

亚纯函数及其导数的唯一性

陈春芳^{1, 2}

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 210097, 江苏, 南京)

(2. 江西师范大学数学与信息科学学院, 330027, 江西, 南昌)

[摘要] 本文研究了非常数亚纯函数 f 及其导数 f' IM 分担两值时的唯一性问题, 把 Mues 和 Steinmetz 关于整函数的一个结果推广到部分亚纯函数.

[关键词] 亚纯函数, 分担值, 重数, 唯一性

[中图分类号] O174.5, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2004)03-0036-04

0 引言

本文中的亚纯函数是指整个复平面 C 上的亚纯函数. 令 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, 我们将使用值分布论中的标准记号: $T(r, f)$, $m(r, f)$, $N(r, f)$, $\bar{N}(r, f)$, ...

设 $\alpha(z)$ 是开平面上的另一个亚纯函数, 若 $\alpha(z)$ 满足: $T(r, \alpha) = S(r, f)$, 则称 $\alpha(z)$ 是 $f(z)$ 的小函数.

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为两个非常数亚纯函数, a 是任意的复数, 若 $f - a$ 和 $g - a$ 有相同的零点且重数相同, 则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ CM 分担 a ; 若不计重数, 则称 $f(z)$ 和 $g(z)$ IM 分担 a .

1976 年, Rubel-Yang 证明了.

定理 A^[1] 设 f 为非常数整函数, a, b 为两个相互判别的有穷复数, 若 f 与 f' CM 分担 a, b , 则 $f \equiv f'$.

1979 年, Mues-Steinmetz 改进了定理 A, 证明了

定理 B^[2] 设 f 为非常数整函数, a, b 为两个相互判别的有穷复数, 若 f 与 f' IM 分担 a, b , 则 $f \equiv f'$.

本文中推广了定理 B, 得到定理 1.

1 主要定理

定理 1 设 f 为非常数亚纯函数, 且 f 的极点重数 $n \geq 11$, a, b 为两个相互判别的有穷复数, 若 f 与 f' IM 分担 a, b , 且 $f \equiv f'$.

证明 假设 $f \not\equiv f'$, 则由定理 B 知 f 一定有极点. 下面分两种情形:

(1) 假设 $ab \neq 0$.

因 a, b 为 f 与 f' 的 IM 分担值, 故 $f - a$ 与 $f - b$ 的零点均为简单零点. 由假设有

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f-f'}\right) &\leq T(r, f-f') + O(1) = N(r, f') + m\left(r, f\left(1 - \frac{f'}{f}\right)\right) + O(1) \\ &\leq N(r, f) + \bar{N}(r, f) + m(r, f) + S(r, f) = T(r, f) + \bar{N}(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

于是

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-b}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f-f'}\right) \leq T(r, f) + \bar{N}(r, f) + S(r, f), \quad (1)$$

注意到

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + m\left(r, \frac{1}{f-b}\right) = m\left(r, \frac{1}{f-a} + \frac{1}{f-b}\right) + O(1) \leq m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r, f),$$

再由 (1) 得

收稿日期: 2004-02-07.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071038).

作者简介: 陈春芳, 女, 1979- , 南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生, 江西师范大学数学与信息科学学院教师, 主要从事亚纯函数的研究.

万方数据

$$2T(r, f) \leq T(r, f) + m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f). \quad (2)$$

显然

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f' - f''}\right) \leq T(r, f) + \bar{N}(r, f) + S(r, f)$$

以及

$$N\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f''}\right)$$

于是

$$N\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) + N\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) \leq T(r, f) + \bar{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f). \quad (3)$$

注意到

$$m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + m\left(r, \frac{1}{f' - a}\right) + m\left(r, \frac{1}{f' - b}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r, f),$$

再由(3)得

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + 2T(r, f') &\leq T(r, f) + T(r, f'') + \bar{N}(r, f) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + T(r, f') + 2\bar{N}(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

所以

$$m\left(r, \frac{1}{f'}\right) + T(r, f') \leq T(r, f) + 2\bar{N}(r, f) + S(r, f). \quad (4)$$

由(2)得

$$T(r, f') \leq 3\bar{N}(r, f) + S(r, f), \quad (5)$$

再由(2)得

$$2T(r, f) \leq T(r, f) + T(r, f') + \bar{N}(r, f) + S(r, f), \quad (6)$$

由(5)(6)得

$$T(r, f) \leq 4\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

由 $n \geq 11$ 得到

$$T(r, f) \leq S(r, f).$$

于是得到矛盾, 故 $f \equiv f'$.

(2) 假设 $ab = 0$. 不失一般性, 不妨设 $a = 0, b = 1$.

由 $0, 1$ 为 f 与 f' 的 IM 分担值知 f 的零点重级均大于 1, $f - 1$ 的零点均为简单零点.

令

$$g = \frac{f'(f' - f)}{f(f - 1)} \quad (7)$$

则

$$\begin{aligned} T(r, g) &= m\left(r, \frac{f'}{f-1} \left(\frac{f'}{f} - 1\right)\right) + N(r, g) \\ &\leq m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + N(r, g) + O(1) \\ &\leq N(r, g) + S(r, f) \end{aligned}$$

设 z_0 为 f 的零点, 经过简单计算知 $g(z_0) \neq \infty$; 设 z_0 为 $f - 1$ 的零点, 同理可知 $g(z_0) \neq \infty$.

故 g 的极点只能是 f 的极点.

设 z_0 为 f 的 n 级极点, 经过计算可知 z_0 为 g 的 2 级极点. 因此

$$T(r, g) \leq 2\bar{N}(r, f) + S(r, f), \quad (8)$$

由(7)得

$$(f')^2 - ff' = g(f^2 - f), \quad (9)$$

由(9)得

$$2f'f'' - (f')^2 - ff'' = g'(f^2 - f) + g(2ff' - f'), \quad (10)$$

及

$$\mathcal{A}(f'')^2 + 2f'f''' - 3f'f'' - ff''' = g''(f^2 - f) + 2g'(2ff' - f') + g(\mathcal{A}(f')^2 + 2ff'' - f''). \quad (11)$$

设 z_1 为 $f - 1$ 的零点, 则 $f(z_1) = f'(z_1) = 1$.

由(10)得

$$f''(z_1) = 1 + g(z_1), \quad (12)$$

再由(11)得

$$f'''(z_1) = 2g'(z_1) - g^2(z_1) + 2g(z_1) + 1. \quad (13)$$

设

$$\Phi = \frac{f'' - (1 + g)f'}{f - 1}, \quad (14)$$

$$\Psi = \frac{f''' - (2g' - g^2 + 2g + 1)f'}{f - 1}. \quad (15)$$

注意到 $f - 1$ 的零点均为简单零点, 由(12)(13)知 $\Phi(z_1) \neq \infty$, $\Psi(z_1) \neq \infty$, 故 Φ 和 Ψ 的极点只能是 f 的极点.

于是

$$\begin{aligned} T(r, \Phi) &= m(r, \Phi) + N(r, \Phi) \\ &\leq m\left(r, \frac{f''}{f-1}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f-1}\right) + m(r, g) + N(r, \Phi) + O(1) \\ &\leq N(r, \Phi) + S(r, f) \leq 3\bar{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

同理

$$T(r, \Psi) \leq N(r, \Psi) + S(r, f) \leq 5\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

由(14)(15)得

$$f'(2g^2 - g' + \Phi) = (f - 1)[\Psi - \Phi' - (1 + g)\Phi]. \quad (16)$$

若 $2g^2 - g' + \Phi \neq 0$, 由(16)得

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{2g^2 - g' + \Phi}\right) \\ &\leq T(r, 2g^2 - g' + \Phi) + O(1) \\ &\leq N(r, 2g^2 - g' + \Phi) + S(r, f) \\ &\leq 4\bar{N}(r, f) + S(r, f), \\ \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{\Psi - \Phi' - (1 + g)\Phi}\right) \leq 5\bar{N}(r, f) + S(r, f). \end{aligned}$$

由上面两个不等式及第二基本定理有

$$T(r, f) \leq \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \leq 10\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

由 $n \geq 11$ 得到: $T(r, f) \leq S(r, f)$.

于是得到矛盾, 故

$$2g^2 - g' + \Phi \equiv 0. \quad (17)$$

设 z_0 为 f 的零点, 由(11)得

$$2f''(z_0) = -g(z_0).$$

由(14)得:

$$f''(z_0) = -\Phi(z_0).$$

于是

$$\Phi(z_0) = \frac{1}{2}g(z_0)$$

再由(17)得

$$2g^2(z_0) + \frac{1}{2}g(z_0) - g'(z_0) = 0. \quad (18)$$

若 $2g^2 + \frac{1}{2}g - g' \neq 0$, 由 (8)(18) 得

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{2g^2 + \frac{1}{2}g - g'}\right) \leq T\left(r, 2g^2 + \frac{1}{2}g - g'\right) + O(1) \leq 4\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

注意到

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f-1}\right) &\leq N\left(r, \frac{\frac{f'}{f}}{\frac{f'}{f}-1}\right) \leq T\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) \\ &= N\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) \\ &= \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f) \\ &\leq 5\bar{N}(r, f) + S(r, f), \end{aligned}$$

再由第二基本定理有

$$T(r, f) \leq \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) + S(r, f) \leq 10\bar{N}(r, f) + S(r, f).$$

由 $n \geq 11$ 得到: $T(r, f) \leq S(r, f)$ 矛盾. 于是有 $g' = \frac{1}{2}g + 2g^2$.

设 z_0 为 g 的 m 级极点, 所以 $m+1 = 2m$, 从而 $m=1$ 与 g 的极点为 2 级极点矛盾.

因此 g 没有极点从而 f 没有极点, 与 f 一定有极点矛盾. 所以 $f \equiv f'$.

定理完毕.

致谢: 本文是在方明亮教授的悉心指导下完成的, 在此表示衷心的感谢!

[参考文献]

- [1] Rubel L A, Yang C C. Values shared by an entire function and its derivative[J]. Lecture in Math, 1977, 599: 101—103.
- [2] Mues E, Steinmetz N. Meromorphe funktionen, die mit ihrer ableitung werteteiler[J]. Manuscripta Math, 1979, 29(2—4): 195—206.
- [3] 郑稼华, 王书培. 关于亚纯函数及其导数的唯一性[J]. 数学进展, 1992, 21(3): 334—341.
- [4] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [5] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

Unicity for Meromorphic Function and Its Derivative

Chen Chunfang^{1, 2}

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

(2. School of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, 330027, Nanchang, China)

Abstract The paper study the uniqueness of nonconstant meromorphic function f and f' when they share two values IM. We improve a result on entire function of Mues and Steinmetz to some meromorphic function.

Key words meromorphic function, sharing values, multiplicity, unicity

[责任编辑: 陆炳新]