第 28 卷第 1 期
2005 年

南京师大学报(自然科学版)
JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science)

Vol. 28 No. 1
2005

不含相邻三角形平面图的 4-可选色问题

袁兰兰[1,2], 周兴和[1]

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)
(2. 盐城师范学院数学系,224002,江苏,盐城)

[摘要] 设 k 为正整数,G 为图. 我们给 G 每个顶点一个长为 k 的任意表,如果存在一个顶点着色,使得每个顶点都可从表中得到一种颜色,则称 G 为 k-可选色的. 本文中证明了不含相邻三角形并且四面和三面不相邻的平面图是 4-可选色的.

[关键词] 选色,平面图,三角形

[中图分类号] Q157.5, [文献标识码] A, [文章编号] 1001-4616(2005)01-0019-05

The 4-Choossability of Some Plane Graphs Without Adjacent Triangles

Yuan Lanlan[1,2], Zhou Xinghe[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)
(2. Department of Mathematics, Yancheng Teacher's College, 224002, Yancheng, China)

Abstract: Let k be a positive integer. A graph G is called k-choosable if for given lists of k colors to each vertex of G there is a vertex coloring of G such that each vertex receives a color from its own list no matter what the lists are. In this paper, it is shown that each plane graph that contains neither adjacent triangles nor adjacent 4-faces and 3-faces is 4-choosable.

Key words: choosable, plane graph, triangle

1 基本定义

本文只考虑简单有限平面图. 凡本文未定义的概念与记号均见[1].

设 $G=(V,E,F)$ 为平面图. G 的顶点,边,面的集合分别记作 V,E,F. 顶点 v 的度数记做 $d(v)$. 图 G 的最小度记作 $\delta(G)$,或简记为 δ. 图 G 中与 v 相邻的顶点的集合记作 $N_G(v)$. 如果 $d(v)=k$ 或 $d(v)\geqslant k$ 则称顶点 v 为 k- 或 k^+ - 点. 同理 k- 或 k^+ - 面记度数为 k 或至少为 k 的面 f. 一个面与边界上所有的点与面相关. 两面共享一边 e,则称它们在 e 边相邻. 面 f 的度数即与它相关的边的个数记作 $d(f)$. 割边计算两次.

如果 G 中每个顶点都可从其给定列表 $L(v)$ 中得到一种颜色,并且相邻两顶点着不同色,则称 G 为 $L(G)$ 着色,或 $L(G)$ 为 G 的列表着色. 如果 G 的每个列表恰好有 k 种颜色,则其也为 k- 可选色的.

设 $G=(V,E)$ 为图,不一定为平面图. 令 $f,g: V\to \mathbf{N}$,$\mathbf{N}$ 为正整数. 如果任给 $v\in V$ 一个颜色集 $A(v)$,$|A(v)|=f(v)$,我们能够选一子集 $B(v)\subseteq A(v)$,$|B(v)|=g(v)$,使得 $B(u)\cap B(v)=\varnothing$,$uv\in G$,则称 G 是 (f,g) - 可选色的[2]. 如果 $f'(v)\geqslant f(v)$,$v\in V$,那么 (f,g) - 可选色的也是 (f',g) - 可选色的. 如果 G 是 (f,g) - 可选色的,f 与 g 为连续映射且 $f(v)=x$,$g(v)=y$,$v\in V$,则 G 也是 (x,y) - 可选色的. $(k,1)$ - 可选色的简称为 k- 可选色的. 已经证明了不含 i- 圈 $(i\in 3,4,5,6)$ 的平面图是 4- 可选色的[4,5],不含相交三角形的平面图是 4- 可选色的[5-7].

本文证明了不含相邻三角形并且四面和三面不相邻的平面图是 4- 可选色的.

收稿日期: 2004-09-01.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371055)和江苏省教育厅自然科学基金资助项目(04KJD110217).
作者简介: 袁兰兰,女,1978—,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,主要从事图论的学习与研究. E-mail: dearlanlan@126.com
通讯联系人: 周兴和,1950—,教授,主要从事图论的教学与研究. E-mail: xhzhou@njnu.edu.cn

2 构造一些平面图

$G_1, G_2, \cdots, G_6$ 为图 1 中所示的图. G_i 中黑色的点称之为黑点,其余的点称之为白点 $1 \leqslant i \leqslant 6$. Fig. 1 中图的集合记做 $\mathscr{G}$.

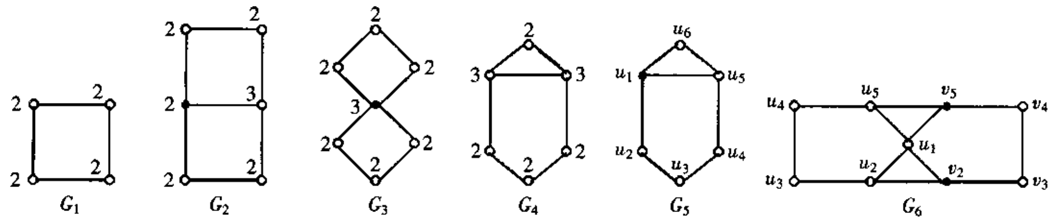

图 1

设 G 为镶嵌在特征值为正的面上的图. S 为 G 的面子集. 如果 H 由 S 和与 S 相关的顶点与面构成,称 H 为 G 中由 S 生成的面导出子图. 如果 G 的面导出子图 F 同构于 $H \in \mathscr{G}$ 使得其满足(1) F 中每个对应于 H 的白点在 G 中为 4 度点,(2) F 中每个对应于 H 的黑点在 G 中为 5 度点,则 F 为 $\mathscr{G}$- 子图. 令 f_i 为定义在 $v(G_i)$ 上的整数映射 $1 \leqslant i \leqslant 4$,其值如图 1 所示.

定理 2.1 设 $G = (V, E, F)$ 为平面图. 如果 G 不含相邻三角形, $\delta \geqslant 4$ 且四面与三面不相邻,则 G 含 $\mathscr{G}$- 子图.

在下面证明中,将恰与 i 个三角形相关的 4- 或 5- 度点称为 4^{3i}- 或 5^{3i}- 点, $i = 1, 2$,且将不与三角形相关的 4- 或 5- 度点称为 4^{-3}- 或 5^{-3}- 点. 如果 4- 面 f 与一个 5- 度点和三个 4- 度点相关,则称 f 为坏的. 如果 5- 面 f 与一个 5- 度点四个 4- 度点和五个三角形相关,则称 f 为坏的.

证明 给 G 的顶点和面赋值,顶点的赋值方法是 $w(v) = 2d(v) - 6$, $v \in V$,面的赋值方法是 $w(f) = d(f) - 6$, $f \in F$. 根据欧拉公式,得到 $\sum_{x \in V \cup F} w(x) = -12$. 现在我们重新分配顶点与面之间的值,得到一新的赋值 w^* 保持 $\sum_{x \in V \cup F} w^*(x) = -12$. 令 F^* 为 F 的子集,由 $\mathscr{G}$- 子图构成. 如果我们能定义一种传递点面之间值的方式使得 $\sum_{x \in V \cup F \setminus F^*} w^*(x) \geqslant 0$, $F \neq \varnothing$,那么我们得到 $F^* \neq \varnothing$,这样就完成了定理的证明. 点面之间值的传递方式如下:

(R_1) 从 6^+- 点传递值 1 给每个与它相关的面;

(R_2) 从 5^{-3}- 点传递给相关的面 f:

($R_{2.1}$) 如果 f 是坏的 4- 面,传递值 1;

($R_{2.2}$) 其它传递值 $\frac{3}{4}$;

(R_3) 从 5^{31}- 点传递给相关的面 f:

($R_{3.1}$) 如果 f 是三角形或坏的 4- 面,传递值 1;

($R_{3.2}$) 其它传递值 $\frac{2}{3}$;

(R_4) 从 5^{32}- 点传递给相关的面 f:

($R_{4.1}$) 如果 f 是三角形或坏的 5 - 面,传递值 1;

($R_{4.2}$) 其它传递值 $\frac{1}{2}$;(当 5^{32}- 点与一个坏的 5- 面相关)

($R_{4.1}$)′ 如果 f 是三角形,传递值 1;

($R_{4.2}$)′ 其它传递值 $\frac{2}{3}$;(当 5^{32}- 点不与坏的 5- 面相关)

(R_5) 从 4^{-3}- 点传递值 $\frac{1}{2}$ 给每个与它相关的面;

(R_6) 从 4^{31}- 点传递给相关的面 f:

($R_{6.1}$) 如果 f 是三角形,传递值 1;

($R_{6.2}$)其它传递值$\frac{1}{3}$;

(R_7)从4^{32}-点传递值1给每个与它相关的三角形.

首先,由于我们只考虑$V\cup F\backslash F^*$,因此先给出下面的事实:

O_1:5^{-3}-或5^{31}-点至多与一个坏的4-面相关;

O_2:5^{32}-点至多与一个坏的5-面相关;

O_3:4^{32}-或5^{32}-点不与四面相关.

设v是6^+-点,则由R_1,$w^*(v)\geqslant w(v)-k=2k-6-k\geqslant 0$.

设v是5-点. O如果v是5^{-3}-点,则由O_1和R_2,$w^*(v)\geqslant w(v)-1-4\cdot\frac{3}{4}=0$. 如果$v$是$5^{31}$-点,则由$O_1$和$R_3$,$w^*(v)\geqslant w(v)-2\cdot 1-3\cdot\frac{2}{3}=0$. 如果$v$是$5^{32}$-点,则由$O_2$,$O_3$和$R_4$,当$v$与一个坏的5-面相关时$w^*(v)\geqslant w(v)-3\cdot 1-2\cdot\frac{1}{2}=0$,当$v$不与坏的5-面相关时$w^*(v)\geqslant w(v)-2\cdot 1-3\cdot\frac{2}{3}=0$.

设v是4-点. 如果v是4^{-3}-点,则由R_5,$w^*(v)=w(v)-4\cdot\frac{1}{2}=0$. 如果$v$是$4^{31}$-点,则由$R_6$,$w^*(v)=w(v)-1-3\cdot\frac{1}{3}=0$. 如果$v$是$4^{32}$-点,则由$O_3$和$R_7$,$w^*(v)=w(v)-2=0$.

设f是6^+-面,则$w^*(f)=w(f)\geqslant 0$.

设f是3-面,则每个与f相关的点传递值1给它,$w^*(f)=w(f)+3=0$.

设f是4-面. 如果f恰与一个5^+-点和三个4-点相关,则由O_3,$w^*(f)\geqslant w(f)+1+3\cdot\frac{1}{3}=0$. 如果$f$至少与两个$5^+$-点相关,则由$O_3$,$w^*(f)\geqslant w(f)+2\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=0$.

设f是5-面.

假设f至少与两个5^+-点相关,则$w^*(f)\geqslant w(f)+2\cdot\frac{1}{2}=0$.

假设f恰与一个5^+-点和四个4-点相关. 当f与一个6^+-点相关时,则$w^*(f)\geqslant w(f)+1=0$. 当f是一个坏的5-面时,则由$R_{4.1}$,$w^*(f)=w(f)+1=0$. 当f不是坏的5-面时,则5-点不与坏的5-面相关,否则G含有同构于G_5的$\mathscr{S}$-子图. 因此最坏的情况是f与四个三角形相邻,则$w^*(f)\geqslant w(f)+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=0$.

假设f与五个4-点相关. 当f最多与三个三角形相邻时,则由R_5,R_6,R_7,$w^*(f)\geqslant w(f)+3\cdot\frac{1}{3}=0$. 当$f$与四个或五个三角形相邻时,$w^*(f)=w(f)+2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$(图2(a))或$w^*(f)=w(f)=-1$(图2(b)).

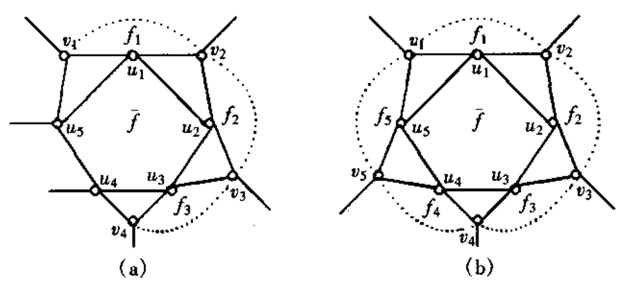

图2

这里用$\bar{f}$来记图2中的5-面. 将与两个三角形相关的4-点称为M-点. 下面考虑与$\bar{f}$在M-点相关的面f_i,$1\leqslant i\leqslant 5$. 同构与$\bar{f}$并与f_i在M-点相关的点的个数记做$m(f_i)$. 给出图2中几个显见的事实:

O'_1:v_i都是5^+-点;

O'_2:当v_i是5-点,则v_i不和坏的5-面相关;

O'_3:$m(f_i)\leqslant d(f_i)-2$.

如果我们能证明不等式$w^*(\bar{f})+\sum\frac{w^*(f_i)}{m(f_i)}\geqslant 0$成立,那么我们就可以得到$\sum\limits_{x\in V\cup F\backslash F^*}w^*(x)\geqslant 0$,这样

定理就成立了.

(i) 设f_i为5-面.

如果f_i恰与两个5^+-点和三个4-点相关,则必有一点为6^+-点,否则G含有同构于G_6的$\mathscr{G}$-子图,因此$\frac{w^*(f_i)}{m(f_i)} \geqslant \frac{w(f_i)+1+\frac{2}{3}}{3}=\frac{2}{9}$. 如果$f_i$至少与三个$5^+$-点相关,则$\frac{w^*(f_i)}{m(f_i)} \geqslant \frac{w(f_i)+2\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{12}$.

(ii) 设f_i为6^+-面,$\frac{w^*(f_i)}{m(f_i)} \geqslant \frac{w(f_i)+2\cdot\frac{2}{3}}{d(f_i)-2} \geqslant \frac{k-\frac{14}{3}}{k-2} \geqslant \frac{1}{3}$.

因此$w^*(\bar{f})+\sum \frac{w^*(f_i)}{m(f_i)} \geqslant -\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{9}>0$(图2(a)),$w^*(\bar{f})+\sum \frac{w^*(f_i)}{m(f_i)} \geqslant -1+5\cdot\frac{2}{9}>0$(图2(b)).

3 运用于选色

引理3.1[8] 每个2-可选色的图也是$(2m, m)$-可选色的,$m \in \mathbf{N}$.

显然每个偶圈都是2-可选色的,由引理3.1它也是$(2m, m)$-可选色的,$m>0$. 因此G_1是(mf_1, m)-可选色的,$m>0$. 有关选色与方向之间的关系在[8]中有描述. 给出有向图$D=(V, A)$与D中两点x, y,用$\overrightarrow{xy} \in A$定义$D$中$x$到$y$的弧. 设$N_D[x]=\{x\} \cup \{u \in V \mid \overrightarrow{xu} \in A\}$. 如果存在独立集$K \subset V$,对于每个$u \in V \backslash K$,存在点$v \in K$,使得$\overrightarrow{uv} \in A$,则$K$为$D$的核. D的底图为$G=(V, E)$,$E=\{uv \mid \overrightarrow{uv} \in A$. 如果有向图$D$是$(f, g)$-可选色的,则$G$也是$(f, g)$-可选色的.

引理3.2[9] 设D为无环有向图,任意两点在每个方向只有一弧相连,每个导出子图都有核. 令f, g为$V(D)$上的两个正整数映射. 如果$f(x) \geqslant \sum_{u \in N_D[x]} g(u)$,$g(x)>0$,则$D$是$(f, g)$-可选色的.

引理3.3 G_i是(mf_i, m)-可选色的,$i=1, 2$,m为正整数.

我们给G_i一个方向,$i=2, 3$,如图3所示. 引理3.3的证明在[5]中. 当$m=1$时,$(4m, m)$-可选色的即4-可选色的.

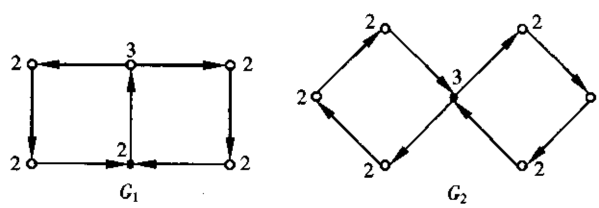

图3

引理3.4[5] 设$G=(V, E)$为圈$u_1u_2\cdots u_nu_1$恰含有一弦$u_1u_k(3 \leqslant k \leqslant n-1)$. 令$f: V \to \mathbf{N}$. $f(v_1)=f(v_k)=3$且$f(v_i)=2$,$i \neq 1, k$. 则G是(mf, m)-可选色的,$m \in \mathbf{N}$.

由引理3.4知G_4是(mf_4, m)-可选色的,m为正整数.

引理3.5 设f_5为G_5点的赋值. $|f_5(u_5)|=3$且$|f_5(u_i)|=2$,$i \neq 5$. 则G_5是f_5-可着色的.

证明 如果$f_5(u_1) \not\subseteq f_5(u_5)$,则存在$\beta \in f_5(u_1) \backslash f_5(u_5)$. 着色方法是$u_1$着颜色$\beta$,接下来顺序着色$u_2, u_3, u_4, u_6, u_5$.

如果$f_5(u_1) \subseteq f_5(u_5)$.

当$f_5(u_1) \neq f_5(u_6)$,则存在$\beta \in f_5(u_1) \backslash f_5(u_6)$. 着色方法是$u_1$着颜色$\beta$,接下来顺序着$u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.

当$f_5(u_1)=f_5(u_6)$,则存在$\beta \in f_5(u_5) \backslash f_5(u_1)$. 着色方法是$u_5$着颜色$\beta$,接下来顺序着$u_4, u_3, u_2, u_1, u_6$.

引理3.6 设f_6为G_6点的赋值. $|f_6(u_1)|=4$,$|f_6(u_2)|=|f_6(u_5)|=3$,$|f_6(u_3)|=|f_6(u_4)|=2$且$|f_6(v_i)|=2$,$2 \leqslant i \leqslant 5$. 则$G_6$是$f_6$-可着色的.

证明 如果$f_6(u_5) \cup f_6(v_5) \not\subseteq f_6(u_1)$,则存在$\beta \in (f_6(u_5) \cup f_6(v_5)) \backslash f_6(u_1)$. 当$\beta \in f_6(u_5)$,着色方法是$u_5$着颜色$\beta$,接下来顺序着$u_4, u_3, v_5 \cdots v_2, u_2, u_1$. 当$\beta \in f_6(v_5)$,着色方法是$v_5$着颜色$\beta$,接下来顺序着$v_4, v_3, v_2, u_5 \cdots u_2, u_1$.

如果$f_6(u_5) \cup f_6(v_5) \subseteq f_6(u_1)$.

当$f_6(u_5) \cup f_6(v_5) \neq f_6(u_1)$,则存在$\beta \in f_6(u_1) \setminus (f_6(u_5) \cup f_6(v_5))$. 着色方法是$u_1$着颜色$\beta$,接下来顺序着$v_2, v_3, v_4, v_5, u_2, u_3, u_4, u_5$.

当$f_6(u_5) \cup f_6(v_5) = f_6(u_1)$,我们得到$f_6(v_5) \not\subseteq f_6(u_5)$,并且存在$\beta \in f_6(v_5) \setminus f_6(u_5)$. 着色方法是$v_5$着颜色$\beta$,接下来顺序着$v_4, v_3, v_2, u_1, u_2 \cdots u_4, u_5$.

引理3.7[6] 给G两个映射$f, g: V(G) \to \mathbf{N}$, $\mathbf{N}$为正整数. 设H为G的点导出子图,且$f'(v) = \max\{f(v) - \sum_{u \in N_G(v) \setminus V(H)} g(u), 0\}$, $v \in V(H)$. 如果$G \setminus H$为$(f|_{G \setminus H}, g|_{G \setminus H})$-可选色的,$H$为$(f', g)$-可选色的,则$G$为$(f, g)$-可选色的.

引理3.8[5] $G = (V, E)$为图,不一定为平面图. f, g为两个$V \to \mathbf{N}$的映射. 令$H = G[V']$, $V' \subset V$,且$f'(v) = f(v) - \sum_{u \in N_G(v) \setminus V'} g(u)$, $v \in V'$. 如果$f'(v) \geq g(v)$, $v \in V'$, $G\text{-}H$为(f, g)-可选色的且H为(f', g)-可选色的,则G为(f, g)-可选色的.

定理3.9 不含相邻三角形且四面和三面不相邻的平面图是4-可选色的.

证明 用数学归纳法证.

显然$|V| = 1$时定理成立. 假设$|V| < n$, $n \geq 2$时定理成立.

设$|V| = n$. 当$\delta \leq 3$,令$v \in V$, $d(v) = \delta$. 由于G不含相邻三角形且四面和三面不相邻,所以其子图也满足条件. 根据归纳假设$G - v$是4-可选色的,由于顶点V的度数小于4. 则易证G也是4-可选色的. 当$\delta \geq 4$时,由定理2.1知G含$\mathscr{G}$子图. 引理3.1到引理3.6知G_i是$(f_i, 1)$-可选色的,$1 \leq i \leq 6$. 又由归纳假设,$G - \{G_1, G_2 \cdots G_6\}$是$(4, 1)$-可选色的,再由引理3.7和引理3.8得到$G$是$(4, 1)$-可选色的,即4-可选色的.

4 总结与猜想

在文中我们讨论了不含相邻三角形并且四面和三面不相邻的平面图是4-可选色的问题. 考虑其它一些不含相邻三角形的平面图是否也是4-可选色的,由此我们给出下面的一个猜想:

猜想 不含相邻三角形并且四面距离至少为3的平面图是4-可选色的.

[参考文献]

[1] Bondy J A, Murty USR. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmillan, 1976.
[2] Tomassen C. 3-list-coloring planar graph of girth 5[J]. J Combin Theory Ser B, 1995, 64: 101—107.
[3] Thomassen C. Every planar graph is 5-choosable[J]. J Combin Theory, Ser B, 1994, 62: 180—181.
[4] Peter C B, Lam B Xu, Liu J. The 4-choosability of plane graphs without 4-cycles[J]. J Combin Theory, Ser B, 1999, 76: 117—126.
[5] Peter C B, Lam B Xu, Shiu W C. On structure of some plane graphs with application to choosability[J]. J Combin Theory, Ser B, 2001, 82: 285—296.
[6] Xu B. On structure of graphs embedded on surfaces of nonnegative characteristic with application to choosability[J]. Discrete Math, 2002, 248: 283—291.
[7] Wang W F, Lih K W. Choosability and edge choosability of planar graphs without intersecting tringles[J]. SIAM J Discrete Math, 2002, 15(4): 538—545.
[8] Tuza Z, Voigt M. Every 2-choosable graph is $(2m, m)$-choosable[J]. J Graph Theory, 1996, 22: 245—252.
[9] Galvin F. The list chromatic index of a bipartite multigraph[J]. J Combin Theory, Ser B, 1995, 63: 153—158.
[10] Voigt M, Wirth B. On 3-colorable non-4-choosable plane graphs[J]. J Graph Theory, 1997, 24: 233—235.
[11] Voigt M, Wirth B. A not 3-choosable plane graph without 3-circuits[J]. Discrete Math, 1995, 146: 325—328.
[12] Vizing V G. Vertex coloring with a given colors[J]. Diskert Analiz, 1976, 29: 3—10.
[13] Borindin O V. Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings[J]. J Graph Theory, 1996, 21(2): 183—186.
[14] Borodin O V, Sanders D P, Zhao Y. On cyclic colorings and their generalizations[J]. Discrete Math, 1999, 203: 123—141.
[15] Borindin O V. Cyclic degree and cyclic coloring of 3-polytopes[J]. J Graph Theory, 1996, 23: 225—231.

[责任编辑: 陆炳新]