Lusin 面积积分算子在加权 Herz 型空间上的有界性

王月山[1,2], 马韵新[2]

(1.北京应用物理与计算数学研究所,100088,北京)

(2.焦作大学基础部,454003,焦作)

[摘要] 给出了当 $n(1-\frac{1}{q}) \leqslant \alpha < n(1-\frac{1}{q})+\varepsilon(\alpha = n(1-\frac{1}{q})+\varepsilon)$,$\omega_1,\omega_2 \in A_1$ 时,Lusin 面积积分算子 S_ψ 从加权 Herz 型 Hardy 空间 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 到加权 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$(加权弱 Herz 空间 $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$)中的有界性证明.

[关键词] 面积积分,Herz 空间,Herz 型 Hardy 空间,弱 Herz 型空间

[中图分类号]O174.2, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)03-0022-05

0 引言

我们知道,面积积分算子 S_ψ 是调和分析中非常重要的算子.由[1],若 $\omega \in A_1$,则当 $1 < p < \infty$ 时它是 $L^p(\omega dx)$ 有界的,当 $p = 1$ 时,它是关于 ω 的弱(1,1)有界算子.由[2],当 $0 < p \leqslant 1$ 时,它是 $H_\omega^{p,q,s}$ 到 $L^p(\omega dx)$ 中的有界算子.那么 S_ψ 在 Herz 型空间上的性质如何呢?本文研究 S_ψ 在加权 Herz 型空间上的性质.在第二节中,我们研究了当 $0 < p < \infty$,$1 < q < \infty$ 且 $n(1-\frac{1}{q}) \leqslant \alpha < n(1-\frac{1}{q}).+\varepsilon$,$\omega_1,\omega_2 \in A_1$ 时,S_ψ 从 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 中的有界性质,我们还进一步指出,当 $0 < p \leqslant 1 \leqslant q < \infty$,$\alpha = n(1-\frac{1}{q})+\varepsilon$ 及 $\omega_1,\omega_2 \in A_1$ 时,S_ψ 是 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 到 $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 中的有界算子.在第三节中我们分别研究了当 $0 < \alpha < n(1-\frac{1}{q})$ 及 $a = n(1-\frac{1}{q})$,$\omega_1,\omega_2 \in A_1$ 时,S_ψ 在 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 中的有界性质.

设 $k \in \mathbf{Z}$,ω_2 是权函数,$f(x)$ 是 ω_2 可测函数,记 $B_k = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| \leqslant 2^k\}$,$C_k = B_k \setminus B_{k-1}$,$\chi_k = \chi_{C_k}$ 以及 $m_{k,\omega_2}(\lambda,f) = \omega_2(\{x \in C_k : |f(x)| > \lambda\})$.

定义 0.1[3] 设 $\alpha \in \mathbf{R}$,$0 < p < \infty$,$0 < q < \infty$ 且 ω_1,ω_2 为 $\mathbf{R}^n$ 上权函数.齐次加权 Herz 空间定义为 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2) = \{f \in L_{loc}^q(\mathbf{R}^n \setminus \{0\},\omega_2) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} < \infty\}$.其中,

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \|f\chi_k\|_{L_{\omega_2}^q}^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

定义 0.2[4] 设 $\alpha \in \mathbf{R}$,$0 < p < \infty$,$0 < q < \infty$ 且 ω_1,ω_2 为 $\mathbf{R}^n$ 上权函数.称 ω_2 可测函数 $f(x)$ 属于加权弱 Herz 空间 $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$,如果

$$\|f\|_{W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} = \sup_{\lambda>0}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} m_{k,\omega_2}(\lambda,f)^{\frac{p}{q}}\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

定义 0.3[5] 设 $\alpha \in \mathbf{R}$,$0 < p < \infty$,$0 < q < \infty$ 且 ω_1,ω_2 为 $\mathbf{R}^n$ 上权函数.齐次加权 Herz 型 Hardy 空间定义为 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2) = \{f \in s'(\mathbf{R}^n) : G(f) \in \dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)\}$ 且 $\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} = \|Gf\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}$.这里 Gf 为 f 的大极大函数.

若 $\omega_1 = \omega_2 = 1$ 时,上述函数空间分别是[5,6]中的齐次 Herz 空间 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbf{R}^n)$,齐次弱 Herz 空间 $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbf{R}^n)$ 及齐次 Herz 型 Hardy 空间 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbf{R}^n)$.

设 $\omega \in L_{loc}(\mathbf{R}^n)$ 且 $\omega > 0$,称 ω 是一个 A_1^- 权函数,记作 $\omega \in A_1$,如果存在固定常数 C,使得 $M(\omega)(x)$

收稿日期:2004-03-16.

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(0211050300).

作者简介:王月山,1962-,焦作大学数学系副教授,北京应用物理与计算数学研究所博士生,主要从事调和分析和偏微分方程研究.

$\leqslant C\omega(x)$,这里 $M(\omega)(x)$ 为 ω 的 Hardy-Littlewood 极大函数.

若 $\varepsilon>0$,可测函数 $\psi(x)$ 称为具有 ε 正则性的 Littlewood-Paley 函数,若满足(1) $\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)\mathrm{d}x=0$;(2) $|\psi(x)|\leqslant c(1+|x|)^{-(n+\varepsilon)}$;(3) 当 $|x|\geqslant 2|y|$ 时,$|\psi(x+y)-\psi(x)|\leqslant \frac{c|y|^{\varepsilon}}{(1+|x|)^{n+1+\varepsilon}}$. Lusin 面积积分算子 S_ψ 定义为 $S_\psi(f)(x)=\left(\int_0^\infty\int_{|y-x|<t}|f*\psi_t(y)|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}}$. 其中 $\psi_t(x)=t^{-n}\psi(\frac{x}{t})$.

1 S_ψ 在齐次加权 Herz 型 Hardy 空间中的性质

首先,我们来回顾一下加权 Herz 型 Hardy 空间的中心原子刻划.

引理 1.1[5] 设 $0<p<\infty$, $\alpha\geqslant n(1-\frac{1}{q})$ 且 $\omega_1,\omega_2\in A_1$,那么 $f\in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的充要条件为 $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lambda_k a_k(x)$ 在分布意义下成立,且 $\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)}\sim\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$. 这里,$a_k(x)$ 为中心$(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$- 原子,满足 $\mathrm{supp}a_k(x)\subset B_k$, $\|a_k\|_{L^q_{\omega_2}}\leqslant\omega_1(B_k)^{-\frac{\alpha}{n}}$ 且当 $|\beta|\leqslant s$ 时,$\int_{\mathbf{R}^n}a_k(x)x^\beta\mathrm{d}x=0$(这里 $s=[\alpha+n(\frac{1}{q}-1)]$).

引理 1.2 设 $\omega\in A_1$,则存在固定常数 C 及 $\delta(0<\delta<1)$,使得当 $j\leqslant k$ 时 $\omega(B_j)/\omega(B_k)\leqslant C2^{(j-k)n\delta}$;当 $j>k$ 时 $\omega(B_j)/\omega(B_k)\leqslant C2^{(j-k)n}$.

引理 1.3 若 $x\in C_k$, $a_j(x)$ 是中心$(\alpha,q;\omega_1,\omega_2)$- 原子,$\mathrm{supp}a_j\subset B_j$,且 $j\leqslant k-3$,则 $S_\psi(a_j)(x)\leqslant C2^{(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{1}{q}}$.

证明 记 $\Omega_1=\{y:|y-x|<t$ 且 $|y|<2^{j+1}\}$, $\Omega_2=\{y:|y-x|<t$ 且 $|y|\geqslant 2^{j+1}\}$.

$$S_\psi(a_j)(x)^2\leqslant\int_0^\infty\int_{\Omega_1}\left|\int_{B_j}a_j(z)t^{-n}\psi(\frac{y-z}{t})\mathrm{d}z\right|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}+$$
$$\int_0^\infty\int_{\Omega_2}\left|\int_{B_j}a_j(z)t^{-n}\psi(\frac{y-z}{t})\mathrm{d}z\right|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}=A+B,$$

对于 A,由于 $t+|y-z|>|x-y|+|y-z|\geqslant|x-z|\geqslant|x|-|z|\geqslant|x|/2$, $t>|x-y|\geqslant|x|-|y|\geqslant 2^{k-1}-2^{j+1}\geqslant 2^{j+1}$,以及 $\psi(x)$ 所满足的正则性条件(2),所以

$$A\leqslant C|x|^{-2(n+\varepsilon)}\int_{2^{j+1}}^{\infty}\int_{|y|<2^{j+1}}t^{-n-1+2\varepsilon}\mathrm{d}y\mathrm{d}t\left(\int_{B_j}|a_j(z)|\mathrm{d}z\right)^2\leqslant C2^{-2k(n+\varepsilon)+2j\varepsilon}\left(\int_{B_j}|a_j(z)|\mathrm{d}z\right)^2$$

而 $\int_{B_j}|a_j(z)|\mathrm{d}z\leqslant C\frac{|B_j|}{\omega_2(B_j)}\int_{B_j}|a_j(z)|\omega_2(z)\mathrm{d}z\leqslant C2^{jn}\omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{1}{q}}$,故

$$A\leqslant C2^{2(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{2\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{2}{q}}.$$

对于 B,由于 $|y|\geqslant 2^{j+1}\geqslant 2|z|$,利用 $\psi(x)$ 正则性条件(3),以及 $a_j(z)$ 的消失矩条件,

$$B\leqslant\int_0^\infty\int_{\Omega_2}\left(\int_{B_j}t^{-n}|a_j(z)||\psi(\frac{y-z}{t})-\psi(\frac{y}{t})|\mathrm{d}z\right)^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}}$$
$$\leqslant\left(\int_{B_j}|z|^\varepsilon|a_j(z)|\mathrm{d}z\right)^2\int_0^\infty\int_{|y-x|\leqslant t}\frac{t^{1-n}\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{(t+|y|)^{2(n+\varepsilon+1)}}$$
$$\leqslant C2^{2(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{p}}\omega_2(B_j)^{-\frac{2}{q}}.$$

综合 A,B 得
$$S_\psi(a_j)(x)\leqslant C2^{2(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{1}{q}}.$$

定理 1.1 设 $\varepsilon>0$, $1<p<\infty$, $1<q<\infty$ 及 $n(1-\frac{1}{q})\leqslant\alpha<n(1-\frac{1}{q})+\varepsilon$, $\omega_1,\omega_2\in A_1$,若 $\psi(x)$ 为具有 ε 正则性的 Littlewood-Paley 函数,则 S_ψ 是 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 中的有界算子.

证明　若 $f \in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$,由引理 1.1 知 $f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j a_j(x)$ 在分布意义下成立.则

$$\|S_\psi(f)\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} \leqslant C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}|\lambda_j|\,\|S_\psi(a_j)\chi_k\|_{L^q_{\omega_2}}\Big)^p\Big\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k-2}^{\infty}|\lambda_j|\,\|S_\psi(a_j)\chi_k\|_{L^q_{\omega_2}}\Big)^p\Big\}^{\frac{1}{p}} = C(D_1 + D_2).$$

由[1] 知当 $\omega_2 \in A_1$ 时 S_ψ 是 $L^q_{\omega_2}$ 上有界算子,且 $\omega_1 \in A_1$,故当 $0 < p \leqslant 1$ 时

$$D_2 \leqslant C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k-2}^{\infty}|\lambda_j|\,\|a_j\|_{L^q_{\omega_2}}\Big)^p\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=k-2}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big(\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)}\Big)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big\}^{\frac{1}{p}},$$

当 $1 < p < \infty$ 时,利用 Hölder 不等式

$$D_2 \leqslant C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big(\sum_{j=k-2}^{\infty}|\lambda_j|^p\omega(B_j)^{-\frac{p\alpha}{2n}}\Big)\Big(\sum_{j=k-2}^{\infty}\omega(B_j)^{-\frac{\alpha p'}{2n}}\Big)^{\frac{p}{p'}}\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=k-2}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big(\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)}\Big)^{\frac{\alpha p}{2n}}\Big\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

对 D_1,由引理 1.3,若 $x \in C_k$,$\operatorname{supp} a_j(x) \subset B_j$,且 $j \leqslant k-3$,则

$$S_\psi(a_j)(x) \leqslant C2^{(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{1}{q}}.$$

当 $0 < p \leqslant 1$ 时,由于 $n(1-1/q) \leqslant \alpha < n(1-1/q)+\varepsilon$,所以

$$D_1 \leqslant C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{k-3}|\lambda_j|^p 2^{(j-k)(n+\varepsilon)p}\Big(\frac{\omega_2(B_k)}{\omega_2(B_j)}\Big)^{\frac{p}{q}}\Big(\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)}\Big)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\sum_{k=j+3}^{\infty}2^{(j-k)p(n(1-1/p)+\varepsilon-\alpha)}\Big\} \leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big\}^{\frac{1}{p}},$$

当 $p > 1$ 时,利用 Hölder 不等式及引理 1.2

$$D_1 \leqslant C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j=-\infty}^{k-3}|\lambda_j|^p 2^{\frac{p(j-k)(n+\varepsilon 1)}{2}}\Big(\frac{\omega_2(B_k)}{\omega_2(B_j)}\Big)^{\frac{p}{2q}}\Big(\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)}\Big)^{\frac{\alpha p}{2q}}\Big\}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\sum_{k=j+3}^{\infty}2^{p(j-k)[n(1-1/q)+\varepsilon-\alpha]/2}\Big\}^{1/2} \leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

如果 $\alpha = n(1-1/q)+\varepsilon$,则我们有如下的弱型估计.

定理 1.2　设 $\varepsilon > 0$,$0 < p \leqslant 1 \leqslant q < \infty$,$\alpha = n(1-\frac{1}{q})+\varepsilon$,$\omega_1,\omega_2 \in A_1$,若 ψ 为具有 ε 正则性的 Littlewood-Paley 函数,则 S_ψ 是 $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 到 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 中的有界算子.

证明　设 $f \in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$,由引理 1.1 则

$$\|S_\psi(f)\|_{W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} \leqslant \sup_{\lambda>0}\lambda\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}m_{k,\omega_2}(\lambda,S_\psi(f))^{\frac{p}{q}}\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C\sup_{\lambda>0}\lambda\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}m_{k,\omega_2}\Big(\frac{\lambda}{2},\Big(\sum_{j=-\infty}^{k-3}|\lambda_j|\,S_\psi(a_j)\Big)\Big)^{\frac{p}{q}}\Big\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$C\sup_{\lambda>0}\lambda\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}m_{k,\omega_2}\Big(\frac{\lambda}{2},S_\psi\Big(\sum_{j=k-2}^{\infty}\lambda_j a_j\Big)\Big)^{\frac{p}{q}}\Big\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C(E_1+E_2).$$

由于 $\omega_2 \in A_1$ 且 $q \geqslant 1$ 时 S_ψ 是关于 ω_2 弱(q,q)有界的,又 $0 < p \leqslant 1$,所以

$$E_2 \leqslant C\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big\|\sum_{j=k-2}^{\infty}\lambda_j a_j\Big\|^p_{L^q_{\omega_2}}\Big\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\sum_{k=-\infty}^{j+2}\Big(\frac{\omega_1(B_k)}{\omega_1(B_j)}\Big)^{\frac{\alpha p}{n}}\Big\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

最后一步应用了引理 1.2.对 E_1,由于 $x \in C_k$,$j \leqslant k-3$,由引理 1.3 及引理 1.2 知

$$S_\psi(a_j)(x) \leqslant C2^{(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant C2^{(j-k)(n(1-1/q)+\varepsilon-\alpha)}\omega_1(B_k)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_k)^{-\frac{1}{q}} = C\omega_1(B_k)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_k)^{-\frac{1}{q}},$$

因此

$$E_1 \leqslant C\sup_{\lambda>0}\lambda\Big\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\omega_2(\{x\in C_k : C\omega_1(B_k)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_k)^{-\frac{1}{q}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j| \geqslant \frac{\lambda}{2}\})^{\frac{p}{q}}\Big\}.$$

故对固定的 $\lambda > 0$,若

$$\omega_2(\{x\in C_k : C\omega_1(B_k)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_k)^{-\frac{1}{q}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j| > \frac{\lambda}{2}\}) \neq 0,$$

则

$$C\omega_1(B_k)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_k)^{-\frac{1}{q}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j| \geqslant \frac{\lambda}{2},$$

从而

$$\lambda < C\omega_1(B_k)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_k)^{-\frac{1}{q}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|.$$

设 k_λ 为满足上式的最大整数,则

$$\omega_1(B_{k_\lambda})^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_{k_\lambda})^{-\frac{1}{q}} \leqslant \frac{C}{\lambda}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|,$$

注意到 $0 < p \leqslant 1$,则

$$E_1 \leqslant C\sup_{\lambda>0}\lambda\Big\{\sum_{k=-\infty}^{k_\lambda}\omega_1(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\omega_2(B_k)^{\frac{p}{q}}\Big\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant C\sup_{\lambda>0}\lambda\Big\{\sum_{k=-\infty}^{k_\lambda}2^{(k-k_\lambda)p(n+\varepsilon)\delta}\omega_1(B_{k_\lambda})^{\frac{\alpha p}{n}}\omega_2(B_{k_\lambda})^{\frac{p}{q}}\Big\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant C\sup_{\lambda>0}\lambda\omega_1(B_{k_\lambda})^{\frac{\alpha p}{n}}\omega_2(B_{k_\lambda})^{\frac{1}{q}} \leqslant C\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j| \leqslant C\Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

2 S_ψ 在齐次加权 Herz 空间中的性质

我们首先介绍齐次加权 Herz 空间中函数的分解.

引理 2.1[3] 令 $0 < \alpha < \infty$,$0 < p < \infty$,$1 \leqslant q < \infty$,且 $\omega_1,\omega_2 \in A_1$,那么 $f \in H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 的充要条件为 $f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j b_j(x)$ 在分布意义下成立,且 $\|f\|_{H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)} \sim \Big\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda_j|^p\Big\}^{\frac{1}{p}}$.这里,$b_j(x)$ 满足 $\mathrm{supp}\, a_j(x) \subset B_j$,$\|b_j\|_{L^q_{\omega_2}} \leqslant \omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{n}}$.

引理 2.2 若 $x \in C_k$,$b_j(x)$ 满足引理 2.1 条件,则当 $j \leqslant k-3$ 时有 $S_\psi(b_j)(x) \leqslant C2^{(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{1}{q}}$.

证明

$$S_\psi(b_j)(x)^2 \leqslant \int_0^\infty\int_{\Omega_1}\Big|\int_{B_j}b_j(z)t^{-n}\psi(\frac{y-z}{t})\mathrm{d}z\Big|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}} +$$
$$\int_0^\infty\int_{\Omega_2}\Big|\int_{B_j}b_j(z)t^{-n}\psi(\frac{y-z}{t})\mathrm{d}z\Big|^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}} = F + G,$$

类似于引理 1.3 中 A 的估计,注意到 $j < k$,则

$$F \leqslant C2^{2(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{2\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{2}{q}} \leqslant C2^{2(j-k)n}\omega_1(B_j)^{-\frac{2\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{2}{q}}.$$

而

$$G \leqslant C\int_0^\infty\int_{\Omega_1}\Big(\int_{B_j}t^{-n}|b_j(z)||\psi(\frac{y-z}{t}) - \psi(\frac{y}{t})|\mathrm{d}z\Big)^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}} +$$

$$C\int_0^\infty\int_{\Omega_2}\left(\int_{B_j} t^{-n}\,|b_j(z)|\,|\psi(\frac{y}{t})|\,\mathrm{d}z\right)^2\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{t^{n+1}} = G_1 + G_2.$$

类似于引理 1.3 中 B 的估计

$$G_1 \leqslant C2^{2(j-k)(n+\varepsilon)}\omega_1(B_j)^{-\frac{2\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{2}{q}} \leqslant C2^{2(j-k)n}\omega_1(B_j)^{-\frac{2\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{2}{q}}.$$

注意到

$$G_2 \leqslant C(G_{21} + G_{22})\left(\int_{B_j}|b_j(z)|\,\mathrm{d}z\right)^2,$$

而 $|\psi(\frac{y}{t})| \leqslant Ct^{n+1}/(t+|y|)^{n+\varepsilon}$ 及 $t+|y| > |x-y|+|y| \geqslant |x|$,所以

$$G_{21} = C\left(\int_0^{|x|}\int_{|y-x|<t} t^{-3n-1}\,|\psi(\frac{y}{t})|^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}t \leqslant C2^{2k\varepsilon}.$$

由于 $|\psi(\frac{y}{t})| \leqslant C$,所以

$$G_{22} \leqslant C\left(\int_{|x|}^\infty\int_{|y-x|<t} t^{-3n-1}\mathrm{d}y\mathrm{d}t \leqslant C\int_{|x|}^\infty t^{-2n-1}\mathrm{d}t = C\,|x|^{-2n} \leqslant C2^{-2kn}.\right.$$

再注意到 $\int_{B_j}|b_j(z)|\,\mathrm{d}z \leqslant C2^{jn}\omega_1(B_j)^{-\frac{\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{1}{q}}$,这样

$$G_2 \leqslant C2^{2(j-k)n}\omega_1(B_j)^{-\frac{2\alpha}{n}}\omega_2(B_j)^{-\frac{2}{q}}.$$

利用引理 2.1 和 2.2,完全类似于定理 1.1 和 2.2 的证明,可以得到如下结论:

定理 2.1 若 $0 < p < \infty$,$1 < q < \infty$ 及 $0 < \alpha < n(1-\frac{1}{q})$,$\omega_1,\omega_2 \in A_1$,则 S_ψ 是 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 上的有界算子.

定理 2.2 若 $0 < p \leqslant 1 \leqslant q < \infty$ 及 $\alpha = n(1-\frac{1}{q})$,$\omega_1,\omega_2 \in A_1$,则 S_ψ 是 $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 到 $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ 上的有界算子.

[参考文献]

[1] Chanillo S, Wheeden R L. Some weighted norm inequalities for the area integral[J]. Indiana Uni J Math, 1987, 36(2): 297—234.
[2] 李兴民,彭立中. 加权 Hardy 空间与面积积分的加权模不等式[J]. 数学学报, 1997, 40(3): 351—356.
[3] 陆善镇,杨大春. $\mathbf{R}^n$ 上加权 Herz 空间分解及应用[J]. 中国科学(A), 1995, 38(2): 147—158.
[4] 刘宗光,王斯雷. Herz 型空间中的分数次积分算子的弱型估计[J]. 数学学报, 1999, 42(2): 923—830.
[5] 陆善镇,杨大春. 加权 Herz 型 Hardy 空间分解及应用[J]. 中国科学(A), 1995, 38(6): 235—245.
[6] 胡国恩,陆善镇,杨大春. 弱 Herz 空间的应用[J]. 数学进展, 1997, 26(4): 417—428.

Boundedness of Lusin Area Integral Operator on the Weighted Herz-type Spaces

Wang Yueshan[1,2], Ma Yunxin[2]

(1. Beijing Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, 100088, Beijing, China)
(2. Department of Basic Courses, Jiaozuo University, 454003, Jiaozuo, China)

Abstract: It provides the boundary proof of Littlewood-Paley S_ψ function from weighted Herz-type Hardy space $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ to weighted Herz space $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$ (weighted weak Herz space $W\dot{K}_q^{\alpha,p}(\omega_1,\omega_2)$) if $n(1-\frac{1}{q}) \leqslant \alpha < n(1-\frac{1}{q})+\varepsilon$ ($\alpha = n(1-\frac{1}{q})+\varepsilon$) and $\omega_1,\omega_2 \in A_1$.

Key words: function of Littlewood-Paley, Herz space, Herz-type Hardy space, weak Herz space

[责任编辑: 陆炳新]