

希尔波特变换法解调干涉条纹的相位

吕 捷

(南京财经大学信息工程学院 210003 江苏 南京)

[摘要] 叙述了希尔波特变换法解调相位的原理,提出了仅从一幅光载频干涉条纹获取物体表面的全部相位信息,再由最小二乘法原理,迭代出信息的相位,并讨论了条纹相位的算法,误差分析和测量面形的模拟应用。

[关键词] 希尔波特变换,条纹分析,干涉法,离散信号

[中图分类号] O433, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2004)04-0048-04

0 引言

利用光学干涉原理的物体面形检测技术具有非接触性、高精度和无破坏性的优点。利用干涉原理检测的各种方法最终都归结为对一系列静态或动态连续的实时干涉条纹图进行分析和计算,从测量的干涉条纹中提取相位信息。从条纹中提取相位的方法主要包括:外差干涉法^[1]、相位步进法^[2]和傅里叶变换法^[3]等。

希尔波特变换法在时间域的信号处理中已经得到广泛地应用。Hiroto Watanabe 提出了利用一维离散的希尔波特变换进行干涉相位的调制^[4]。本文提出了一种在空间域内,利用离散的希尔波特变换法解调干涉条纹相位的方法。从单一的干涉图样中提取出物体产生的条纹信号的正弦和余弦部分,正弦与余弦比值的反正切即为干涉相位,然后再由最小二乘法拟合物体表面信息。

1 原理

1.1 希尔波特变换的原理

函数 $f(t)$ 的希尔波特变换定义为: $F_H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t') dt'}{t' - t}$, 即

$$F_H(t) = \frac{-1}{\pi t} * f(t) \quad (1)$$

其中 $*$ 表示为卷积,对等式(1)进行傅里叶变换,我们得到 $F_H(t)$ 的频谱为:

$$\mathcal{A}[F_H(t)] = [j \operatorname{sgn}(\omega)] \cdot \mathcal{A}[f(t)] \quad (2)$$

其中 ω 为角频率, $\operatorname{sgn}(\omega)$ 为一个信号函数。假设干涉信号 $f(t) = A + B \cos(\omega_0 t)$ 根据等式(1)和(2)可以得到:

$$\mathcal{A}[F_H(t)] = j\pi B \delta(\omega - \omega_0) - j\pi B \delta(\omega + \omega_0),$$

其中 $\delta(\omega)$ 为 delta 函数。我们再对等式进行傅里叶逆变换可以得到: $\mathcal{F}[\mathcal{A}[F_H(t)]] = -B \sin(\omega_0 t)$ 。该式表明希尔波特变换使干涉信号的相位偏移了 $\pi/2$, 并且滤去了直流偏移成分。图 1 给出的是用 Matlab 模拟的图像,其中实线表示的是 $f(t) = 1.5 + 8 \cos(2\pi \times 50t)$ 图像,虚线表示的是经过希尔波特变换后的图像。

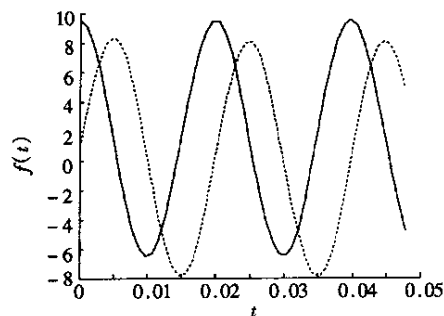


图 1 $f(t)$ 函数的希尔波特变换前后的图像

1.2 希尔波特变换用于离散的信号处理

我们考虑一个稳定的冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统, $x[n]$ 是一个实值序列(即干涉信号),在取

样周期 T 内,输出与输入过程可以写为: $s[n] = \sum_{k=(N-1)/2}^{-(N-1)/2} h_k \cdot x[n-k]$,其中 h_k 为采样脉冲,即为希尔波特变换的系数; N 为计算所用的数据点的个数; n 为计算 $s[n]$ 分布状态时在所有数据点中移动时的值。 $s[n]$ 为 $x[n]$ 的采样间隔为 k 的采样波形.由频谱卷积定理可以得出采样波形的傅里叶变换为:

$$S(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \quad (3)$$

其中 $S(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 分别表示为希尔波特变换信号和干涉信号的频谱.等式(3)中的 $H(\omega)$ 我们称之为传递函数,它可以写为:

$$H(\omega) = \sum_{k=(N-1)/2}^{-(N-1)/2} h_k \cdot e^{-jk\omega T} \quad (4)$$

从等式(4)我们可以把希尔波特变换的系数 h_k 写为:

$$h_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(\omega) \cdot e^{jk\omega T} d\omega \quad (5)$$

为了实现离散的希尔波特变换,通过等式(2)和等式(3)的比较,我们可以认为离散的希尔波特变换的传递函数为 $j\text{sgn}(\omega)$,那么把 $j\text{sgn}(\omega)$ 代入等式(5)中的 $H(\omega)$,可以得到:

$$\begin{aligned} h_k &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} H(\omega) e^{jk\omega T} d\omega = \frac{T}{2\pi} \left[\int_{-\pi/T}^0 -j e^{jk\omega T} d\omega + \int_0^{\pi/T} j e^{jk\omega T} d\omega \right] \\ &= \begin{cases} 0, & k \text{ 奇数} \\ -2/k\pi, & k \text{ 偶数} \end{cases} \quad -\infty < k < \infty \end{aligned} \quad (6)$$

需要注意的是,我们在进行采样时,必须满足采样频率等于或高于 Nyquist 采样频率,即采样频率 $1/T \geq 2f_c$,其中 f_c 是连续函数 $f(t)$ 的傅里叶变换的最高频率.

1.3 离散的高通滤波

下面我们采用离散的高通滤波方法移去直流偏移成分,然后抽取余弦成分.用离散高通滤波方法的处理过程与离散希尔波特变换方法相同,仅仅是系数不同.我们把通过高通滤波器的信号记为:

$$d[n] = \sum_{k=(N-1)/2}^{-(N-1)/2} p_k \cdot x[n-k] \quad (7)$$

其中 p_k 为离散高通滤波系数.同等式(4)一样,我们可以得到:

$$P(\omega) = \sum_{k=(N-1)/2}^{-(N-1)/2} p_k \cdot e^{-jk\omega T} \quad (8)$$

最后我们可以从测得的 $s[n]$ 和 $d[n]$ 得到干涉相位,即:

$$\phi = \tan^{-1}(-s[n]/d[n]) \quad (9)$$

2 数据分析和模拟

我们把调制的条纹图像光强表达式写为:

$$I(x, y) = a + b \cos[\phi(x, y) + \Delta\phi(x, y)] \quad (10)$$

式中 a 为背景光强, b 为振幅, $\Delta\phi(x, y)$ 为所求相位信息, $\phi(x, y)$ 是光载频引入的辅助相位.载频条纹沿 y 方向有最简单形式 $\phi(x, y) = 2\pi fx$ (式中 f 为光载频条纹在 x 方向的空间频率),由条纹光强的频谱分析可知, $a(x, y)$ 和 $\phi(x, y)$ 的空间变化率比空间频率 f 变化慢得多.因此,在采样周期 T_j 内,背景光强、振幅和相位可看成不变,即 $a(x, y) = a_j$, $b(x, y) = b_j$, $\phi(x, y) = \phi_j$,则对应一周期 T_j 内和干涉条纹强度分布可以写为 $I_j = a_j + b_j \cos(2\pi x + \phi_j)$.因而以载频条纹信号作基准,测量被面形调制后得到的条纹相位信号,就可以算出面形的相位分布.

为了验证算法,我们用计算机来模拟相位的抽取.我们设纯载频区域的条纹信号为余弦波,其强度分布函数为: $I(x) = 20 + 20 \cos(2\pi \times 120 \times x/512)$,附加相位为: $\Delta\phi(x) = 0.000\,000\,001 \times \{256 \times 256 - [(x - 256) \times (x - 256) + 125]\}$,那么对应一个周期内的干涉条纹强度分布可写为: $I(x) = 20 + 20 \cos(2\pi \times 120 \times x/512 + \Delta\phi(x))$.图2和图3分别给出了调制后的干涉条纹图和沿中心载面的条纹强度分布.

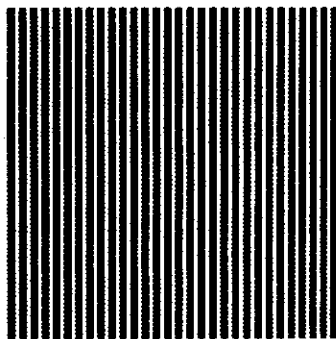


图 2 光载频调制的干涉条纹图

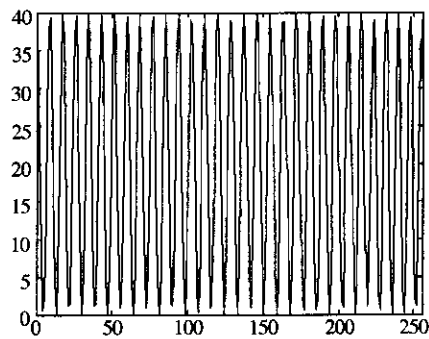


图 3 沿中心载面的条纹强度分布

我们采用上述的方法对调制后的信号进行处理. 第一步对调制信号作希尔波特变换, 抽取信号的正弦成分, 并去掉直流偏移项; 第二步对调制信号作高通滤波得到信号的正弦成分; 第三步利用等式(9)计算相位; 第四步利用已有的相位展开算法进行相位展开, 最后把载频条纹信号的相位分布和调制后的条纹信号比较, 从而得到调制信号, 即附加相位. 图 4 是对调制后的条纹信号采用希尔波特变换处理后, 得到的附加相位波形图和原有的附加相位波形图. 图中虚线表示的是原来的波形图, 实线表示的是对调制后的条纹图像处理后得到的波形图. 解调得到的附加相位与标准相位的误差在 $9.699\,3 \times 10^{-9} \sim 9.719\,1 \times 10^{-13}$ rad, 其误差均方根为 $7.185\,6 \times 10^{-19}$ rad.

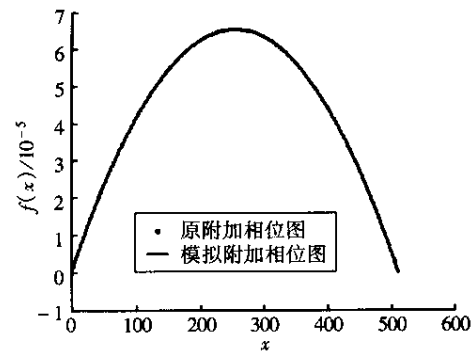


图 4 附加相位原图与对调制条纹处理后得到的附加相位图

3 误差分析和修正

3.1 截断误差

我们在处理采样波形的无穷多个样本值的方法是进行截断, 使之仅有有限的样本点(N 点). 虽然截断的傅里叶级数就其误差平方积分最小而言属于最优, 但它往往在 $G^*(\omega)$ 呈现陡变的各点附近有过大的波纹, 因此我们采用加宽过滤带来减小波纹. 一种良好且易于采用的窗就是哈明窗(Hamming Window). 因而我们用修正的系数 h_{km} 来代替等式(6)中的系数 h_k :

$$h_{km} = \frac{1}{2} \left(1.08 + 0.92 \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \cdot h_k \tag{11}$$

同样我们采用汉宁窗(Hanning Window)对离散高通滤波系数 p_k 进行修正, 即:

$$p_{km} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi k}{N} \right) \cdot p_k \tag{12}$$

3.2 频漂误差

在离散情况下, 采样频率依赖于离散的空间频率, 但不可能始终等于空间频率 f , 通常采样频率 n/N 为奈奎斯特基频的 $1/N$ 的整数倍, 而条纹信号的空间频率 f 不等于采样频率, 因此我们可以把频率 f 写为: $f = (n_f + \Delta n)/N$, 其中 n_f 为整数, 且近似为 n , $-1/2 < \Delta n < 1/2$. 把 f 代入光强表达式(10)得到:

$$I(x) = a + b \cos[2\pi(n_f + \Delta n)x + \Delta\phi(x)]$$

希尔波特变换器的单位抽样响应为 $h(n)$, 根据连续信号的希尔波特变换的性质不难得到离散时间信号 $I_j(n)$ 的希尔波特变换是:

$$\hat{I}_j(n) = I_j(n) * h(n) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I(n-2m-1)}{2m+1}.$$

离散时间信号的傅里叶变换可以写为:

$$H(n/NT) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \exp(-2\pi i k n / N).$$

运用上面阐述的方法可求出相位为: $\phi = \arctan \frac{\sin(\pi\Delta n + \Delta\phi) \sin(\pi\Delta n)}{\cos(\pi\Delta n + \Delta\phi) \sin(\pi\Delta n)} = \pi\Delta n + \Delta\phi$, 当 $\Delta n = 0.01$ 时, 产生最大相位误差为 $\pi/100$.

4 计算机模拟及讨论

下面我们用计算机模拟球面镜的面形分析,球面镜表面方程为 $z = c \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}$,其中球面镜的直径为 25.6 mm, $c = 0.000\,000\,01$, $c_1 = 12.8$ mm, $c_2 = 12.8$ mm.按照上述方法提取表面面形与标准方程产生的面形进行比较,如图 5 和图 6 所示.通过比较得到球面镜表面的面形偏差,两个面形之间的差距在 $1.069\,5 \times 10^{-8} \sim 4.770\,1 \times 10^{-7}$ m,其误差均方根为 $0.655\,9\,\mu\text{m}$.从计算机模拟的结果显示,该方法适用于从干涉条纹中提取相位信息,得到较为准确的重建结果.

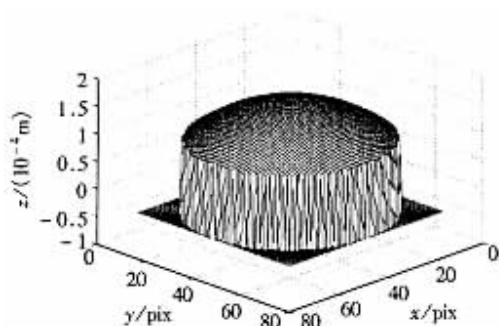


图 5 球面镜表面方程的面形图

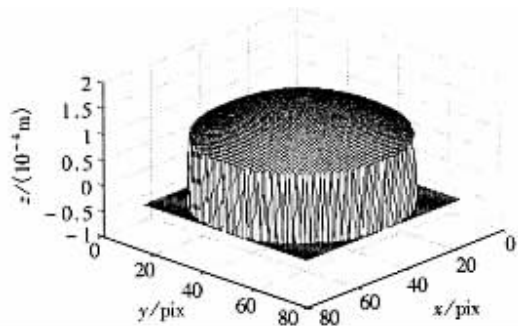


图 6 希尔伯特变换法求解得到的球面镜表面的面形图

5 结论

本文提出了一种利用希尔伯特变换进行条纹相位处理的新方法,并用这种方法对球面镜进行面形的模拟测量.这种检测球面镜的方法简单,并且只需从一幅条纹图像中提取全部信息.由计算可知,这种方法可获得精度为 $\lambda/10$ 的测量结果.

[参考文献]

- [1] Massie N A, Nelson R D, Holly S. High-performance real-time heterodyne interferometry[J]. Appl Opt, 1979, 18(11):1797—1803.
- [2] Ishii Y, Chen J, Murata K. Digital phase-measuring interferometry with a tunable laser diode[J]. Opt Lett, 1987, 12(4):233—235.
- [3] Takeda M, Ina H, Kobayashi S. Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry[J]. J Opt Soc Am, 1982, 72(1):156—160.
- [4] Hiroto Watanabe, Onodera Ribun, Ishii Yukihiro. Demodulation technique for interferometric phase with a one-dimensional discrete Hilbert transform[J]. Proceedings of SPIE 2002 4919:376—383.

Interferometric Fringe Analysis with Discrete Hilbert Transform

Lü Jie

(School of Information Engineering, Nanjing Economical University, 210003, Nanjing, China)

Abstract Hilbert transform is described for which the phase information of object's surface is evaluated only one interferogram. Then the precision iteration to estimate the phase can be developed from the principle of least-squares estimation. In addition, the phase-extraction algorithm, error correction and some applications to the measurement of the surface shape are discussed.

Key words Hilbert transform, fringe analysis, interferometry, discrete signal

[责任编辑:丁蓉]