全对角线幻方的存在性

徐承绪,卢准炜

(太原理工大学,030024,山西,太原)

[摘要]　本文给出了二次整数方及其乘积的定义,化 mn 阶全对角线幻方的存在性为 m 阶和 n 阶全对角线幻方的存在性.给出了 $n=4\times 2^k(k\geqslant 0)$ 阶的一族全对角线幻方.再用二次整数方的乘积,给出了所有 $n\neq 2,3,4t+2,9t\pm 3$ 阶的一族全对角线幻方.2 阶幻方不存在,3 阶幻方只有一个,且不是全对角线幻方.Mr.Raynor 已证明了 $4t+2$ 阶全对角线幻方不存在,因此全对角线幻方的存在性问题已完全解决.

[关键词]　整数方,二次整数方,二次整数方的乘积,自正交全对角线整数方,全对角线幻方

[中图分类号]O156,　[文献标识码]A,　[文章编号]1001-4616(2004)04-0032-04

0　引言

[1] 给出了所有 $n\neq 2,3,6$ 阶的一族自正交拉丁方,反证了 Euler 关于 $4t+2$ 阶正交拉丁方不存在的猜想.[2] 强化自正交拉丁方为自正交全对角线拉丁方,给出了所有 $n\neq 2,3,4t+2,9t\pm 3$ 阶的一族自正交全对角线拉丁方和全对角线幻方,扩大了[3] 给出的 $n=6t\pm 1$ 阶的情况.本文弱化自正交全对角线拉丁方为自正交全对角线整数方,给出了 $n=6t+3$ 阶的一族自正交全对角线整数方和全对角线幻方,解决了奇数阶全对角线幻方的存在性问题.

设 A 是一个 n 阶方阵,A 的行号和列号用集合 $N=\{0,1,\cdots,n-1\}$ 表示.A 的第 i 行,第 j 列的位置用 (i,j) 表示.A 的 n 个位置的集合 $\{(i,k+i):i=0,1,\cdots,n-1\}$ 称为 A 的第 k 条右对角线,A 的 n 个位置的集合 $\{(i,k-i):i=0,1,\cdots,n-1\}$ 称为 A 的第 k 条左对角线,这里加法和减法都是 $\bmod n$ 计算的.若 A 的元素也取自 N,则称 A 是一个整数方.在 n 阶整数方 $A=(a_{ij})$ 中,若 $\sum_{j=0}^{n-1}a_{kj}=\sum_{i=0}^{n-1}a_{ik}=\sum_{i=0}^{n-1}a_{i\,k+i}=\sum_{i=0}^{n-1}a_{i\,k-i}=n(n-1)/2$,$k$ 取自 N,则称 A 是一个 n 阶全对角线整数方.若 n 阶整数方 A 的每行,每列,每条右对角线,每条左对角线都是 N 的一个排列,则称 A 是一个 n 阶 Knut Vik 设计.显然,n 阶 Knut Vik 设计是一个 n 阶全对角线整数方.若 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的元素是 n^2 个不同整数 $0,1,\cdots,n^2-1$,则称 A 是一个 n 阶二次整数方.若更有

$$\sum_{j=0}^{n-1}a_{kj}=\sum_{i=0}^{n-1}a_{ik}=\sum_{i=0}^{n-1}a_{i\,k+i}=\sum_{i=0}^{n-1}a_{i\,k-i}=n(n^2-1)/2,$$

k 取自 N,则称 A 是一个 n 阶全对角线幻方.令 A' 表示 n 阶整数方 A 的转置阵,若 $nA+A'$ 是一个 n 阶二次整数方,则称 A 是一个 n 阶自正交整数方.

1　二次整数方的乘积

设 $A=(a_{ij})$ 是一个 m 阶二次整数方,$B=(b_{rs})$ 是一个 n 阶二次整数方,令 $C=(c_{uv})$,这里 $u=ni+r$,$v=nj+s$,$c_{uv}=n^2a_{ij}+b_{rs}$,则称 C 是 A 和 B 的乘积,记为 $C=AB$.

定理 1　若 A 是一个 m 阶全对角线幻方,B 是一个 n 阶全对角线幻方,则 C 是一个 mn 阶全对角线幻方.

证明　因 $0\leqslant i,j\leqslant m-1$,$0\leqslant r,s\leqslant n-1$,故 $0\leqslant ni+r,nj+s\leqslant mn-1$,即 C 是一个 mn 阶方阵.因 $0\leqslant a_{ij}\leqslant m^2-1$,$0\leqslant b_{rs}\leqslant n^2-1$,故 $0\leqslant n^2a_{ij}+b_{rs}\leqslant(mn)^2-1$.若

收稿日期:2003-12-16.
作者简介:徐承绪,1930-,太原理工大学教授,主要从事拉丁方的研究.

$$c_{u_1v_1}=c_{u_2v_2},\ u_1=ni_1+r_1,\ v_1=nj_1+s_1,\ u_2=ni_2+r_2,\ v_2=nj_2+s_2,$$

即 $n^2a_{i_1j_1}+b_{r_1s_1}=n^2a_{i_2j_2}+b_{r_2s_2}$,因 $0\leqslant b_{r_1s_1},\ b_{r_2s_2}\leqslant n^2-1$,故 $b_{r_1s_1}=b_{r_2s_2}$,$a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$,因 A 和 B 都是二次整数方,故 $i_1=i_2$,$j_1=j_2$,$r_1=r_2$,$s_1=s_2$,$u_1=u_2$,$v_1=v_2$,故 C 是二次整数方.因 A 和 B 都是全对角线幻方,故 $\sum\limits_{u=0}^{mn-1}c_{uv}=\sum\limits_{i=0}^{m-1}\sum\limits_{r=0}^{n-1}(n^2a_{ij}+b_{rs})=n^3\sum\limits_{i=0}^{m-1}a_{ij}+m\sum\limits_{r=0}^{n-1}b_{rs}=mn(m^2n^2-1)/2$.

同理 $\sum\limits_{v=0}^{mn-1}c_{uv}=mn(m^2n^2-1)/2$.

$$\sum_{u=0}^{mn-1}c_{u\,v+u}=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}(n^2a_{i\,j+i}+b_{r\,s+r}=n^3\sum_{i=0}^{m-1}a_{i\,j+i}+m\sum_{r=0}^{n-1}b_{r\,s+r}=mn(m^2n^2-1)/2,$$

同理 $\sum\limits_{u=0}^{mn-1}c_{u\,v-u}=mn(m^2n^2-1)/2$.故 C 是全对角线幻方.

定理 2 若 A 是一个 n 阶自正交全对角线整数方,则 $C=nA+A'$ 是一个 n 阶全对角线幻方.

证明 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}c_{ik}=n\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_{ik}+\sum\limits_{j=0}^{n-1}a_{ki}=n(n^2-1)/2$.同理得 $\sum\limits_{j=0}^{n-1}c_{kj}=n(n^2-1)/2$.令 $k+i=i'$,$\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_{k+i\,i}=\sum\limits_{i'=k}^{n+k-1}a_{i'(n-k)+i'}=\sum\limits_{i'=0}^{n-1}a_{i(n-k)+i'}=n(n-1)/2$,$\sum\limits_{i=0}^{n-1}c_{i\,k+i}=n\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_{i\,k+i}+\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_{k+i\,i}=n(n^2-1)/2$.

同理 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}c_{i\,k-i}=n(n^2-1)/2$.故 C 是全对角线幻方.

2 $6t\pm1$ 阶全对角线幻方

[5] 证明了 n 阶 Knut Vik 设计存在的充要条件为 $n=6t\pm1$,本节用 Knut Vik 设计来给出 $6t\pm1$ 阶全对角线幻方.

定理 3 设素数 $p\geqslant5$,令 $a_{ij}=2i-j(\mathrm{mod}p)$,则 $A=(a_{ij})$ 是一个 p 阶自正交 Knut Vik 设计.

证明 若 $2i-j_1=2i-j_2$,则 $j_1=j_2$,若 $2i_1-j=2i_2-j$,因 $(2,p)=1$,故 $i_1=i_2$.若 $\begin{cases}2i_1-j_1=2i_2-j_2\\ j_1-i_1=j_2-i_2\end{cases}$,则 $i_1=i_2$,$j_1=j_2$.若 $\begin{cases}2i_1-j_1=2i_2-j_2\\ j_1+i_1=j_2+i_2\end{cases}$,则 $3i_1=3i_2$,因 $(3,p)=1$,故 $i_1=i_2$,$j_1=j_2$,故 A 是一个 Knut Vik 设计.因 $0\leqslant a_{ij},a_{ji}\leqslant p-1$,故 $0\leqslant pa_{ij}+a_{ji}\leqslant p^2-1$.若 $pa_{i_1j_1}+a_{j_1i_1}=pa_{i_2j_2}+a_{j_2i_2}$,因 $0\leqslant a_{j_1i_1},\ a_{j_2i_2}\leqslant p-1$,故 $\begin{cases}a_{j_1i_1}=a_{j_2i_2}\\ a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}\end{cases}$,$\begin{cases}2j_1-i_1=2j_2-i_2\\ 2i_1-j_1=2i_2-j_2\end{cases}$,$3i_1=3i_2$,故 $i_1=i_2$,$j_1=j_2$,从而 A 是一个 p 阶自正交 Knut Vik 设计.

由定理 2 知 $C_p=pA+A'$ 是一个 p 阶全对角线幻方.

奇数可表为 $6t\pm1$ 和 $6t+3$.若 $n=6t\pm1$ 的素因子分解式为 $n=\prod\limits_{i=1}^{k}p_i^{t_i}$,$p_i\geqslant5$,则由定理 1 可知,知 $C_n=\prod\limits_{i=1}^{k}C_{p_i^{t_i}}$ 是一个 n 阶全对角线幻方.

3 $6t+3$ 阶全对角线幻方

例 $$A=\begin{bmatrix}0&5&7&0&5&7&0&5&7\\1&3&8&1&3&8&1&3&8\\2&4&6&2&4&6&2&4&6\\5&7&0&5&7&0&5&7&0\\3&8&1&3&8&1&3&8&1\\4&6&2&4&6&2&4&6&2\\7&0&5&7&0&5&7&0&5\\8&1&3&8&1&3&8&1&3\\6&2&4&6&2&4&6&2&4\end{bmatrix}$$ 是一个 9 阶自正交整数方.

$$9A+A'=\begin{bmatrix}0&46&65&5&48&67&7&53&69\\14&30&76&16&35&78&9&28&74\\25&44&60&18&37&56&23&39&58\\45&64&2&50&66&4&52&71&6\\32&75&13&34&80&15&27&73&11\\43&62&24&36&55&20&41&57&22\\63&1&47&68&3&49&70&8&51\\77&12&31&79&17&33&72&10&29\\61&26&42&54&19&38&59&21&40\end{bmatrix}$$ 是一个 9 阶全对角线幻方.

定理 4 令 $d_3=5$, $d_4=3$, $d_5=4$, $d_6=7$, $d_7=8$, $d_{6k}=6k+2$, $2\leqslant k\leqslant t$, $d_{6k+2}=6k$, $1\leqslant k\leqslant t$,其余 $d_i=i$.若 $a_{ij}=d_{i+3j}$,其中 d_{i+3j} 的下标 $i+3j$ 是 $\bmod 6t+3$ 计算的,则 $A=(a_{ij})$ 是一个 $6t+3$ 阶自正交全对角线整数方.

证明 若 $d_{i+3j_1}=d_{i+3j_2}$,则 $i+3j_1=i+3j_2(\bmod 6t+3)$, $3j_1=3j_2+3k(2t+1)$, $j_1=j_2+k(2t+1)$, $k=0,1,2$,即每行为 $2t+1$ 个不同整数重复 3 次而成,又因 $0+5+7+9+14+\cdots+(6t-3)+(6t+2)=1+3+8+10+13+\cdots+(6t-2)+(6t+1)=2+4+6+11+12+\cdots+(6t-1)+6t$,故每行整数之和均相等.若 $d_{i_1+3j}=d_{i_2+3j}$,则 $i_1+3j=i_2+3j(\bmod 6t+3)$, $i_1=i_2$.若 $d_{i_1+3j_1}=d_{i_2+3j_2}$, $j_1-i_1=j_2-i_2(\bmod 6t+3)$,则 $\begin{cases}i_1+3j_1=i_2+3j_2\\j_1-i_1=j_2-i_2\end{cases}$, $4j_1=4j_2(\bmod 6t+3)$,因$(4,6t+3)=1$,故 $j_1=j_2$, $i_1=i_2$.若 $d_{i_1+3j_1}=d_{i_2+3j_2}$, $j_1+i_1=j_2+i_2(\bmod 6t+3)$,则 $\begin{cases}i_1+3j_1=i_2+3j_2\\j_1+i_1=j_2+i_2\end{cases}$, $2j_1=2j_2(\bmod 6t+3)$,因$(2,6t+3)=1$,故 $j_1=j_2$, $i_1=i_2$.从而 A 的每列,每条右对角线,每条左对角线都是 $0,1,\cdots,6t+2$ 的一个排列,A 是一个 $6t+3$ 阶全对角线整数方.因 $0\leqslant d_{i+3j}$, $d_{j+3i}\leqslant 6t+2$,故 $0\leqslant(6t+3)d_{i+3j}+d_{j+3i}\leqslant(6t+3)^2-1$.若

$$(6t+3)d_{i_1+3j_1}+d_{j_1+3i_1}=(6t+3)d_{i_2+3j_2}+d_{j_2+3i_2},$$

因 $0\leqslant d_{j_1+3i_1}$, $d_{j_2+3i_2}\leqslant 6t+2$,故

$$\begin{cases}d_{j_1+3i_1}=d_{j_2+3i_2}\\d_{i_1+3j_1}=d_{i_2+3j_2}\end{cases},\ \begin{cases}j_1+3i_1=j_2+3i_2\\i_1+3j_1=i_2+3j_2\end{cases},\ 8i_1=8i_2(\bmod 6t+3),$$

因$(8,6t+3)=1$,故 $j_1=j_2$, $i_1=i_2$.从而 A 是一个 $6t+3$ 阶自正交全对角线整数方.由定理 2 知 $C_{6t+3}=(6t+3)A+A'$ 是一个 $6t+3$ 阶全对角线幻方.

4 4*n* 阶全对角线幻方

本节给出了 4,8,12,24 阶全对角线幻方 C_4, C_8, C_{12}, C_{24}.

定理 5 全部 $4n$ 阶全对角线幻方可由 C_4, C_8, C_{12}, C_{24} 与 $C_{6t\pm1}$, C_{6t+3} 的乘积给出.

证明 设 $n=2^k$, $k=0$ 时,$C_{4n}=C_4$,$k=1$ 时,$C_{4n}=C_8$,设 $k=2t$, $t\geqslant1$,则 $C_{4n}=C_{4^{t+1}}$,设 $k=2t+1$, $t\geqslant1$,则 $C_{4n}=C_8C_{4^t}$.设 $n=3\times2^k$, $k=0$ 时,$C_{4n}=C_{12}$,$k=1$ 时, $C_{4n}=C_{24}$,设 $k=2t$, $t\geqslant1$,则 $C_{4n}=C_{12}C_{4^t}$,设 $k=2t+1$,$t\geqslant1$,则 $C_{4n}=C_{24}C_{4^t}$.设 $n=(2m+1)2^k$,$m\geqslant2$,则 $C_{4n}=C_{2^{k+2}}C_{2m+1}$, $2m+1=6t\pm1,6t+3$.

$$C_4=\begin{bmatrix}0&11&5&14\\7&12&2&9\\10&1&15&4\\13&6&8&3\end{bmatrix},\quad C_8=\begin{bmatrix}0&47&20&59&2&45&22&57\\28&51&8&39&30&49&10&37\\43&4&63&16&41&6&61&18\\55&24&35&12&53&26&33&14\\1&46&21&58&3&44&23&56\\29&50&9&38&31&48&11&36\\42&5&62&17&40&7&60&19\\54&25&34&13&52&27&32&15\end{bmatrix},$$

$$C_{12}=\begin{bmatrix}0&107&45&134&3&104&48&131&6&101&51&128\\63&116&18&89&66&113&21&86&69&110&24&83\\98&9&143&36&95&12&140&39&92&15&137&42\\125&54&80&27&122&57&77&30&119&60&74&33\\1&106&46&133&4&103&49&130&7&100&52&127\\64&115&19&88&67&112&22&85&70&109&25&82\\97&10&142&37&94&13&139&40&91&16&136&43\\124&55&79&28&121&58&76&31&118&61&73&34\\2&105&47&132&5&102&50&129&8&99&53&126\\65&114&20&87&68&111&23&84&71&108&26&81\\96&11&141&38&93&14&138&41&90&17&135&44\\123&56&78&29&120&59&75&32&117&62&72&35\end{bmatrix},$$

$$C_{24}=\begin{bmatrix}0&431&180&539&6&425&186&533&12&419&192&527&18&413&198&521&24&407&204&515&30&401&210&509\\252&467&72&359&258&461&78&353&264&455&84&347&270&449&90&341&276&443&96&335&282&437&102&329\\395&36&575&144&389&42&569&150&383&48&563&156&377&54&557&162&371&60&551&168&365&66&545&174\\503&216&323&108&497&222&317&114&491&228&311&120&485&234&305&126&479&240&299&132&473&246&293&138\\1&430&181&538&7&424&187&532&13&418&193&526&19&412&199&520&25&406&205&514&31&400&211&508\\253&466&73&358&259&460&79&352&265&454&85&346&271&448&91&340&277&442&97&334&283&436&103&328\\394&37&574&145&388&43&568&151&382&49&562&157&376&55&556&163&370&61&550&169&364&67&544&175\\502&217&322&109&496&223&316&115&490&229&310&121&484&235&304&127&478&241&298&133&472&247&292&139\\2&429&182&537&8&423&188&531&14&417&194&525&20&411&200&519&26&405&206&513&32&399&212&507\\254&465&74&357&260&459&80&351&266&453&86&345&272&447&92&339&278&441&98&333&284&435&104&327\\393&38&573&146&387&44&567&152&381&50&561&158&375&56&555&164&369&62&549&170&363&68&543&176\\501&218&321&110&495&224&315&116&489&230&309&122&483&236&303&128&477&242&297&134&471&248&291&140\\3&428&183&536&9&422&189&530&15&416&195&524&21&410&201&518&27&404&207&512&33&398&213&506\\255&464&75&356&261&458&81&350&267&452&87&344&273&446&93&338&279&440&99&332&285&434&105&326\\392&39&572&147&386&45&566&153&380&51&560&159&374&57&554&165&368&63&548&171&362&69&542&177\\500&219&320&111&494&225&314&117&488&231&308&123&482&237&302&129&476&243&296&135&470&249&290&141\\4&427&184&535&10&421&190&529&16&415&196&523&22&409&202&517&28&403&208&511&34&397&214&505\\256&463&76&355&262&457&82&349&268&451&88&343&274&445&94&337&280&439&100&331&286&433&106&325\\391&40&571&148&385&46&565&154&379&52&559&160&373&58&553&166&367&64&547&172&361&70&541&178\\499&220&319&112&493&226&313&118&487&232&307&124&481&238&301&130&475&244&295&136&469&250&289&142\\5&426&185&534&11&420&191&528&17&414&197&522&23&408&203&516&29&402&209&510&35&396&215&504\\257&462&77&354&263&456&83&348&269&450&89&342&275&444&95&336&281&438&101&330&287&432&107&324\\390&41&570&149&384&47&564&155&378&53&558&161&372&59&552&167&366&65&546&173&360&71&540&179\\498&221&318&113&492&227&312&119&486&233&306&125&480&239&300&131&474&245&294&137&468&251&288&143\end{bmatrix}$$

（下转第 42 页）

[参考文献]

[1] White S D M. The dynamics of rich clusters of galaxies[J]. Monthly Notes of Royal Astron Society, 1976, 177: 717—733.
[2] Burns J O, Roettiger K, Ledlow M, *et al*. The coma cluster after lunch: Has a galaxcy group passed through the cluster core[J]. Astrophys Journal, 1994, 427: L87.
[3] Colless Matthew, Dunn Andrew M. Structure and Dynamics of the Coma Cluster[J]. Astrophys Journal, 1996, 458: 435—454.
[4] Ashman Keith A, Bird Christina M, Zepf Stephen E. Detecting bimodality in astronomical datasets[J]. Astronomical Journal, 1994, 108(6): 2348—2361.
[5] Nemec J M, Nemec A F L. Mixture models for studying stellar populations. I-Univariate mixture models, parameter estimation, and the number of discrete population components[J]. Publications of Astronomical Society of Pacific, 1991, 103: 95—121.
[6] Ostrov Pablo, Geisler Doug, Forte Juan C. The metallicity gradient and distribution function of globular clusters around NGC 1399 [J]. Astronomical Journal, 1993, 105(5): 1762—1778.
[7] Lee Myung G, Geisler Doug. Metal abundances for a large sample of globular clusters in M87[J]. Astronomical Journal, 1993, 106 (2): 493—506.
[8] Fabian A C, Nulsen P E J, Canizares C R. Cooling flows in clusters of galaxies[J]. Nature, 1984, 310: 733—740.

Application of the KMM Algorithm on the Studies of Galaxy Clusters

Yan Pengfei[1], Ding Rong[2], Yuan Qirong[3]

(1. Department of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, 266042, Qingdao, China)
(2. Editorial Board of Journal of Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)
(3. School of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: The principal of the KMM algorithm was presented and applied to a nearby pair of galaxy clusters A399/A401. The membership for 215 galaxies in this system has been determined by the KMM algorithm. As a result, 127 galaxies are found to belong to A401, and 88 galaxies are in A399. It shows that the KMM algorithm is effective in the investigation of the dynamical evolution of galaxy clusters.

Key words: KMM algorithm, cluster of galaxies, member galaxies

[责任编辑: 丁蓉]

(上接第 35 页)

[参考文献]

[1] 徐承绪, 关虹. 自正交拉丁方存在性的一个简短证明[J]. 应用数学学报, 1993, (2): 185—190.
[2] 徐承绪, 卢准炜. Pandiagonal magic squares[J]. Lecture Notes in Computer Science, 1995, (959): 388—391.
[3] Hudson C B. On Pandiagonal magic squares of order $6t \pm 1$[J]. Math Mag, 1972, (45): 94—96.
[4] Maurice Kraitchik. Mathmatical Recreations[M]. New York: Dover Publications, INC, 175.
[5] Hedayat A. A comlete solution to the existence and nonexistence of Knut Vik designs and orthogonal Knut Vik designs[J]. J Combinatorial Theory(A), 1977, (22): 331—337.

The Existence of Pandiagonal Magic Squares

Xu Chengxu, Lu Zhunwei

(Taiyuan University of Technology, 030024, Taiyuan, China)

Abstract: This paper also gives the definition of quadratic integer squares alone with the product between them and replace of proving the existence of pandiagonal magic squares of orders mn by proving the existence of pandiagonal magic squares of orders m and n respectively. Then constructs the family of pandiagonal magic squares of all orders $n = 4 \times 2^k$ and $n = 12 \times 2^k$ ($k \geqslant 0$). Again, using the product of quadratic integer squares, constructs the family of pandiagonal magic squares of all orders $n \neq 2, 3, 4t+2$. It is well known that the magic square of order $n = 2$ does not exist and magic square of order $n = 3$ is unique and not a pandiagonal magic square. Note that Mr. Raynor has shown nonexistence of pandiagonal magic square of orders $n = 4t + 2$. Therefore, the existence problem of pandiagonal magic squares is completely solved.

Key words: integer square, quadratic integer square, product of quadratic integer square, self orthogonal pandiagonal integer square, pandiagonal magic square

[责任编辑: 陆炳新]