

加权 Moore-Penrose 逆的反序律

曹广喜

(河海大学商学院 210098 江苏 南京)

[摘要] 本文研究了矩阵积的加权 Moore-Penrose 逆的反序律,给出了 $(AB)_{MP}^+ = B_{NP}^+ A_{MN}^+$ 的若干充要条件,推广了以往的相关结果.

[关键词] 加权 Moore-Penrose 逆,反序律,矩阵积

[中图分类号] O241.6, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2004)04-0036-03

0 引言

设 $A \in C^{m \times n}$, M 和 N 分别是 m 和 n 阶正定阵.熟知 [1],存在唯一的 $X \in C^{n \times m}$ 满足矩阵方程组

$$(1) AXA = A \quad (2) XAX = X \quad (3M)(MAX)^* = MAX \quad (4N)(NXA)^* = NXA,$$

这个唯一的 X 称为 A 的加权 Moore-Penrose 逆,记作 A_{MN}^+ .

当 $M = I_m$, $N = I_n$ 时,加权 Moore-Penrose 逆 A_{MN}^+ 化为 Moore-Penrose 逆 A^+ .

近些年来几位作者研究了两个矩阵之积 AB 的 Moore-Penrose 逆的反序律^[1-3],文 [1] pp. 181 - 182, Exercises 53, 54 证明了下列结论:

$$\begin{aligned} (AB)^+ = B^+ A^+ &\Leftrightarrow \begin{cases} BB^+ A^* AB = A^* AB \\ A^+ ABB^* A^* = BB^* A^* \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R(A^* AB) \subset R(B) \\ R(BB^* A^*) \subset R(A^*) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow R(A^* ABB^*) = R(BB^* A^* A); \end{aligned}$$

文 [2] pp. 23 - 24, Theorem 1.4.2 证明了 $(AB)^+ = B^+ A^+ \Leftrightarrow A^* ABB^+$ 和 $BB^* A^+ A$ 均为 Hermite 阵.

设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C^{n \times p}$, M, N, P 分别是 m, n, p 阶正定阵.本文将推广上述结果,研究矩阵积 AB 的加权 Moore-Penrose 逆的反序律,给出

$$(AB)_{MP}^+ = B_{NP}^+ A_{MN}^+ \quad (1)$$

的若干充要条件.

本文采用文 [1] 或文 [4] 中关于矩阵广义逆与投影算子的记号.

引理 0.1^[1] $R(A_{MN}^+) = N^{-1} R(A^*)$, $N(A_{MN}^+) = M^{-1} N(A^*)$,

$$AA_{MN}^+ = P_{R(A), M^{-1} N(A^*)}, A_{MN}^+ A = P_{N^{-1} R(A^*), N(A)}.$$

引理 0.2 下列 8 个矩阵均是半正定阵:

$$\begin{aligned} &MAA_{MN}^+, A A_{MN}^+ M^{-1}, M - MA A_{MN}^+, M^{-1} - A A_{MN}^+ M^{-1}, \\ &NA_{MN}^+ A, A A_{MN}^+ AN^{-1}, N - NA_{MN}^+ A, N^{-1} - A A_{MN}^+ AN^{-1}. \end{aligned}$$

证明 因为 MAA_{MN}^+ 是 Hermite 阵,即 $(A A_{MN}^+)^* M = M A A_{MN}^+$,

以幂等阵 AA_{MN}^+ 右乘此式两边得 $MAA_{MN}^+ = (A A_{MN}^+)^* M A A_{MN}^+$,于是可见 MAA_{MN}^+ 为半正定阵.

其余 7 个矩阵的半正定性类似可证.

引理 0.3^[4] (a) $X \in A\{1, 3M\} \Leftrightarrow A^* MAX = A^* M$;

(b) $X \in A\{1, 4N\} \Leftrightarrow XAN^{-1} A^* = N^{-1} A^*$;

(c) 若 $X \in A\{1\}$ 则 $X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \text{rank } X = \text{rank } A$;

若 $X \in A\{2\}$ 则 $X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \text{rank } X = \text{rank } A$.

$$\text{引理 0.4}^{[4]} \quad X = A_{MN}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} A^* M A X = A^* M \\ X A N^{-1} A = N^{-1} A^* \\ \text{rank } X = \text{rank } A \end{cases}$$

证明 由引理 0.3 立得.

引理 0.5 (a)^[4] $\mathcal{N}(AB) = B^{(1)}[\mathcal{R}(B) \cap \mathcal{N}(A)] \oplus \mathcal{N}(B)$;

(b) $P_{T,S}L = T \cap [S + L]$.

证明 (b) 用(a)的结论 $\mathcal{N}(P_L P_{S^\perp, T^\perp}) = P_{S^\perp, T^\perp}^{(1)}[S^\perp \cap L^\perp] \oplus T^\perp = [S^\perp \cap L^\perp] \oplus T^\perp$,

所以 $P_{T,S}L = \mathcal{R}(P_{T,S}P_L) = \mathcal{N}(P_L P_{S^\perp, T^\perp})^\perp = (S^\perp \cap L^\perp)^\perp \cap T = T \cap (S + L)$.

1 主要结果

定理 1.1 设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C^{n \times p}$, M, N, P 分别是 m, n, p 阶正定阵 则

$$(AB)_{MP}^+ = B_{NP}^+ A_{MN}^+ \Leftrightarrow \begin{cases} BB_{NP}^+ N^{-1} A^* MAB = N^{-1} A^* MAB \\ A_{MN}^+ ABP^{-1} B^* A^* = BP^{-1} B^* A^* \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A^* MAB B_{NP}^+ \text{ 为 Hermite 阵} \\ A_{MN}^+ ABP^{-1} B^* \text{ 为 Hermite 阵} \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R}(BP^{-1} B^* A^* MA) = N^{-1} \mathcal{R}(A^* MA BP^{-1} B^*) \quad (6)$$

$$\text{或 } \mathcal{R}(A^* MA BP^{-1} B^*) = N \mathcal{R}(BP^{-1} B^* A^* MA) \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(N^{-1} A^* MAB) \subset \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{R}(NBP^{-1} B^* A^*) \subset \mathcal{R}(A^*) \end{cases} \quad (8)$$

$$(9)$$

证明 我们证明的路线是 (1) \Rightarrow (2) \wedge (3) \Rightarrow (4) \wedge (5) \Rightarrow (6) \wedge (7) \Rightarrow (8) \wedge (9) \Rightarrow (1).

据引理 0.4 ,

$$(1) \text{ 式成立} \Leftrightarrow \begin{cases} (AB)^* MAB B_{NP}^+ A_{MN}^+ = (AB)^* M \\ B_{NP}^+ A_{MN}^+ ABP^{-1} (AB)^* = P^{-1} (AB)^* \\ \text{rank } B_{NP}^+ A_{MN}^+ = \text{rank } AB \end{cases} \quad (10)$$

$$(11)$$

$$(12)$$

首先证明 (12) 必然成立. 这是因为 $\text{rank}(B_{NP}^+ A_{MN}^+) = \dim(B_{NP}^+ \mathcal{R}(A_{MN}^+)) = \text{rank}(B_{NP}^+ N^{-1} A^*) = \text{rank}(AN^{-1} (B_{NP}^+)^*) = \text{rank}(AN^{-1} NB) = \text{rank}(AB)$. 因此 (1) 式成立 \Leftrightarrow (10) 与 (11) 成立.

设 (10) 与 (11) 成立. 注意到 $A_{MN}^+ AN^{-1} A^* = N^{-1} A^*$ 故以 $AN^{-1} A^*$ 右乘 (10) 可得

$$B^* A^* MAB B_{NP}^+ N^{-1} A^* = B^* A^* MA N^{-1} A^* ,$$

即

$$B^* A^* MA (I - BB_{NP}^+) N^{-1} A^* = 0 .$$

又因为 $(I - BB_{NP}^+) N^{-1}$ 是正定阵 (引理 0.2) 故得 $B^* A^* MA (I - BB_{NP}^+) = 0$,

这等价于

$$(BB_{NP}^+)^* A^* MAB = A^* MAB .$$

以 $(BB_{NP}^+)^* = NBB_{NP}^+ N^{-1}$ 代入上式 即得 (2) .

注意到 $B^* NBB_{NP}^+ = B^* N$, 以 $B^* N$ 左乘 (11) 得 $B^* NA_{MN}^+ ABP^{-1} B^* A^* = B^* NBP^{-1} B^* A^*$,

即

$$B^* \mathcal{N}(I - A_{MN}^+ A) BP^{-1} B^* A^* = 0 .$$

因为 $\mathcal{N}(I - A_{MN}^+ A)$ 为半正定阵 (由引理 0.2) 故可得 $(I - A_{MN}^+ A) BP^{-1} B^* A^* = 0$,

此即 (3) .

今设 (2) 与 (3) 成立 将 (2) 改写为 $NBB_{NP}^+ N^{-1} A^* MAN^{-1} NB = A^* MAB$, 右乘 B_{NP}^+ , 并注意 NBB_{NP}^+ 为 Hermite 阵 , 可知

$$A^* MAB B_{NP}^+ = NBB_{NP}^+ N^{-1} A^* MAN^{-1} NBB_{NP}^+$$

为 Hermite (半正定) 阵 此为 (4) .

以 $(A_{MN}^+)^*$ 右乘 (3) , 可知

万方数据

$$BP^{-1}B^*A^*(A_{MN}^+)^*=A_{MN}^+ABP^{-1}B^*A^*(A_{MN}^+)^*$$

为 Hermite(半正定)阵,即 $A_{MN}^+ABP^{-1}B^*$ 为 Hermite(半正定)阵,此即为(5).

若(4)成立,即 $A^*MABB_{NP}^+=(BB_{NP}^+)^*A^*MA$,

则 $R(A^*MABP^{-1}B^*)=R(A^*MAB)=R(A^*MABB_{NP}^+)=R((BB_{NP}^+)^*A^*MA)=R((BB_{NP}^+)^*A^*)$
可见

$$R(A^*MABP^{-1}B^*)\subset R(A^*)\cap R((B_{NP}^+)^*)=R(A^*)\cap R(NB);$$

又 $R(A^*MABP^{-1}B^*)=(BB_{NP}^+)^*R(A^*)=P_{R(B),N^{-1}N(B^*)}^*R(A^*)=P_{R(NB),N(B^*)}R(A^*)=R(NB)\cap [N(B^*)+R(A^*)]\supset R(NB)\cap R(A^*)$.

所以

$$R(A^*MABP^{-1}B^*)=R(NB)\cap R(A^*).$$

同理,若(5)成立,即 $A_{MN}^+ABP^{-1}B^*=BP^{-1}B^*(A_{MN}^+A)^*$,则,

$R(BP^{-1}B^*A^*MA)=R(BP^{-1}B^*A^*)=R(BP^{-1}B^*A^*(A_{MN}^+)^*)=R(A_{MN}^+ABP^{-1}B^*)=R(B)\cap R(N^{-1}A^*)$,合并(13)与(14),得到(6)或(7).显然(6)蕴涵(8),(7)蕴涵(9).

(8)蕴涵(12)也是显然的.将(9)变形为 $R(BP^{-1}B^*A^*)\subset R(N^{-1}A^*)=R(A_{MN}^+A)$,从而可获得(3).

最后,我们要证明(2)与(3)蕴涵(10)与(11).

注意到 $BB_{NP}^+N^{-1}$ 为 Hermite 阵,将(2)两边取共轭转置,得到 $B^*A^*MABB_{NP}^+=B^*A^*MA$,

以 A_{MN}^+ 右乘此式,并注意 $A^*MAA_{MN}^+=A^*M$,即得(10).

以 B_{NP}^+ 左乘(3),注意到 $B_{NP}^+BP^{-1}B^*=P^{-1}B^*$,即得(11).定理证明完毕.

注:当 $M=I_m,N=I_n$ 时,本定理 1.1 的结果就是本文开头所说的文[1]与文[2]所证的结果.

用定理 1.1 中所用的论证方法,可以证明次之定理.

定理 1.2 设 $M_i,N_i(i=1,2,3)$ 是适当阶数的正定阵,则

$$(ABC)_{M_1N_3}^+=C_{M_3N_3}^+B_{M_2N_2}^+A_{M_1N_1}^+\Leftrightarrow \begin{cases} (ABC)^*M_1ABCC_{M_3N_3}^+B_{M_2N_2}^+N_1^{-1}A^*=(ABC)^*M_1AN_1^{-1}A^*, \\ C^*M_3B_{M_2N_2}^+A_{M_1N_1}^+ABCN_3^{-1}(ABC)^*=C^*M_3CN_3^{-1}(ABC)^*, \\ \text{rank } C^*M_3B_{M_2N_2}^+N_1^{-1}A^*=\text{rank } ABC. \end{cases}$$

感谢 本文的完成得到了南京师范大学数科院陈永林教授的悉心指导,在此表示衷心的感谢.

[参考文献]

[1] Ben-Israel A , Greville T N E. Generalized Inverses : Theory and Applications[M]. 2nd Edition , New York : Springer-Verlag , 2003.
[2] Campbell S L , Meyer C D. Generalized Inverses of Linear Transformations[M]. New York : Dover , 1991.
[3] Sun W , Wei Y. Inverse order rule for the weighted generalized inverse[J]. SIAM J Matrix Anal Appl , 1998 , 19 (3) : 772—775.
[4] 陈永林. 计算加权 MP 逆的递推与反逆推方法[J]. 南京师大学报(自然科学版) , 1986 , 9 (4) : 31—39.

Reverse Order Law of the Weighted Moore-Penrose Inverse

Cao Guangxi

(School of Business , Hohai University , 210098 , Nanjing , China)

Abstract : This paper studies the reverse order law of the weighted Moore-Penrose inverse of a matrix product. And we gave some sufficient and necessary conditions of $(AB)_{MP}^+=B_{NP}^+A_{MN}^+$. Our results extend the related ones.

Key words : weighted Moore-Penrose inverse , reverse order law , matrix product

[责任编辑 : 陆炳新]