

具有年龄结构捕食系统的永久持续生存

何朝晖 , 崔景安

( 南京师范大学数学与计算机科学学院 210097 江苏 南京 )

[ 摘要 ] 本文研究食饵具有年龄结构的周期捕食系统 , 在此系统中 , 捕食者只捕获成年食饵 , 得到了系统永久持续生存的条件.  
[ 关键词 ] 捕食系统 , 年龄结构 , 永久持续生存 , 渐近稳定  
[ 中图分类号 ] B4C05 , B4C23 , [ 文献标识码 ] A , [ 文章编号 ] 1001-4616( 2005 )01-0024-06

Permanence of Predator-prey System with Stage Structure

He Zhaohui , Cui Jingan

( School of Mathematics and Computer Science , Nanjing Normal University , 210097 , Nanjing , China )

**Abstract** :We consider a periodic predator-prey system in which the prey has a history that takes them through immature and mature stages and predator only prey on mature. We provide a sufficient and necessary condition to guarantee the permanence of the system.  
**Key words** :predator-prey system , stage structure , permanence , asymptotically stable

0 引言

在自然界的某些捕食系统中 , 许多食饵具有年龄结构 , 幼年食饵或由于体形小 , 或由于生活在不同于成年食饵的环境中 , 未引起捕食者注意 , 捕食者只捕获成年的食饵. 对具有年龄结构的捕食系统已有一些研究<sup>[ 2, 6, 7, 10 ]</sup>. [ 7 ] 研究捕食者具有年龄结构的自治系统 , 得到捕食系统永久持续生存的充分条件. [ 6 ] 研究了捕食者具有年龄结构的自治系统 , 成年捕食者除捕获食饵外 , 还捕获幼年捕食者 , 得到捕食系统共存前提条件并分析了平衡点的稳定性 [ 10 ] 研究了食饵具有年龄结构的自治系统永久持续的充分条件. [ 2 ] 研究了食饵具有年龄结构 , 捕食者捕获幼年食饵的周期系统 , 得到了系统永久持续生存的充要条件. 本文主要讨论食饵具有年龄结构 , 捕食者捕获成年食饵 , 并且食饵和捕食者受密度制约的周期捕食系统的永久持续生存的条件. 考虑捕食系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= k(t)x_2 - r_1(t)x_1 - b_1(t)x_1 - r(t)x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= b_1(t)x_1 - r_2(t)x_2^2 - a_1(t)x_2y - q(t)x_2 \\ \dot{y} &= y[ -r_3(t) + a_2(t)x_2(t - \tau) - b_2(t)y ] , \end{aligned}$$

( 1 )

其中  $x_1$  表示食饵的幼年期 ,  $x_2$  表示食饵的成年期 ,  $y$  表示捕食者. ( 1 ) 中系数  $k(t)$  ,  $r(t)$  ,  $q(t)$  ,  $r_3(t)$  ,  $a_2(t)$  ,  $b_1(t)$  ,  $r_1(t)$  ,  $r_2(t)$  (  $i = 1, 2$  ) 都是以  $\omega$  为周期的正值有界函数 ,  $k(t)$  ,  $r_1(t)$  分别表示幼年食饵的出生率和死亡率 ,  $b_1(t)$  表示幼年食饵向成年食饵的转化率 ,  $r(t)$  ,  $r_2(t)$  分别为幼年、成年食饵的密度制约系数 ,  $a_1(t)$  为捕食者对成年食饵的捕获率 ,  $q(t)$  为人类对成年食饵捕获系数 ,  $r_3(t)$  表示捕食者无食饵的死亡率 ,  $b_2(t)$  为捕食者的密度制约系数. 本文讨论系统 ( 1 ) 永久持续生存的条件.

收稿日期 : 2004-05-10.  
基金项目 : 江苏省高校自然科学基金资助项目( 02KJB110004 ) 国家自然科学基金资助项目( 10471066 ).  
作者简介 : 何朝晖 , 女 , 1969— , 硕士研究生 , 主要从事生物数学的学习与研究 , E-mail : hzh6607@sohu.com  
通讯联系人 : 崔景安 , 1963— , 教授 , 主要从事生物数学的教学与研究 , E-mail : zuija@njnu.edu.cn

## 1 记号和引理

我们首先引入一些记号. 设  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$  上的有界连续函数. 记

$$f^M(t) = \max_{t \in [0, \omega]} f(t), f^L(t) = \min_{t \in [0, \omega]} f(t).$$

若  $f$  是以  $\omega$  为周期的, 定义  $f$  的平均为

$$A_\omega(f) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(t) dt.$$

定义 称系统 (1) 是永久持续生存的, 若存在正常数  $M_x, M_y$  和  $\delta_x, \delta_y$ , 使得

$$0 < \delta_x < \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M_x, \quad i = 1, 2$$

$$0 < \delta_y < \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_y.$$

引理 1<sup>[3]</sup> 若系数  $b(t), d(t)$  都是以  $\omega$  为周期的且  $A_\omega(b) > 0, d(t) > 0$ , 则方程

$$\dot{x} = x[b(t) - d(t)x] \quad (2)$$

有唯一的全局渐近稳定的  $\omega$  周期解.

引理 2<sup>[2]</sup> 若系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(t)x_2 - b(t)x_1 - d(t)x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 - f(t)x_2^2 - q(t)x_2 \end{aligned} \quad (3)$$

的系数都是正的  $\omega$  周期函数, 且满足  $(g(t))^M (h(t))^M < (a(t))^L (c(t))^L$ , 则系统具有全局渐近稳定的  $\omega$  周期正解.

## 2 结论及其证明

对系统 (1) 我们作出下面假设:

$$(H1): (a_1(t)M_y + q(t))^M (r_1(t) + b_1(t))^M < (b_1(t))^L (h(t))^L \quad (4)$$

其中  $M_y = \max_{t \in [0, \omega]} \{y^*(t)\}$ ,  $y^*(t)$  是方程  $\dot{y} = y[a_2(t)M_x - b_2(t)y]$  的全局渐近稳定的  $\omega$  周期正解 (见引理 3).

定理 2.1 在假设 (H1) 下, 系统 (1) 永久持续生存的充要条件是:

$$A_\omega[-r_3(t) + a_2x_2^*(t)] > 0, \quad (5)$$

其中  $(x_1^*(t), x_2^*(t))$  是系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h(t)x_2 - r_1(t)x_1 - b_1(t)x_1 - d(t)x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= b_1(t)x_1 - r_2(t)x_2^2 - q(t)x_2 \end{aligned} \quad (6)$$

的全局渐近稳定的  $\omega$  周期正解.

记  $C_+ = \{\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) | \phi_i(t) \text{ 连续, 且 } \phi_i(t) \geq 0, \phi_i(0) > 0 (t \in [-\tau, 0]), i = 1, 2, 3\}$ . 这里我们用  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  表示系统 (1) 的满足初始条件  $x_1(t) = \phi_1(t), x_2(t) = \phi_2(t), y(t) = \phi_3(t), (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in C_+, -\tau \leq t \leq 0$  的解.

引理 3 对于系统 (1), 存在正常数  $M_x, M_y$  使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M_x, \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_y, \quad i = 1, 2$$

证明 (i) 因为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h(t)x_2 - r_1(t)x_1 - b_1(t)x_1 - d(t)x_1^2, \\ \dot{x}_2 &\leq b_1(t)x_1 - r_2(t)x_2^2 - q(t)x_2. \end{aligned}$$

辅助系统

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= h(t)u_2 - r_1(t)u_1 - b_1(t)u_1 - d(t)u_1^2, \\ \dot{u}_2 &= b_1(t)u_1 - r_2(t)u_2^2 - q(t)u_2. \end{aligned}$$

在 (H1) 的假设下, 有  $(q(t))^M (b_1(t) + r_1(t))^M < (b_1(t))^L (h(t))^L$ . 由引理 2 (6) 具有全局渐近稳定的正  $\omega$  周期解  $(x_1^*(t), x_2^*(t))$ .

设  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  和  $(u_1(t), u_2(t))$  分别是 (1) 和 (6) 的满足  $u_i(0) = x_i(0)$  的解. 由比较原理知  $x_i(t) \leq u_i(t) \ (t > 0, i = 1, 2)$ . 由  $x_i^*(t)$  的全局渐近稳定性, 知存在  $T_0 > 0$ , 当  $t > T_0$  时, 有  $|u_i(t) - x_i^*(t)| < \varepsilon \ (t > T_0, i = 1, 2)$ . 所以当  $t > T_0$  时, 有  $u_i(t) < x_i^*(t) + \varepsilon \ (i = 1, 2)$ . 因为  $x_i(t) \leq u_i(t)$ , 所以当  $t > T_0$  时,  $x_i(t) < x_i^*(t) + \varepsilon \ (i = 1, 2)$ . 由  $\varepsilon$  的任意性, 有  $x_i(t) \leq x_i^*(t)$ . 取  $M_x = \max_{t \in [0, \omega]} \{x_i^*(t) \mid i = 1, 2\}$ , 则  $t > T_0$  时, 有  $x_i(t) \leq M_x$ , 所以  $\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M_x$ .

(ii). 由

$$\dot{y} = y[-r_3(t) + a_2(t)x_2(t - \tau) - b_2(t)y] \quad (7)$$

有

$$\dot{y} < y[a_2(t)M_x - b_2(t)y], \quad t > T_0 + \tau$$

根据引理 1,

$$\dot{v} = v[a_2(t)M_x - b_2(t)v] \quad (8)$$

具有全局渐近稳定的正  $\omega$  周期解  $y^*(t)$ .

设  $y(t), v(t)$  分别为 (7) (8) 满足  $y(T_0 + \tau) = v(T_0 + \tau)$  的解. 由比较原理知  $y(t) \leq v(t) \ (t > T_0 + \tau)$ . 由  $y^*(t)$  的全局渐近稳定性, 知存在  $T_1 > T_0 + \tau$ , 当  $t > T_1$  时, 有  $|v(t) - y^*(t)| < \varepsilon$ , 从而  $v(t) < y^*(t) + \varepsilon$ . 由  $\varepsilon$  的任意性, 有  $v(t) \leq y^*(t)$ . 所以当  $t > T_1$  时,  $y(t) \leq y^*(t)$ . 取  $M_y = \max_{t \in [0, \omega]} \{y^*(t)\}$ , 则  $t > T_1$  时, 有  $y(t) \leq M_y$ , 故  $\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_y$ . 所以  $t > T_1$  时, 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq M_x, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_y, \quad i = 1, 2.$$

引理 4 对于系统 (1), 当满足条件 (H1) 时, 存在  $\delta_x > 0$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \geq \delta_x, \quad i = 1, 2.$$

证明 因为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &\geq b^L x_2 - (r_1 + b_1)^M x_1 - r^M x_1^2, \\ \dot{x}_2 &\geq b_1^L x_1 - r_2^M x_2^2 - (a_1 M_y + q)^M x_2. \end{aligned}$$

由引理 3 知, 辅助系统

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= b^L u_2 - (r_1 + b_1)^M u_1 - r^M u_1^2, \\ \dot{u}_2 &= b_1^L u_1 - r_2^M u_2^2 - (a_1 M_y + q(t))^M u_2. \end{aligned} \quad (9)$$

在条件 (H1) 下, 具有全局渐近稳定的正解  $(\bar{x}_1^*(t), \bar{x}_2^*(t))$ .

设  $x_i(t), \bar{x}_i(t)$  分别是系统 (1) 和 (9) 满足  $x_i(T_1) = \bar{x}_i(T_1)$  的解, 由比较原理  $x_i(t) \geq \bar{x}_i(t) \ (t > T_1)$ . 由  $\bar{x}_i^*(t)$  的全局渐近稳定性知, 存在  $T_2 > T_1$ , 当  $t > T_2$  时, 有  $|\bar{x}_i(t) - \bar{x}_i^*(t)| < \varepsilon$ . 所以

$$\bar{x}_i(t) > \bar{x}_i^*(t) - \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

$$\text{所以 } t > T_2 \text{ 时 } x_i(t) > \bar{x}_i^*(t) - \varepsilon = \frac{x_i^*(t)}{2} = \delta_x \left( \text{取 } \varepsilon = \frac{x_i^*(t)}{2} \right).$$

即得  $\liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \geq \delta_x$ .

引理 5 若系统 (1) 满足条件  $A_\omega[-r_3(t) + a_2 x_2^*(t)] > 0$ , 则

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \eta_y. \quad (10)$$

证明 由 (5), 我们取  $\varepsilon_0 > 0$ , 使

$$A_\omega(\psi_{\varepsilon_0}(t)) > 0, \quad (11)$$

其中  $\psi_{\varepsilon_0}(t) = -r_3(t) + a_2(t)x_2^*(t) - a_2(t)\varepsilon_0 - b_2(t)\varepsilon_0$ .

考虑含有参数  $\alpha \left( 0 < \alpha < \frac{M_y}{2} \right)$  的方程组,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b(t)x_2 - r_1(t)x_1 - b_1(t)x_1 - r(t)x_1^2, \\ \dot{x}_2 &= b_1(t)x_1 - r_2(t)x_2^* - 2\alpha a_1(t)x_2 - q(t)x_2. \end{aligned} \quad (12)$$

根据引理 2, 在假设 (H1) 下 (12) 有全局渐近稳定的  $\omega$  周期解  $(x_{1\alpha}(t), x_{2\alpha}(t))$ . 用  $(\bar{x}_{1\alpha}(t), \bar{x}_{2\alpha}(t))$  表示

(12) 满足  $\bar{x}_{i\alpha}(0) = x_i^*(0)$   $i = 1, 2$  的解, 其中  $(x_1^*(t), x_2^*(t))$  是 (6) 的全局渐近稳定的  $\omega$  周期解, 则对上面给定的  $\varepsilon_0$ , 存在  $T_3 > T_2$ , 使得

$$|\bar{x}_{2\alpha}(t) - x_{2\alpha}(t)| < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad t \geq T_3.$$

由解对参数的连续依赖性, 当  $\alpha \rightarrow 0$  时, 在  $[T_3, T_3 + \omega]$  上  $(\bar{x}_{1\alpha}(t), \bar{x}_{2\alpha}(t))$  一致收敛于  $(x_1^*(t), x_2^*(t))$ , 因此对  $\varepsilon_0 > 0$ , 存在  $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon_0)$ , 当  $t \in [T_3, T_3 + \omega]$  时  $0 < \alpha < \alpha_0$  时,

$$|\bar{x}_{2\alpha}(t) - x_2^*(t)| < \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

所以  $|x_{2\alpha}(t) - x_2^*(t)| \leq |\bar{x}_{2\alpha}(t) - x_{2\alpha}(t)| + |\bar{x}_{2\alpha}(t) - x_2^*(t)| < \frac{\varepsilon_0}{2}, t \in [T_3, T_3 + \omega]$ .

因为  $x_{2\alpha}(t)$  和  $x_2^*(t)$  都是  $\omega$  周期的, 所以

$$|x_{2\alpha}(t) - x_2^*(t)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (t \geq 0, 0 < \alpha < \alpha_0).$$

选取  $\alpha_1$  ( $0 < \alpha_1 < \alpha_0, 2\alpha_1 < \varepsilon_0$ ), 使得

$$x_{2\alpha_1}(t) \geq x_2^*(t) - \frac{\varepsilon_0}{2} \quad t \geq 0 \quad (13)$$

假如 (10) 不成立, 则存在  $Z(t) \in C_+$  对于 (1) 的满足初始条件  $(x_1(t), x_2(t), y(t)) = Z(t), t \in [-\tau, 0]$  的解, 有  $\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) < \alpha_1$ . 从而存在  $T_4 > T_3$ , 使得

$$y(t) < 2\alpha_1 \quad t \geq T_4 \quad (14)$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= b(t)x_2 - r_1(t)x_1 - b_1(t)x_1 - r(t)x_1^2 \\ x_2 &\geq b_1(t)x_1 - r_2(t)x_2^* - 2\alpha_1 a_1(t)x_2 - q(t)x_2. \end{aligned}$$

设  $(u_1(t), u_2(t))$  是 (12) 满足  $\alpha = \alpha_1, u_i(T_4) = x_i(T_4) (i = 1, 2)$  的解, 则  $x_i(t) \geq u_i(t), t \geq T_4 (i = 1, 2)$ .

根据  $(x_{1\alpha_1}(t), x_{2\alpha_1}(t))$  的全局渐近稳定性, 对于  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}$ , 存在  $T_5 \geq T_4$ , 使得

$$|u_2(t) - x_{2\alpha_1}(t)| < \frac{\varepsilon_0}{2}, t \geq T_5.$$

从而  $x_2(t) \geq u_2(t) > x_{2\alpha_1}(t) - \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (t \geq T_5)$ . 由 (13) 可得  $x_2(t) > x_2^*(t) - \varepsilon_0, t \geq T_5$ . 所以  $\dot{y} \geq$

$\psi_{\varepsilon_0}(t)y(t), t \geq T_5 + \tau$ . 即  $y(t) \geq y(T_5 + \tau) \exp \int_{T_5 + \tau}^t \psi_{\varepsilon_0}(s) ds$ . 当  $t \rightarrow \infty, y(t) \rightarrow \infty$  与  $y$  的有界性矛盾. 所以  $\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \eta_y$ .

引理 6 假设 (5) 成立, 则存在正常数  $\delta_y$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \delta_y.$$

证明 假设结论不真, 则存在  $\{\phi_m\} \in C_+$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t, \phi_m) < \frac{\eta_y}{(m+1)^2}, m = 1, 2, \dots$$

由引理 5 得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t, \phi_m) \geq \eta_y, m = 1, 2, \dots$ . 所以存在两个时间序列  $\{s_q^{(m)}\}$  和  $\{t_q^{(m)}\}$  满足

$$0 < s_1^{(m)} < t_1^{(m)} < s_2^{(m)} < t_2^{(m)} < \dots < s_q^{(m)} < t_q^{(m)} < \dots,$$

$$s_q^{(m)} \rightarrow \infty, t_q^{(m)} \rightarrow \infty, (q \rightarrow \infty),$$

$$y(s_q^{(m)}, \phi_m) = \frac{\eta_y}{m+1}, y(t_q^{(m)}, \phi_m) = \frac{\eta_y}{(m+1)^2},$$

$$\frac{\eta_y}{(m+1)^2} < y(t, \phi_m) < \frac{\eta_y}{m+1} \quad t \in (s_q^{(m)}, t_q^{(m)}).$$

由引理 3 对任意给定的整数  $m > 0$  存在  $T_1^{(m)} > 0$  使得

$$y(t, \phi_m) \leq M_y, t \geq T_1^{(m)}.$$

因为当  $q \rightarrow \infty$  时  $s_q^{(m)} \rightarrow \infty$ . 所以存在正整数  $k^{(m)}$  当  $q \geq k^{(m)}$  时  $s_q^{(m)} \geq T_1^{(m)} + \tau$  因此对于  $q \geq k^{(m)}, t \in (s_q^{(m)}, t_q^{(m)})$  有

$$y(t, \phi_m) \geq y(t, \phi_m) - r_3(t) - b_2(t)M_y.$$

从而  $y(t_q^{(m)}, \phi_m) \geq y(s_q^{(m)}, \phi_m) \exp \int_{s_q^{(m)}}^{t_q^{(m)}} [-r_3(s) - b_2(s)M_y] ds$ .

即  $\int_{s_q^{(m)}}^{t_q^{(m)}} [r_3(s) + b_2(s)M_y] ds \geq \ln(m+1) \Rightarrow q \geq k^{(m)}$ .

由  $r_3(t) + b_2(t)M_y$  的有界性知 当  $m \rightarrow \infty, q \geq k^{(m)}$  时有

$$t_q^{(m)} - s_q^{(m)} \rightarrow \infty. \quad (15)$$

由 (11) 存在  $P > 0$  和整数  $N_0 > 0$  当  $m \geq N_0, q \geq k^{(m)}, \mu \geq P$  时 有

$$\frac{\eta_y}{m+1} < \alpha_1 < \varepsilon_0, t_q^{(m)} - s_q^{(m)} > 2P. \quad (16)$$

和

$$\int_0^a \psi_{\varepsilon_0}(s) ds > 0. \quad (17)$$

所以当  $m \geq N_0, q \geq k^{(m)}$  时  $y(t, \phi_m) < \alpha_1, t \in [s_q^{(m)}, t_q^{(m)}]$  这样对于  $t \in [s_q^{(m)}, t_q^{(m)}]$  有

$$x_1(t, \phi_m) = b(t)x_2(t, \phi_m) - r_1(t)x_1(t, \phi_m) - b_1(t)x_1(t, \phi_m) - r(t)x_1^2(t, \phi_m),$$

$$x_2(t, \phi_m) \geq b_1(t)x_1(t, \phi_m) - r_2(t)x_2^2(t, \phi_m) - 2\alpha_1\alpha_1(t)x_2(t, \phi_m) - q(t)x_2(t, \phi_m).$$

设  $(u_1(t), \mu_2(t))$  是 (12) 满足  $\alpha = \alpha_1, \mu_1(s_q^{(m)}) = x_1(s_q^{(m)}, \phi_m)$  的解 则

$$x_i(t, \phi_m) \geq u_i(t), t \in [s_q^{(m)}, t_q^{(m)}].$$

由引理 3 引理 4 及  $s_q^{(m)} \rightarrow \infty (q \rightarrow \infty)$  我们选取  $k_1^{(m)} > k^{(m)}$  使当  $q_1 \geq k_1^{(m)}$  时

$$\delta_x \leq x_i(s_q^{(m)}, \phi_m) \leq M_x, i = 1, 2.$$

对于  $\alpha = \alpha_1$  (12) 有正的全局渐近稳定的周期解  $(x_{1\alpha_1}(t), x_{2\alpha_1}(t)), (x_{1\alpha_1}(t), x_{2\alpha_1}(t)))$  关于紧集  $\Omega = \{(x_1, x_2) | \delta_x \leq x_i \leq M_x, i = 1, 2\}$  是一致渐近稳定的 因此对于引理 5 中的  $\varepsilon_0$  存在与  $m$  和  $q$  无关的  $T_0 (> P)$  使得  $u_2(t) \geq x_{2\alpha_1}(t) - \frac{\varepsilon_0}{2}, t \geq T_0 + s_q^{(m)}$ . 由 (13) 得

$$u_2(t) \geq x_2^*(t) - \varepsilon_0, t \geq T_0 + s_q^{(m)}.$$

由 (15) 存在正整数  $N_1 \geq N_0$  当  $m \geq N_1, q \geq k_1^{(m)}$  时  $t_q^{(m)} > s_q^{(m)} + 2T_0 > s_q^{(m)} + 2P$ .

因此当  $m \geq N_1, q \geq k_1^{(m)}$  时

$$x_2(t, \phi_m) \geq x_2^*(t) - \varepsilon_0, t \in [s_q^{(m)} + T_0, t_q^{(m)}].$$

从而当  $t \in [s_q^{(m)} + T_0, t_q^{(m)}]$  时

$$y(t, \phi_m) \geq \psi_{\varepsilon_0}(t, \phi_m),$$

积分得

$$y(t_q^{(m)}, \phi_m) \geq y(s_q^{(m)} + T_0, \phi_m) \exp \int_{s_q^{(m)} + T_0}^{t_q^{(m)}} \psi_{\varepsilon_0}(s) ds,$$

即

$$\frac{\eta_y}{(m+1)^2} \geq \frac{\eta_y}{(m+1)^2} \exp \int_{s_q^{(m)} + T_0}^{t_q^{(m)}} \psi_{\varepsilon_0}(s) ds > \frac{\eta_y}{(m+1)^2},$$

这是矛盾的 说明了引理 6 的结论成立.

定理 2.1 的证明 由引理 4 5 6 知定理 2.1 的充分性成立.

再证必要性. 只需证明

$$A_\omega[-r_3(t) + a_2x_2^*(t)] \leq 0 \quad (18)$$

成立时 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  即可.

对任意给定的  $0 < \varepsilon < 1$ , 存在  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得

$$A_\omega[-r_3(t) + a_2(t)(x_2^*(t) + \varepsilon_1) - b_2(t)\varepsilon] \leq \varepsilon_1 A_\omega(a_2(t)) - \varepsilon b_2(t) \leq -\varepsilon_0, \quad (19)$$

$$\dot{x}_1 = b(t)x_2 - r_1(t)x_1 - b_1(t)x_1 - r(t)x_1^2,$$

$$\dot{x}_2 \leq b_1(t)x_1 - r_2(t)x_2^2 - q(t)x_2.$$

对上述的  $\varepsilon_1$ , 存在  $T^{(1)} > 0$ , 对  $t \geq T^{(1)}$  有

$$x_2(t) \leq x_2^*(t) + \varepsilon_1$$

由(19)可得

$$A_\omega[-r_3(t) + a_2(t)x_2(t - \tau) - b_2(t)\varepsilon] \leq -\varepsilon_0, t \geq T^{(1)}, \quad (20)$$

因此存在  $T^{(2)}$ , 使得  $y(T^{(2)}) < \varepsilon$ , 否则

$$\varepsilon \leq y(t) \leq y(T^{(1)}) \exp \int_{T^{(1)}}^t [-r_3(s) + a_2(s)x_2(s - \tau) - b_2(s)\varepsilon] ds \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty),$$

这样  $\varepsilon \leq 0$  矛盾. 设  $M(\varepsilon) = \max_{t \in [0, \omega]} [-r_3(t) + a_2(t)x_2(t - \tau) + b_2(t)\varepsilon]$ . 由引理3知  $M(\varepsilon) > 0$  且关于  $\varepsilon \in [0, 1]$  有界.

我们可以证明

$$y(t) \leq \varepsilon \exp(M(\varepsilon)\omega) \neq \geq T^{(2)}. \quad (21)$$

否则存在  $T^{(3)} > T^{(2)}$ , 使得

$$y(T^{(3)}) > \varepsilon \exp(M(\varepsilon)\omega) > \varepsilon.$$

由  $y(t)$  的连续性, 存在  $T^{(4)} \in (T^{(2)}, T^{(3)})$ , 使得  $y(T^{(4)}) = \varepsilon$  且  $y(t) > \varepsilon, t \in (T^{(4)}, T^{(3)})$ . 设  $P$  是使得  $T^{(3)} \in (T^{(4)} + P\omega, T^{(4)} + (P+1)\omega]$  成立的非负整数, 由(20)有

$$\begin{aligned} \varepsilon \exp(M(\varepsilon)\omega) &< y(T^{(3)}) < y(T^{(4)}) \exp \int_{T^{(4)}}^{T^{(3)}} [-r_3(s) + a_2(s)x_2(s - \tau) - b_2(s)\varepsilon] ds = \\ &\varepsilon \exp \left( \int_{T^{(4)}}^{T^{(4)}+P\omega} + \int_{T^{(4)}+P\omega}^{T^{(3)}} \right) [-r_3(s) + a_2(s)x_2(s - \tau) - b_2(s)\varepsilon] ds < \varepsilon \exp(M(\varepsilon)\omega) \end{aligned}$$

矛盾, 从而(21)成立. 由  $\varepsilon$  的任意性, 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ , 定理的必要性得证.

## [ 参考文献 ]

- [1] Cui J. The effect of dispersal on permanence in a predator-prey population growth model[J]. Computers Math Applic 2002, 44(8—9): 1085—1097.
- [2] Cui J, Song X. Permanence of predator-prey system with stage structure[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2004, 4B(3): 547—554.
- [3] Tineo A. An iterative scheme for the N-competing species problem[J]. J Diff Eqn, 1995, 116(1): 1—15.
- [4] Smith H L. Cooperative systems of differential equation with concave nonlinearities[J]. Nonlinear Analysis, 1986, 10: 1037—1052.
- [5] Misikski M, Heller R. Influence of a predator on the optimal foraging behaviour of stickbacks (Gasteropodus aculeatus L.) [J]. Nature, 1978, 275: 642—644.
- [6] Kjartan G. Magnusson Destabilizing effect of cannibalism on a structured predator-prey system[J]. Math Biosci, 1999, 155(1): 61—75.
- [7] Wang W, Chen L. A predator-prey system with stage-structure for predator[J]. Computers Math Applic, 1997, 33(8): 83—91.
- [8] Cao Y, Fan J, Gard T C. The effect of stage-structured population growth mode[J]. Nonlinear Analysis, 1992, 16(2): 95—105.
- [9] Chen L. Mathematical Models and Methods in Ecology[M]. Beijing: Science Press, 1988.
- [10] Song X, Cui J. The stage-structured predator-prey system with delay and harvesting[J]. Appl Analysis, 2002, 81: 1127—1142.

[ 责任编辑 陆炳新 ]