_n)$.由定义,$v_k$ 与 u_k 相邻,并且他们坐标中只有一个分量不同.显然,$Q_n \diamond P_2$ 有 2^{n+1} 个顶点,并且两个顶点相邻当且仅当它们的坐标只有一个分量不同.即 $Q_n \diamond P_2 = Q_{n+1}$.然后,由定理 D,只要 Q_m 存在一个 k- 满着色,就可以在 Q_m 的基础上构造出 Q_n,且有 $k \geqslant 2$,所以结论成立.证毕.

下面，我们将对顶点数为 2^n 的 n 正则图的满着色进行简单的讨论.这样的图我们记为 R_n.显然 R_n 包含了 Q_n.

定理 1.4 对任意的正整数 $n=2^k$，存在一个 R_n 有一个 n-满着色.

证明 我们用构造的方法.假设 G 属于 R_n，即 G 的顶点个数 $|V|=2^n$. $n=2^k$，于是我们构作 n 个点集，记为 $V_1,V_2,\cdots,V_n$，且 $|V_i|=2^{n-k}$.对任意点集 V_i 中的点记为 v_{ij}，显然 $1\leqslant j\leqslant 2^{n-k}$，在任意两个点集之间都存在一个一一映射.首先，对 $2\leqslant j\leqslant n$，从 v_{1j} 到 v_{ij} 添加一条边，然后，对 $3\leqslant i\leqslant n$，从 v_{2j} 到 v_{ij} 添加一条边，重复上面的步骤，每一次，我们都从 v_{sj} 到 v_{rj} 添加了一条边，其中 $s<r$ 因为 n 有限，最后，我们得到一个正则图 G，$|V|=2^n$，且点度为 $n-1$.最后，对 $i=1,3,5,\cdots,2^k-1$，在 V_i 与 V_{i+1} 之间添加边连接 $v_{i,t}$ 与 $v_{i+1,t+1}$，$t=0,1,2,\cdots,2^{n-k}-1(\bmod 2^{n-k})$，这样每个顶点的度数加 1，到此，我们构造出了一个图 G 属于 R_n，给不同的独立集不同的颜色，容易验证每个点都是满色的，所以 G 存在 n-满着色.证毕.

定理 1.5 (a) 如果 G 属于 R_n，那么 G 存在 $(n+1)$-满着色仅当 $(n+1)\mid 2^n$.

(b) 如果 $(n+1)\mid 2^n$，则必存在图 G 属于 R_n，使得 G 存在 $(n+1)$-满着色.

证明 (a) 假设 G 属于 R_n，$|V(G)|=2^n$.因为 G 在 $(n+1)$-满着色，那么 G 的顶点集必被分为 $n+1$ 个独立控制集，记为 V_i，$1\leqslant i\leqslant(n+1)$.对任意的独立控制集 V_i，有 $|V_i|n\geqslant 2^n-|V_i|$，于是 $|V_i|\geqslant\lceil(2^n/(n+1))\rceil$.假设结论不成立，则存在 V_i 使得，$|V_i|>\lceil(2^n/(n+1))\rceil$，于是有 $2^n=|V|=\sum|V_i|>2^n$，矛盾.证毕.

(b) 用构造法.因为 $(n+1)\mid 2^n$，不妨假设 $2^n/(n+1)=k$，选取 $n+1$ 独立集，记为 V_i，$1\leqslant i\leqslant n+1$.每个独立集 V_i 中有 k 个点，记为 v_{ij}，$1\leqslant j\leqslant k$ 与定理 1.4 类似的证明，添加从 v_{sj} 与 v_{rj} 的边.其中 $s<r$，$1\leqslant j\leqslant k$.显然，每个点的度为 n，且每个点满色的，到此，我们构造出了一个 G 属于 R_n，且有一个 $(n+1)$-满着色.证毕.

[参考文献]

[1] Bondy J A，Murty U S R. Graph theory with applications[M]. New York：Macmillan Ltd Press，1976.

[2] Cockayne E J，Hedetniemi S T. Towards a theory of domination in graphs[J]. Networks，1977，7：247—261.

[3] Dunbar J E，Hedetniemi S M，Hedetniemi S T，*et al*. Fall colorings of graphs[J]. J Combin Math Combin Comput，2000，33：257—273.

Fall Colorings on Cartesian Products and Regular Graphs

Dong Wei，Xu Baogang

(School of Mathematics and Computer Science，Nanjing Normal University，210097，Nanjing，China)

Abstract：A coloring of a graph $G=(V,E)$ is a partition $\prod=\{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$ of the vertices of G into independent sets or color classer. A vertex $v\in V_i$ is called colorful if it is adjacent to at least one vertex in every color class V_j，$i\neq j$. A fall coloring is a coloring in which every vertex is colorful. If a graph has a fall coloring，we define the fall chromatic unmber (fall achromatic number) of G，denoted $\chi_f(G)(\psi_f(G))$ to equal the minimum (maximum) numbers of colors used in a fall coloring of G，respectively. In this paper we study fall coloring of cartesian products and get some results on the fall colorings of regular graphs.

Key words：fall coloring，cartesian products，regular graph

[责任编辑：陆炳新]