

一类 Wick 型随机 Fisher 方程的白噪声泛函解

陈彬

(徐州师范大学数学系 221009, 江苏 徐州)

[摘要] 本文研究了一类随机偏微分方程——Wick 型随机 Fisher 方程,并在 Kondratiev 分布空间 $(S)_{-1}$ 中利用 Hermite 变换和相似约化法给出了 Wick 型随机 Fisher 方程的白噪声泛函解.

[关键词] Wick 型随机 Fisher 方程,白噪声泛函解,Hermite 变换,相似约化法

[中图分类号] O211.6 O175.2, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2004)04-0011-04

0 引言

随着科学技术的发展和线性理论研究的日趋完善,非线性理论的研究在自然科学的所有领域正在蓬勃开展.人们以往的研究重点主要限制在不明显依赖于时空坐标的常数系可积非线性模型,近十多年来,变系数非线性波方程的研究也引起了数学家和物理学家的高度关注,已有许多文献报道了相关的研究成果.而对变系数非线性波方程的系数进行随机扰动所形成的非线性随机波方程的研究是数学物理和概率论的重要课题之一.目前,此类方程的研究成果国内外尚少,Konotop 和 Vázquez 在其专著[1]中对非线性随机波方程进行了系统研究,在[2]中,Holden 等研究了白噪声框架下的随机偏微分方程的性质和求解问题,Xie 在文献[3,4]中利用齐次平衡法和 Hermite 变换给出了 Wick 型随机 KdV 方程和 KP 方程的精确解.本文将在白噪声空间中利用 Hermite 变换和相似约化法给出方程

$$U_t = U_{xx} + F(t) \diamond U - \alpha(t) \diamond U^{\diamond k} \quad (1)$$

的白噪声泛函解,其中“ \diamond ”表示 Kondratiev 分布空间 $(S)_{-1}$ 上的 Wick 积, $F(t), \alpha(t)$ 为 Wiener 白噪声泛函,

且 $\alpha(t) = \exp \diamond \left\{ \int_0^t \left(\frac{2(k+1)}{k-1} \alpha^2 - F(s) \right) ds \right\}$, α 为常数.

方程(1)可视为对[5]中广义变系数 Fisher 方程

$$u_t = u_{xx} + f(t)u - g(t)u^k \quad (2)$$

的系数 $f(t), g(t)$ 进行随机扰动所形成的 Wick 型随机 Fisher 方程,方程(2)具有实际背景,当 $k=2$ 时,代表了 Fisher 方程,也是两个种群的 Lotka-Volterra 竞争系统的特殊形式;当 $k=3$ 时,代表了 Newell-Whitehead 方程.

1 白噪声框架下的随机偏微分方程

为了给出方程(1)的白噪声泛函解,下面将简要叙述白噪声框架下随机偏微分方程的基本性质,详细内容参见[2].

设 $h_n(x)$ 是 Hermite 多项式,对 $n \geq 1$,记 $\xi_n(x) = \frac{h_n(\sqrt{2}x)}{(\pi(n-1)!)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$,则 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交基.

对于 d -维指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbf{N}$, $i = 1, 2, \dots, d$,张量积族 $\{\xi_\alpha = \xi_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \xi_{\alpha_d}, \alpha \in \mathbf{N}^d\}$ 形成 $L^2(\mathbf{R}^d)$ 的正交基.记 $\alpha^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_d^{(i)})$ 是某固定阶数的 d -维指标的第 i 个 d -维指标,假设这指标有如下性质:若 $i < j$,则 $\alpha_1^{(i)} + \dots + \alpha_d^{(i)} \leq \alpha_1^{(j)} + \dots + \alpha_d^{(j)}$.定义 $\eta_i = \xi_{\alpha^{(i)}} = \xi_{\alpha_1^{(i)}} \otimes \dots \otimes \xi_{\alpha_d^{(i)}} (i \geq 1)$.记 $(\mathbf{N}_0^d)_c = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \mid \text{其中只有有限个 } \alpha_i \neq 0\}$,对 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in (\mathbf{N}_0^d)_c$,定义

$$H_\alpha(\omega) = \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(\omega, \eta_i), \omega \in (S(\mathbf{R}^d))^*,$$

收稿日期:2004-06-09.

基金项目:国家自然科学基金(10471120)和江苏省教育厅自然科学基金(03KJB110135)资助项目.

作者简介:陈彬,1965—,徐州师范大学数学系副教授,主要从事概率统计的教学和研究,E-mail: bchen@xznz.edu.cn

万方数据

其中 $(\mathcal{S}(\mathbf{R}^d))^*$ 是 Hida 检验函数空间 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ 的对偶空间. 对固定的 $n \geq 1$, 记 $(\mathcal{S})^n$ 是 $x = \sum_{\alpha} c_{\alpha} H_{\alpha} \in \bigoplus_{k=1}^n L^2(\mu)$ 的集合, 其中 $c_{\alpha} \in \mathbf{R}^n$ 满足 $\|x\|_{1,k}^2 = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^2 (\alpha!) (2N)^{|\alpha|} < \infty, \forall k \geq 1$, 对 $c_{\alpha} = (c_{\alpha}^{(1)}, \dots, c_{\alpha}^{(n)}) \in \mathbf{R}^n, c_{\alpha}^2 = |c_{\alpha}|^2 = \sum_{j=1}^n (c_{\alpha}^{(j)})^2, \mu$ 是 $(S^*(\mathbf{R}), \mathcal{A}(S^*(\mathbf{R})))$ 上的白噪声测度. 对于 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, 记 $\alpha! = \prod_{k=1}^{\infty} \alpha_k! (2N)^{\alpha} = \prod_j (2j)^{\alpha_j}$. 空间 $(\mathcal{S})^n$ 是所有满足下述条件的元素 $X = \sum_{\alpha} b_{\alpha} H_{\alpha}$: 存在 $q \in \mathbf{N}$, 使得 $\|X\|_{-1,-q} = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^2 (2N)^{-q\alpha} < \infty$, 其中 $b_{\alpha} \in \mathbf{R}^n$. 记 $X, x = \sum_{\alpha} (b_{\alpha}, c_{\alpha}) \alpha!$, 则 $(\mathcal{S})_{-1}^n$ 是 $(\mathcal{S})^n$ 的对偶空间, 其中 (b_{α}, c_{α}) 是 \mathbf{R}^n 中的内积. 对于 $X = \sum_{\alpha} a_{\alpha} H_{\alpha}, Y = \sum_{\alpha} b_{\alpha} H_{\alpha} \in (\mathcal{S})_{-1}^n$, 其中 $a_{\alpha}, b_{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, 称

$$X \diamond Y = \sum_{\alpha, \beta} (a_{\alpha}, b_{\beta}) H_{\alpha+\beta}$$

为 X 和 Y 的 Wick 积. 可以证明, 空间 $(\mathcal{S}(\mathbf{R}^d))^*$ 和 $(\mathcal{S})_{-1}^n$ 关于 Wick 积是封闭的. 对 $X = \sum_{\alpha} a_{\alpha} H_{\alpha} \in (\mathcal{S})_{-1}^n, a_{\alpha} \in \mathbf{R}^n$, 当级数 $\sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha} \in \mathbf{C}^n$ 收敛时, X 的 Hermite 变换定义为

$$\mathcal{H}(X)(z) = \tilde{X}(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} z^{\alpha} \in \mathbf{C}^n,$$

其中 $z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, 对于 $\alpha \in (\mathbf{N}_0^{\mathbf{N}})_c, z^{\alpha} = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n} \dots, \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ 是复数序列的全体. 由定义可以证明, 若 $X, Y \in (\mathcal{S})_{-1}^n$, 则对于 $z \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, 使得 $\tilde{X}(z)$ 和 $\tilde{Y}(z)$ 存在的 z , 有

$$\widetilde{X \diamond Y}(z) = \tilde{X}(z) \cdot \tilde{Y}(z).$$

设 $X = \sum_{\alpha} a_{\alpha} H_{\alpha} \in (\mathcal{S})_{-1}^n$, 则向量 $c_0 = \tilde{X}(0) \in \mathbf{R}^n$ 称为 X 的广义数学期望, 记为 $E(X)$. 设 V 为 $E(X)$ 的某一邻域, $f: V \rightarrow \mathbf{C}^m$ 是解析函数, 且 f 在 $E(X)$ 附近的 Taylor 级数的系数在 \mathbf{R}^n 中, 则定义 f 的 Wick 版本为 $f^{\diamond}(x) = \mathcal{H}^{-1}(f \circ \tilde{X}) \in (\mathcal{S})_{-1}^n$. $X \in (\mathcal{S})_{-1}$ 的 Wick 指数定义为 $\exp^{\diamond}\{X\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^{\diamond n}}{n!}$. 利用 Hermite 变换可以证明其和指数函数具有相同的性质, 如 $\exp^{\diamond}\{X+Y\} = \exp^{\diamond}\{X\} \diamond \exp^{\diamond}\{Y\}$.

假设随机偏微分方程为 $A(t, x, \rho_t, \nabla_x, u, \omega) = 0$, 其中 A 是某一给定的函数, $u = u(t, x, \omega)$ 是未知的随机过程, $\rho_t = \frac{\partial}{\partial_t}, \nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d})$. 首先把所有乘积视为 Wick 积, 所有函数视为其 Wick 版本, 可得 Wick 型随机微分方程

$$A^{\diamond}(t, x, \rho_t, \nabla_x, u, \omega) = 0, \tag{3}$$

其次, 对 (3) 进行 Hermite 变换, 把 Wick 积转为通常的乘积, 从而方程 (3) 变为

$$\tilde{A}(t, x, \rho_t, \nabla_x, \tilde{u}, z_1, z_2, \dots) = 0, \tag{4}$$

其中 z_1, z_2, \dots 均为复数. 记 $\mathbf{K}_q(r) = \{z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}, \sum_{\alpha \neq 0} |z^{\alpha}|^2 (2N)^{|\alpha|} < r^2\}$. 若存在 $q > 0, r > 0$, 使得对任意的 $z \in \mathbf{K}_q(r)$, 方程 $\tilde{A}(t, x, \rho_t, \nabla_x, u, z) = 0$ 有解 $u(t, x, z)$, 则在一定的条件下, 可以利用 Hermite 变换的逆变换求得 $U = \mathcal{H}^{-1}u \in (\mathcal{S})_{-1}$ 是方程 (3) 的解. 因此我们有如下的定理, 其证明见 [2].

定理 1 假设存在开集 $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d, q > 0$ 和 $r > 0$, 使得对 $(t, x) \in G, z \in \mathbf{K}_q(r)$, 方程 (4) 有解 $u(t, x, z)$. 又假设 $u(t, x, z)$ 及其包含在 (4) 中的所有偏导数在 $G \times \mathbf{K}_q(r)$ 上有界. 对任意 $z \in \mathbf{K}_q(r)$ 关于 (t, x) 连续, 并且对所有 $(t, x) \in G$ 关于 $z \in \mathbf{K}_q(r)$ 解析, 则存在 $U(t, x) \in (\mathcal{S})_{-1}$ 使得 $u(t, x, z) = \tilde{U}(t, x)(z), \forall (t, x, z) \in G \times \mathbf{K}_q(r)$ 并且 $U(t, x)$ 是 (3) 在 $(\mathcal{S})_{-1}$ 中的解.

3 Wick 型随机 Fisher 方程的白噪声泛函解

对 (1) 式进行 Hermite 变换, 得到如下方程

$$\tilde{U}_t(t, x, z) = \tilde{U}_{xx}(t, x, z) + \tilde{F}(t, z)\tilde{U}(t, x, z) - \tilde{G}(t, z)\tilde{U}^k(t, x, z), \tag{5}$$

其中 $z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ 是参数. 为叙述方便, 记 $\tilde{U}(t, x, z) = u(t, x, z), \tilde{F}(t, z) = F(t, z), \tilde{G}(t, z) = G(t, z)$, 则方程 (5) 可表示为

$$u_t(t, x, z) = u_{xx}(t, x, z) + F(t, z)u(t, x, z) - G(t, z)u^k(t, x, z). \tag{6}$$

下面先求方程(6)的解. 设方程(6)的解具有形式:

$$u(t, x, z) = h(t, x, z) \Phi(\varphi(t, x, z)), \quad (7)$$

其中 $h(t, x, z)$, $\Phi(\varphi)$ 和 $\varphi(t, x, z)$ 均为待定函数. 将式(7)代入(6)式整理可得

$$h\varphi_x^2\Phi'' + [2h_x\varphi_x + h\varphi_{xx} - h\varphi_t]\Phi' + [h_{xx} - h_t + Fh]\Phi - Gh^k\Phi^k = 0. \quad (8)$$

令

$$h(t, x, z)\varphi_x^2(t, x, z) = G(t, z)h^k(t, x, z), \quad (9)$$

$$2h_x(t, x, z)\varphi_x(t, x, z) + h(t, x, z)\varphi_{xx}(t, x, z) - h(t, x, z)\varphi_t(t, x, z) = 0, \quad (10)$$

$$h_{xx}(t, x, z) - h_t(t, x, z) + F(t, z)h(t, x, z) = 0. \quad (11)$$

则(8)变为

$$\Phi''(\varphi) = \Phi^k(\varphi). \quad (12)$$

由(9)和(10)得

$$\varphi_t(t, x, z) = (k+3)(k-1)\varphi_{xx}(t, x, z). \quad (13)$$

由(9)(11)和(13)式可推得

$$\frac{3-k}{k-1}\left(\frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}\right)^2 - \frac{4}{k-1}\frac{\varphi_{xxx}}{\varphi_x} + \frac{G_t(t, z) + (k-1)G(t, z)F(t, z)}{2G(t, z)} = 0. \quad (14)$$

取 $\varphi_x(t, x, z) = v^{4/(k+1)}(t, x, z)$ 则(14)式变为

$$v_{xx}(t, x, z) - \frac{(k-1)(k+1)}{32}\frac{G_t(t, z) + (k-1)G(t, z)F(t, z)}{G(t, z)}v(t, x, z) = 0. \quad (15)$$

由方程(1)的条件知 $G_t(t, z) + (k-1)G(t, z)F(t, z)/G(t, z) = \alpha(k+1)\alpha^2/(k-1)$, 因此当 $\alpha \neq 0$ 时, 有

$$\varphi(t, x, z) = \int (c_1(t, z)e^{\frac{k+1}{4}\alpha x} + c_2(t, z)e^{-\frac{k+1}{4}\alpha x})^{4/(k+1)} dx. \quad (16)$$

若取 $c_1(t, z)$ 和 $c_2(t, z)$ 与 z 无关, 则(16)式表明 $\varphi(t, x, z)$ 也与 z 无关.

下面就 k 的不同取值讨论方程(6)的解.

1) 当 $k \neq 3$ 时, 令 $c_1(t, z) = c_1(t) = 0$ 或 $c_2(t, z) = c_2(t) = 0$, 由(16)和(13)式得

$$\varphi(t, x, z) = \alpha(z) \exp\{[k+3]\alpha^2 t/(k-1) + \alpha \varepsilon x\} + c_0(z), \quad (17)$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$, 由(12)式得

$$\Phi(\varphi) = (2^{-1}(k-1)[\alpha(1+k)]^{1/2}\varepsilon\varphi + c)^{2/(k-1)}. \quad (18)$$

由(17)和(9)可得 h , 再由(17)和(7)可得方程(6)的解

$$u(t, x, z) = \exp\left\{-(k-1)^{-1}\int_0^t([\alpha(k+1)\alpha^2/(k-1) - F(s, z)])ds\right\} \cdot \left(\frac{\alpha \exp\{[k+3]\alpha^2 t/(k-1) + \alpha \varepsilon x\}}{2^{-1}(k-1)[\alpha(1+k)]^{1/2}\exp\{[k+3]\alpha^2 t/(k-1) + \alpha \varepsilon x\} + c}\right)^{2/(k-1)}. \quad (19)$$

如果取白噪声泛函 $F(t)$ 使得方程(6)的解 $u(t, x, z)$ 满足定理1中的条件, 则由定理1知存在 $(S)_{-1}$ 值过程

$$U(t, x) = \exp\left\{-(k-1)^{-1}\int_0^t([\alpha(k+1)\alpha^2/(k-1) - F(s)])ds\right\} \cdot \left(\frac{\alpha \exp\{[k+3]\alpha^2 t/(k-1) + \alpha \varepsilon x\}}{2^{-1}(k-1)[\alpha(1+k)]^{1/2}\exp\{[k+3]\alpha^2 t/(k-1) + \alpha \varepsilon x\} + c}\right)^{2/(k-1)}. \quad (20)$$

使得 $u(t, x, z) = \mathcal{H}U(t, x)(z)$ 并且 $U(t, x)$ 是方程(1)的解. 显然, $U(t, x)$ 是白噪声泛函.

如果取 $F(t) = f(t) + aW(t)$ 其中 f 是 \mathbf{R} 上可积函数或有界函数, $W(t)$ 是 Brown 运动白噪声, 即

$W(t) = \dot{B}(t)$, $B(t)$ 是标准 Brown 运动, 则由(19)及 $\tilde{W}(t, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t)z_k, z = (z_1, z_2, \dots) \in \mathbf{C}^N$, 容易验证定理1中的条件成立, 从而由(20)知方程(1)的解为

$$U(t, x) = \exp\left\{-(k-1)^{-1}\left(\int_0^t([\alpha(k+1)\alpha^2/(k-1) - f(s)])ds - aB(t)\right)\right\} \cdot \left(\frac{\alpha \exp\{[k+3]\alpha^2 t/(k-1) + \alpha \varepsilon x\}}{2^{-1}(k-1)[\alpha(1+k)]^{1/2}\exp\{[k+3]\alpha^2 t/(k-1) + \alpha \varepsilon x\} + c}\right)^{2/(k-1)}. \quad (21)$$

因为 $\exp^\diamond\{B(t)\} = \exp\{B(t) - \frac{1}{2}t^2\}$ [参见 2] 的引理 (2.6.16)), 所以由 (21) 可推得

$$U(t, x) = \exp\left\{-\frac{1}{k-1}\left[\frac{\alpha(k+1)}{k-1}\alpha^2 t - a\left(B(t) - \frac{1}{2}t^2\right) - \int_0^t f(s)ds\right]\right\} \cdot \left(\frac{\alpha \exp\{\alpha(k+3)\alpha^2 t/(k-1) + \alpha x\}}{2^{-(k-1)}[(k-1)!(\alpha(1+k)^{-1})^{1/2} \exp\{\alpha(k+3)\alpha^2 t/(k-1) + \alpha x\} + c]}\right)^{2(k-1)}.$$

2) 当 $k=3$ 时, 由 (16) 和 (13) 式得 $\varphi(t, x, z) = c_1(z)\exp(3\alpha^2 t + \alpha x) + c_2(z)\exp(3\alpha^2 t - \alpha x)$. 取 $c_1(z)$ 和 $c_2(z)$ 与变量 z 无关, 则 $\varphi(t, x, z)$ 亦与 z 无关. 记

$$\varphi(t, x) = c_1 \exp(3\alpha^2 t + \alpha x) + c_2 \exp(3\alpha^2 t - \alpha x). \quad (22)$$

这时由 (12) 式可得 $\Phi_\varphi^2 = 1/2\Phi^4 + \beta$, 其中 β 为任意常数. 此方程的解为

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \operatorname{ds}\left(\gamma \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), & \beta < 0, \\ 1/\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon \varphi + \gamma\right), & \beta = 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \gamma \left[\operatorname{ns}\left(\gamma \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{cs}\left(\gamma \varphi, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right], & \beta > 0, \end{cases} \quad (23)$$

其中 γ 为任意常数, $\operatorname{ds}(x, k)$, $\operatorname{ns}(x, k)$ 和 $\operatorname{cs}(x, k)$ 是 Jacobi 椭圆函数. 由 (22) 和 (9) 式可得

$$h(t, x, z) = G^{-1(k-1)}(t, z) \alpha [c_1 \exp(3\alpha^2 t + \alpha x) - c_2 \exp(3\alpha^2 t - \alpha x)]. \quad (24)$$

由 (23) (24) (7) (6) 和 Jacobi 椭圆函数的性质及定理 1 可得方程 (1) 的解为

$$U(t, x) = \exp^\diamond\left\{-\frac{1}{k-1}\int_0^t\left(\frac{\alpha(k+1)}{k-1}\alpha^2 - F(s)\right)ds\right\} \cdot \alpha [c_1 \exp\{3\alpha^2 t + \alpha x\} - c_2 \exp\{3\alpha^2 t - \alpha x\}] \Phi(\varphi(t, x)). \quad (25)$$

其中 $\varphi(t, x)$ 和 Φ 由 (22) 和 (23) 所定义.

取 $F(t) = f(t) + aW(t)$, 其中 f 是 \mathbf{R} 上可积函数或有界函数, 则由 (25) 得 (1) 的解为

$$U(t, x) = \exp\left\{-\frac{1}{k-1}\left[\frac{\alpha(k+1)}{k-1}\alpha^2 t - a\left(B(t) - \frac{1}{2}t^2\right) - \int_0^t f(s)ds\right]\right\} \cdot \alpha [c_1 \exp\{3\alpha^2 t + \alpha x\} - c_2 \exp\{3\alpha^2 t - \alpha x\}] \Phi(\varphi(t, x)).$$

[参考文献]

- [1] Konotop V V, Vázquez L. Nonlinear Random Waves[M]. Singapore: World Scientific, 1994.
- [2] Holden H, Øksendal B, Ubøe J, et al. Stochastic Partial Differential Equations: a modeling, white noise functional approach[M]. Boston: Birkhäuser, 1996.
- [3] Xie Y C. Exact solutions of stochastic KdV equations[J]. Phys Lett A, 2003, 310(2/3): 161—167.
- [4] Xie Y C. Exact solutions of wick-type stochastic Kadomtsev-Petviashvili equations[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 21(2): 473—480.
- [5] 谷元, 谷艺, 刘太琳. 广义变系数 Fisher 型方程的精确解[J]. 科技通报, 1999, 15(1): 52—54.

White Noise Functional Solutions of Wick-type Stochastic Fisher Equation

Chen Bin

(Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, 221116, Xuzhou, China)

Abstract In this paper, we research a class of Wick-type stochastic Fisher equations which is a special stochastic partial differential equation. The white noise functional solutions of Wick-type stochastic Fisher equation are given by using similarity reduction method and the Hermite transform in Kondratiev distribution space $(S)_{-1}$.

Key words Wick-type stochastic Fisher equation, white noise functional solutions, Hermite transform, similarity reduction method

[责任编辑: 陆炳新]