某些左 S-系之间关系的刻划

魏加群

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 设 S 是一个幺半群. 本文证明了所有正则左 S- 系是挠自由的当且仅当对每个元 $e^2 = e \in S$ 和每个 S 中的左消元 r,必存在元 $t \in S$,使得 $tre = e$,从而改进了文献[4] 的一个结果.

[关键词] 左 S- 系,挠自由,条件(E),正则

[中图分类号] O153, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2005)01-0008-03

Characterizations of Relations Between Some Left S-Acts

Wei Jiaqun

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: Let S be a monoid. We prove that all regular left S-acts are torsion free iff, for every $e^2 = e \in S$ and every left cancelable element $r \in S$, there is a $t \in S$ such that $tre = e$. This improves a result in [4].

Key words: left S-act, torsion free, the condition (E), regular

0 引言

在半群的 S- 系理论中,对于具有某些性质的所有半群满足另一性质的半群的刻划占有很重要的作用,这方面的工作如[9—17] 等. 本文继续了这方面的研究,主要考虑了挠自由左 S- 系和满足条件(E) 的左 S- 系以及正则左 S- 系相互之间的联系和刻划问题. 其中定理 1 证明了所有正则左 S- 系是挠自由的当且仅当对每个元 $e^2 = e \in S$ 和每个 S 中的左消元 r,必存在元 $t \in S$,使得 $tre = e$,从而改进了文献[4] 的一个结果. 定理 2 和定理 3 分别给出了所有满足条件(E) 的左 S- 系是挠自由的以及所有挠自由左 S- 系满足条件(E) 的幺半群的刻划.

1 结果及证明

设 S 是一个幺半群,A 是一个集合,S 从左边作用于 A,若满足 $(st)a = s(ta)$, $1a = a$, $a \in A$, $s, t \in S$,其中 1 是 S 的单位元,则称 A 是一个左 S- 系(left S-act).

设 A 是一个左 S- 系. 称 A 是强平坦的(strongly flat) 是指 A 满足条件(P) 和(E):

(P) 若 $sa = tb$, $s, t \in S$, $a, b \in A$, 则存在 $u, v \in S$, $c \in A$, 使得 $su = tv$, $a = uc$, $b = vc$.

(E) 若 $sa = ta$, $s, t \in S$, $a \in A$,则存在 $u \in S$,使得 $su = tu$, $a = ub$.

如果函子 $- \otimes A$ 保持所有单同态,则称 A 是平坦的(flat).

如果函子 $- \otimes A$ 保持 S 的右理想作为一个右 S- 系到 S 的嵌入,则称 A 是弱平坦的(weakly flat).

若对任意 $sa = sb$,其中 $a, b \in A$, s 是 S 中的左消元,必有 $a = b$,则称 A 为挠自由的(torsion free).

设 $a \in A$. 若存在一个同态 $f: Sa \to S$,使得 $f(a)a = a$,则称 a 是正则的. 若 A 中的每一个元都是正则的,则称 A 是正则的(regular).

若 $A \simeq \coprod Se_i$, $e_i^2 = e_i \in S$, $i \in I$,则称 A 为投射左 S- 系.

收稿日期:2004-06-28.

作者简介:魏加群,1974—,副教授,博士,主要从事群论的教学与研究. E-mail:weijiaqun@ njnu. edu. cn

我们已经知道在上述左 S- 系是不同的,并且它们之间有如下关系(详见文献[8,4]):A 是投射左 S- 系 $\Rightarrow A$ 是强平坦左 S- 系 $\Rightarrow A$ 满足条件(P) $\Rightarrow A$ 是平坦左 S- 系 $\Rightarrow A$ 是弱平坦左 S- 系 $\Rightarrow A$ 是挠自由的左 S- 系.

引理 1[5] 设 $a \in A$,下列条件等价.

(1) a 是正则的.

(2) 存在 $e^2 = e \in S$ 使得 $ea = a$ 且由 $ra = pa$ 可得到 $re = pe$,$r,p \in S$.

(3) Sa 是一个投射左 S- 系.

由一个元生成的左 S- 系称为循环(cyclic) 左 S- 系.

引理 2[8] 每个满足条件(E) 的循环左 S- 系是强平坦的.

命题 1 若 A 是正则左 S- 系, 则 A 满足条件(E).

证明 设 $sa = ta$,其中 $s,t \in S$,$a \in A$. 因为 A 是正则的,故由引理 1 可知存在 $e^2 = e \in S$,使得 $ea = a$,且由 $sa = ta$ 可得到 $se = te$. 令 $u = e$,$b = a$,则有 $su = tu$ 和 $a = ub$. 因此由定义可知 A 满足条件(E). 证毕.

文献[4] 证明了如下结果:所有正则左系是挠自由的当且仅当对每个元 $e \in T$,其中 T 是 S 中的所有幂等元组成的集合,每个元 $u \in S$ 和每个左消元 $r \in S$,必存在元 $t \in S$,使得 $true = ue$. 实际上我们还可以有更直接一些的结果.

定理 1 下列条件等价:

(1) 所有正则左 S- 系是挠自由的.

(2) 对每个 $e^2 = e \in S$ 以及每个 S 中的左消元 $r \in S$,必存在 $t \in S$,使得 $tre = e$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由文献[4],对每个元 $e^2 = e \in S$,每个元 $u \in S$ 和每个左消元 $r \in S$,必存在元 $t \in S$,使得 $true = ue$. 因 S 是幺半群,故可取 $u = 1$,此时易见结论(2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (1) 令 A 是任意一个正则左 S- 系. 设 $ra = rb$,其中 $a,b \in A$,r 是 S 中的左消去元. 由文献[5] 可知,存在同构 $f:Sa \to Se$, 使得 $f(a) = e \in S$,$e^2 = e$. 由(2) 的假设知,对 e 和 r,存在 $t \in S$,使得 $tre = e$. 故有 $a = f^{-1}(e) = f^{-1}(tre) = trf^{-1}(e) = tra = trb \in Sb$. 因 Sb 是挠自由的(同构于 S 的一个左理想),故得 $a = b$. (证毕)

定理 2 下列条件等价:

(1) 所有满足条件(E) 的左 S- 系是挠自由的.

(2) 所有左 S- 系是挠自由的.

(3) 对任意左消去元 $r \in S$,存在 $t \in S$,使 $tr = 1$.

证明 由文献[8] 可知(3) $\Rightarrow$ (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (1) 显然.

(1) $\Rightarrow$ (3) 用反证法. 设存在左消去元 $r \in S$ 是使得 $J = Sr$ 严格包含在 S 中的. 我们构造如下的左 S- 系 $A(J)$ 设 $x,y,z \notin S$. 令 S_J 为 S 中所有不在 J 中的元的集合,由反证假设可知 S_J 不空.

定义 $A(J) = \{x,y\} \times S_J \cup \{z\} \times J$. 定义 S, $A(J)$ 的左乘运算如下:

$s(w,u) = (w,su)$,若 $su \notin J$. 否则定义 $s(w,u) = (z,su)$. 其中 $w = \{x,y\}$.

$s(z,u) = (z,su)$,对任意 $s \in S$.

则由定义直接验证可知,$A(J)$ 满足条件(E). 故由(1) 条件可得 $A(J)$ 是挠自由的. 因为 $r(x,1) = (z,r) = r(y,1)$,故根据挠自由的定义,可得$(x,1) = (y,1)$. 但这显然是与我们的构造相矛盾的. 故 $Sr = S$. 从而存在 $t \in S$,使 $tr = 1$. 证毕.

文献[6] 证明了所有满足条件(E) 的左 S- 系是平坦的当且仅当 S 是 Von Neumann 正则的,但是所有平坦的左 S- 系满足条件(E) 的刻划问题并没有解决. 这里我们得到这个命题的一个充分条件和一个必要条件,而这两个条件是十分接近的.

命题 2 若 S 中每个异于 1 的元都是左零的,则所有弱平坦左 S- 系满足条件(E).

证明 由文献[7] 可知此时所有弱平坦左 S- 系都是正则的. 再由命题 1 可得所有弱平坦左 S 系满足(E). 证毕.

推论1　若 S 中每个异于1的元都是左零的,则所有平坦左 S-系满足条件(E).

命题3　若所有平坦左 S-系满足条件(E),则 S 是左幂零的.

证明　由假设所有平坦左 S-系满足条件(E),故所有循环平坦左 S-系满足条件(E). 又由引理2可知每个满足(E)循环左 S-系是强平坦的,故此时所有循环平坦左 S-系是强平坦的. 由文献[5], S 是左幂零的. 证毕.

由上面的结论,人们很容易联想到这样一个问题,即: S 是左幂零的是否就是所有平坦左 S-系满足条件(E)的充要条件?这个问题至今为止还没有一个明确的答案.

下面的定理刻划了所有挠自由左 S-系满足条件(E)的幺半群.

定理3　下列命题等价:

(1) 所有挠自由左 S-系满足条件(E).

(2) 所有左 S-系满足条件(E).

(3) $S = \{1\}$ 或 $\{0,1\}$.

证明　(2) ⇒ (1) 显然.

(3) ⇒ (2) 令 A 是任一左 S-系. 设 $sa = ta$,其中 $s,t \in S$, $a \in A$. 由(3)假设, $S = \{1\}$ 或 $\{0,1\}$. 故若 $s = t$,则令 $u = 1$. 则由定义可知 A 满足条件(E). 若 $s \neq t$,不妨设 $s = 0$, $t = 1$,则有 $a = ta = sa = 0$. 令 $u = 0$. 则同样由定义可知 A 满足条件(E).

(1) ⇒ (3) 由(1)假设,所有挠自由左 S-系满足条件(E). 故所有循环挠自由左 S-系满足条件(E). 由引理2,每个循环挠自由左 S-系是强平坦的. 故由文献[3]可知 $S = \{1\}$ 或 $\{0,1\}$. 证毕.

[参考文献]

[1] Fountain J, Right P P. Monoids with central idempotentes[J]. Semigroup Forum, 1977, 13(3): 229—237.

[2] Howie J M. An introduction to semigroup theory[M]. London, New York: Harcourt Brace Jovanovich, 1976.

[3] Knauer U. Characterization of monids by properties of finitely generated right acts and their right ideals[C]. Springer, Berlin: Lecture Notes in Math. 1983, 998: 310—332.

[4] Kilp M, Knauer U. Characterization of monoids by properties of regular acts[J]. J Pure Appl Alg, 1987, 46(2—3): 217—231.

[5] Knauer U, Mikhalev A. Wreath products of acts over monoid, I regular and inverse acts[J]. J Pure Appl Alg, 1988, 51(3): 251—260.

[6] Liu Zhongkui. A characterization of regular monoids by flatness of left acts[J]. Semigroup Forum, 1993, 46(1): 85—89.

[7] Liu Zhongkui. Monoids over which all flat left acts are regular[J]. J Pure Appl Alg, 1996, 111(1—3): 199—203.

[8] Normak P. On equlizer-flat and pullback-flat acts[J]. Semigroup Forum, 1987, 36(3): 293—313.

[9] Wei Jiaqun. On a question of Kilp and Knauer[J]. Comm Algebra, 2004, 32(6): 2269—2272.

[10] Kilp M. When principally weakly flat acts satisfy condition PWP[J]. Semigroup Forum, 2003, 63(3): 454—463.

[11] Qiao Husheng. Strong flatness properties of right S-acts satisfying condition P[J]. Comm Algebra, 2002, 30(9): 4321—4330.

[12] Renshaw. James Monoids for which condition P acts are projective[J]. Semigroup Forum, 2000, 61(1): 45—56.

[13] Laan Valdis. When torsion free acts are principally weakly flat[J]. Semigroup Forum, 2000, 60(2): 321—325.

[14] Kilp Mati, Laan Valdis. On flatness properties of cyclic acts[J]. Comm Algebra, 2000, 28(6): 2919—2926.

[15] Renshaw James. Golchin, Akbar Flat acts that satisfy condition P[J]. Semigroup Forum, 1999, 59(2): 295—309.

[16] Bulman-Fleming, Sydney Kilp. Mati Flatness properties of acts: some examples[J]. Semigroup Forum, 1997, 55(2): 167—176.

[17] Golchin Akbar Renshaw. James Periodic monoids over which all flat cyclic right acts satisfy condition P[J]. Semigroup Forum, 1997, 54(2): 261—263.

[责任编辑:陆炳新]